



دانشگاه هرمزان

اصول

ساختمان داده‌ها

سیمور لیپ شوتز / مهندس حسین ابراهیم زاده قلزم

چاپ هشتم

قابل استفاده دانشجویان مهندسی کامپیوتر

سخت‌افزار، نرم‌افزار، ریاضی کاربردی

ناشر برگزیده سال ۱۳۷۷

حاوی ۴۵۷ مساله حل شده

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

اصول ساختمان داده‌ها

نوشته: سیمور لیپ شوتز

ترجمه: مهندس حسین ابراهیم‌زاده قلزم

Lipschutz, Seymour

لیپشوتز، سیمور

اصول ساختمان داده‌ها/ نوشته سیمور لیپ شوتز؛ ترجمه حسین ابراهیم‌زاده قلزم -
[بندرعباس]: دانشگاه هرمزگان، ۱۳۷۴.
(۸)، ۵۰۱ ص؛ مصور، جدول، نمودار.

فهرستنویسی براساس اطلاعات فیبا (فهرستنویسی پیش از انتشار).
عنوان روی جلد: اصول ساختمان داده‌ها؛ قابل استفاده دانشجویان مهندسی کامپیوتر،
سخت‌افزار، ریاضی کاربردی، حاوی ۴۵۷ مسأله حل شده.
عنوان اصلی: Schaums outline of theory
and problems of data structures.

واژه‌نامه.

چاپ هشتم، ۱۳۸۲

ISBN: 964 - 6426 - 35 - 2: ریال ۳۴۰۰۰

۱. ساختار داده‌ها. ۲. ساختار داده‌ها -- مسائل، تمرینها و غیره. الف. ابراهیم‌زاده قلزم،
حسین، ۱۳۴۰ - مترجم. ب. دانشگاه هرمزگان. ج. عنوان.
۰۰۵/۷۳ Q۸۷۴/۹/۲ ل ۹

۷۵-۱۰۵۸۱

۱۳۷۴

نام کتاب:..... اصول ساختمان داده‌ها
ناشر:..... دانشگاه هرمزگان
مؤلف:..... سیمور لیپ شوتز
مترجم:..... مهندس حسین ابراهیم‌زاده قلزم
لیتوگرافی:..... کبریا
چاپ:..... کبریا
نوبت چاپ:..... هشتم/۱۳۸۲
شمارگان:..... ۳۳۰۰ نسخه
قیمت:..... ریال ۳۴۰۰۰

ISBN: 964 - 6426 - 35 - 2

شابک: ۲ - ۳۵ - ۶۴۲۶ - ۹۶۴

«حق چاپ محفوظ است»

بندرعباس - صندوق پستی ۳۹۹۵ - دانشگاه هرمزگان تلفن: (۰۷۶۱ - ۴۰۱۲۱ - ۵)
فروشگاه: تهران - خیابان انقلاب - مقابل دانشگاه تهران - پاساژ فروزنده - تلفن: ۶۹۵۰۵۵۳

مقدمه مترجم

سالهاست که به ترجمه و تألیف کتابهای ریاضی و کامپیوتری اشتغال دارم که کاری است پرنج، با مشقتهای فراوان. اما هیچ ترجمه و تألیفم را شیرین تر و جذابتر از اثر حاضر ندیده‌ام زیرا کامپیوتر را علم پرفسونی می‌دانم که معتقدم فسون آن در ساختمان داده‌ها متجلی است. ساختمان داده‌ها یکی از زیباترین مباحث و نیرومندترین ابزار در حل مسائل کامپیوتری است. این درس شیفتگان بسیار در میان دانشجویان رشته کامپیوتر دارد و نظر به اهمیت آن به عنوان درس رسمی دانشگاههای کشور پذیرفته شده است.

کتاب حاضر دربرگیرنده تمامی مطالب ساختمان داده‌های رشته‌های مهندسی کامپیوتر - سخت‌افزار، نرم‌افزار و ریاضی کاربردی است. این کتاب در عین حال که به تئوری پرداخته اما عاری از لفاظی و توصیفهای ناضرور است. از کمتر نکته‌ای در آن چشم پوشیده شده است و آنچه در کتاب است، ساختمان داده‌ها است و بس. این کتاب را می‌توان به عنوان سرفصل چندین واحد درسی دانشجویان رشته‌های کامپیوتر و ریاضی کاربردی مورد استفاده قرار داد و می‌تواند مرجعی مناسب و مطمئن برای درسهای برنامه‌نویسی پیشرفته، ساختمان داده‌ها و الگوریتم‌ها، ساختمان و ریاضیات گسسته، ذخیره و بازیابی اطلاعات و زبانهای برنامه‌نویسی باشد.

در ترجمه این کتاب بر کسی منتی نمی‌گذارم و خویشتن را سزاوار هیچگونه پاداشی نمی‌دانم زیرا به ایران و مردم ایران مدیونم و اگر بتوانم از این رهگذر اندکی از دین معنوی خود بکاهم تا حدی به آرزوی خود رسیده‌ام.

حسین ابراهیم‌زاده قلزم
دانشگاه صنعتی امیرکبیر
(پلی تکنیک تهران)
تهران ۲۰ - مهر - ۱۳۷۴

پیشگفتار مؤلف

مطالعه و بررسی ساختمان داده‌ها جزء اصلی و اجباری برنامه‌هر دانشجوی لیسانس و فوق‌لیسانس علم کامپیوتر است. این کتاب که اساسی‌ترین مطالب و سرفصل‌های درس ساختمان داده‌ها را ارائه می‌دهد، می‌تواند به عنوان یک کتاب درسی برای یک درس رسمی ساختمان داده‌ها یا به عنوان یک کتاب مکمل برای تقریباً تمام کتب متعارف و موجود کامپیوتر در این زمینه مورد استفاده قرار گیرد.

فصل‌های کتاب عمدتاً براساس میزان پیچیدگی مطالب تنظیم شده‌اند. فصل ۱، معرفی و مرور کلی بر مطالب تمام کتاب خواهد داشت و فصل ۲، زمینه ریاضی و نمادهای کامپیوتری را جهت ارائه و تجزیه و تحلیل الگوریتم‌ها فراهم می‌آورد. فصل ۳، که در مورد تطبیق الگوست، فصل مستقلی است که به صورت حاشیه‌ای با متن ارتباط دارد و از این رو در مطالعه اول کتاب می‌توان این فصل را حذف کرد یا خواندن آن را تا زمان دیگر به تعویق انداخت. فصل‌های ۴ تا ۸ شامل مطالب اصلی درس ساختمان داده‌هاست. مخصوصاً این که در فصل ۴، آرایه‌ها Arrays، رکوردها Records مورد بررسی قرار می‌گیرد. فصل ۵ راجع به لیستهای پیوندی Linked Lists است. فصل ۶ حاوی مطالبی در زمینه پشته‌ها Stacks و صفها Queues و همچنین زیربرنامه‌های بازگشتی Recursion است، فصل ۷ در مورد درختهای دودویی Binary Trees و فصل ۸ در باره گرافها Graphs و کاربردهای آن است. اگرچه مرتب کردن Sorting و جستجوی اطلاعات Searching از ابتدا تا انتهای کتاب در داخل مجموعه‌ای از ساختمان داده‌ها مخصوص مانند جستجوی دودویی با آرایه‌های خطی، QuickSort با پشته‌ها و صفها، و HeapSort با درختهای دودویی، مورد بحث و بررسی قرار گرفته است اما در فصل ۹، که آخرین فصل کتاب را نیز تشکیل می‌دهد الگوریتم‌های اضافی و تکمیلی مرتب کردن اطلاعات و جستجوی آنها نظیر ادغام و مرتب کردن Merge - Sort و درهم سازی Hashing معرفی و بحث و بررسی شده است.

الگوریتم‌ها به صورتی ارائه شده‌اند که مستقل از نوع کامپیوتر و زبان‌های برنامه‌نویسی است. علاوه

براین، این الگوریتم‌ها برای دستورهای کنترلی، عمدتاً با استفاده از قطعه برنامه‌های IF- THEN - ELSE و REPEAT - WHILE نوشته شده‌اند و همچنین جهت سهولت در خواندن و درک و فهم ساده آنها، از الگوی تورفته و پله‌ای استفاده شده است. بنابراین، هر یک از الگوریتم‌های کتاب را تقریباً می‌توان به سادگی، به تمام زبانهای متعارف و موجود برنامه‌نویسی ترجمه کرد.

این کتاب با اتخاذ یک روش کاملاً ساده و مقدماتی و با ارائه مثال و نمودارهای متعدد، خوانندگان زیادی را بخود اختصاص خواهد داد و به ویژه به عنوان راهنمایی خودآموز، کاملاً مؤثر و مفید عمل خواهد کرد.

هر فصل از کتاب با بیان روشنی از تعاریف، اصول و عبارتهای توصیفی همراه است. بدنبال این مراحل، مجموعه‌های درجه‌بندی شده از مسایل حل شده و تکمیلی می‌آیند. مسأله‌های حل شده، مطالب درسی را توضیح می‌دهند و نکات ظریفی را مطرح می‌سازند و در جهت تقویت آنها است در حالی که مسایل تکمیلی مروری کامل بر مطالب درسی این سرفصل‌ها دارند.

مایلم مراتب سپاسگزاری خود را از دوستان و همکاران بیشماری که به لحاظ ارائه پیشنهادات ارزنده‌شان و بازنگری انتقادی دست‌نوشته‌ها که وقت خود را مصروف آن نموده‌اند ابراز دارم. علاوه بر این مایلم از کارکنان نشر Mc Graw - Hill Schaum به ویژه آقای Jeffrey Mccartney به خاطر همکاری سودمندشان سپاسگزاری بنمایم.

در پایان از آقای دانلد. ا. کنات Donald. E. Knuth که متن جامع اولیه ساختمان داده‌ها را تدوین نموده‌اند و بدون شک تأثیر بسزایی در تألیف این کتاب داشته‌اند و همچنین موضوعات متعدد دیگر در این خصوص که از ناحیه ایشان صورت پذیرفته است صمیمانه تشکر می‌نمایم.

سیمور لیپ شوتز

دپارتمان کامپیوتر

دانشگاه تمپل

فهرست مندرجات

صفحه	فصل ۱ معرفی و مرور سریع مطالب کتاب
۱	۱-۱ مقدمه
۱	۱-۲ اصطلاحات اصلی و سازماندهی ابتدایی داده‌ها
۳	۱-۳ ساختمان داده‌ها
۱۲	۱-۴ عملیات بر روی ساختمان داده‌ها
۱۴	۱-۵ الگوریتم‌ها: پیچیدگی، توازن بین زمان اجرا و حافظه
۱۷	۱-۶ مسأله‌های حل شده
	فصل ۲ مفاهیم مقدماتی
۲۷	۲-۱ مقدمه
۲۸	۲-۲ نمادگذاری ریاضی و تابعهای کامپیوتری
۳۳	۲-۳ نمایش الگوریتمی
۳۶	۲-۴ دستورهای کنترلی
۴۳	۲-۵ پیچیدگی الگوریتم‌ها
۴۷	۲-۶ زیرالگوریتم‌ها
۵۰	۲-۷ متغیرها و انواع داده‌ها
۵۲	۲-۸ مسأله‌های حل شده
۶۰	۲-۹ مسأله‌های تکمیلی
	فصل ۳ پردازش رشته‌ها
۶۳	۳-۱ مقدمه

۶۴	۳-۲ اصطلاحات پایه‌ای
۶۵	۳-۳ ذخیره رشته‌ها
۷۱	۳-۴ نوع داده کاراکتری
۷۳	۳-۵ عملیات بر روی رشته‌ها
۷۶	۳-۶ پردازش رشته
۸۲	۳-۷ الگوریتم‌های تطبیق الگو
۸۹	۳-۸ مسأله‌های حل شده
۹۹	۳-۹ مسأله‌های تکمیلی

✓ فصل ۴ آرایه‌ها، رکوردها و اشاره‌گرها

۱۰۳	۴-۱ مقدمه
۱۰۴	۴-۲ آرایه‌های خطی
۱۰۷	۴-۳ نمایش آرایه‌های خطی در حافظه
۱۰۹	۴-۴ پیمایش آرایه‌های خطی
۱۱۰	۴-۵ اضافه کردن و حذف کردن عنصر
۱۱۳	۴-۶ مرتب کردن، مرتب کردن حبابی
۱۱۷	۴-۷ جستجو کردن، جستجوی خطی
۱۲۱	۴-۸ جستجوی دودویی
۱۲۵	۴-۹ آرایه‌های چند بعدی
۱۳۳	۴-۱۰ اشاره‌گرها، آرایه‌های نوع اشاره‌گر
۱۳۹	۴-۱۱ رکوردها، ساختارهای رکوردی
۱۴۲	۴-۱۲ نمایش رکوردها در حافظه، آرایه‌های موازی
۱۴۵	۴-۱۳ ماتریسها
۱۴۹	۴-۱۴ ماتریسهای خلوت
۱۵۱	۴-۱۵ مسأله‌های حل شده
۱۶۶	۴-۱۶ مسأله‌های تکمیلی

فصل ۵ لیستهای پیوندی

۱۷۳	۵-۱ مقدمه
۱۷۴	۵-۲ لیستهای پیوندی
۱۷۶	۵-۳ نمایش لیستهای پیوندی در حافظه
۱۸۱	۵-۴ پیمایش یک لیست پیوندی

۱۸۳

۵-۵ جستجو در یک لیست پیوندی

۱۸۶

۵-۶ تخصیص حافظه، جمع‌آوری حافظه بلااستفاده

۱۹۱

۵-۷ اضافه کردن گره به یک لیست پیوندی

۲۰۰

۵-۸ حذف گره از یک لیست پیوندی

۲۰۸

۵-۹ لیستهای پیوندی دارای سرلیست

۲۱۴

۵-۱۰ لیستهای دو طرفه

۲۲۰

۵-۱۱ مسأله‌های حل شده

۲۳۰

۵-۱۲ مسأله‌های تکمیلی

فصل ۶ پشته‌ها، صفها، زیربرنامه‌های بازگشتی

۲۳۹

۶-۱ مقدمه

۲۴۰

۶-۲ پشته‌ها

۲۴۳

۶-۳ نمایش پشته‌ها به کمک آرایه

۲۴۶

۶-۴ عبارتهای محاسباتی، نمادگذاری لهستانی

۲۵۲

۶-۵ QuickSort، یک کاربرد از پشته‌ها

۲۵۸

۶-۶ زیربرنامه بازگشتی

۲۶۴

۶-۷ برجهای هانوی

۲۶۸

۶-۸ پیاده‌سازی زیربرنامه‌های بازگشتی به وسیله پشته‌ها

۲۷۶

۶-۹ صفها

۲۸۲

۶-۱۰ صفهای دو سره Deque

۲۸۳

۶-۱۱ صفهای اولویت

۲۸۸

۶-۱۲ مسأله‌های حل شده

۳۰۷

۶-۱۳ مسأله‌های تکمیلی

فصل ۷ درختها

۳۱۵

۷-۱ مقدمه

۳۱۵

۷-۲ درختهای دودویی

۳۲۰

۷-۳ نمایش درختهای دودویی در حافظه

۳۲۵

۷-۴ پیمایش درختهای دودویی

۳۳۰

۷-۵ الگوریتم‌های پیمایش به کمک پشته‌ها

۳۳۸

۷-۶ سرگروه‌ها، گره‌های نخ‌کشی شده

۳۴۳

۷-۷ درختهای جستجوی دودویی

۳۴۵	۷-۸ جستجو و وارد کردن یک عنصر در درختهای جستجوی دودویی
۳۵۱	۷-۹ حذف یک عنصر از یک درخت جستجوی دودویی
۳۵۷	۷-۱۰ HeapSort , Heap
۳۶۵	۷-۱۱ طول مسیر، الگوریتم هافمن
۳۷۳	۷-۱۲ درختهای عمومی
۳۷۸	۷-۱۳ مسأله‌های حل شده
۳۹۲	۷-۱۴ مسأله‌های تکمیلی

فصل ۸ گرافها و کاربردهای آن

۴۰۳	۸-۱ مقدمه
۴۰۳	۸-۲ چند اصطلاح نظریه گراف
۴۰۸	۸-۳ نمایش ترتیبی گرافها، ماتریس مجاورت، ماتریس مسیر
۴۱۲	۸-۴ الگوریتم وارشال، کوتاهترین مسیر
۴۱۶	۸-۵ نمایش یک گراف با استفاده از لیست پیوندی
۴۲۰	۸-۶ عملیات بر روی گرافها
۴۲۷	۸-۷ پیمایش یک گراف
۴۳۲	۸-۸ مجموعه‌های جزئاً مرتب، مرتب سازی موضعی
۴۳۸	۸-۹ مسأله‌های حل شده
۴۵۱	۸-۱۰ مسأله‌های تکمیلی

فصل ۹ مرتب کردن و جستجوی اطلاعات

۴۶۱	۹-۱ مقدمه
۴۶۲	۹-۲ مرتب کردن
۴۶۷	۹-۳ مرتب کرن درجی
۴۷۰	۹-۴ مرتب کردن انتخابی
۴۷۲	۹-۵ ادغام کردن
۴۷۶	۹-۶ ادغام و مرتب کردن
۴۷۹	۹-۷ مرتب کردن مبنایی
۴۸۲	۹-۸ جستجوی اطلاعات و اصلاح داده‌ها
۴۸۳	۹-۹ درهم سازی
۴۹۱	۹-۱۰ مسأله‌های تکمیلی
۴۹۵	واژه‌نامه ریاضی و کامپیوتر

فصل ۱

معرفی و مرور سریع مطالب کتاب

۱-۱ مقدمه

این فصل موضوع ساختمان داده‌ها را معرفی می‌کند و مروری سریع بر مطالب کتاب خواهد داشت. اصطلاحات و مفاهیم اصلی، تعریف می‌شوند و مثالهایی در رابطه با آنها ارائه می‌شود. مرور کلی بر سازماندهی داده‌ها و ساختمان داده‌های معین به همراه بحث و بررسی عملیات مختلفی که بر روی این ساختمان داده‌ها صورت می‌گیرد از جمله مطالب کتاب را تشکیل می‌دهد. در پایان، مفهوم الگوریتم و پیچیدگی آن معرفی می‌شود و توازن بین زمان اجرا و حافظه را که ممکن است در انتخاب یک الگوریتم خاص و ساختمان داده مربوط به یک مسأله معین اتفاق بیفتد مورد بررسی قرار خواهیم داد.

۱-۲ اصطلاحات اصلی و سازماندهی ابتدایی داده‌ها

داده‌ها، فقط مقادیر یا مجموعه‌هایی از مقادیر هستند. یک عنصر داده‌ای، به معنی واحد منحصر بفرد از مقادیر است. عنصرهای داده‌ای که به زیرعنصرهایی تقسیم شده باشد عنصرهای چند قسمتی نامیده می‌شوند و آن دسته از عناصر که چند قسمتی نیستند عنصرهای ابتدایی نامیده می‌شوند. برای مثال، اسم یک کارمند ممکن است از سه زیر عنصر تشکیل شده باشد، اسم اول، اسم وسط و اسم آخر، اما شماره تأمین اجتماعی SSN معمولاً به صورت یک عنصر منحصر بفرد مورد توجه قرار می‌گیرد.

غالباً مجموعه داده‌ها در سلسله مراتب فیلدها، رکوردها و فایلها سازماندهی می‌شوند. برای این که مفهوم این اصطلاحات دقیقتر بیان شود، چند اصطلاح دیگر را معرفی می‌کنیم. یک موجودیت، چیزی است که دارای خصیصه‌ها یا خواص معین باشد و ممکن است مقدیری به آن نسبت داده شود. این مقادیر، ممکن است عددی یا غیر عددی باشند. برای مثال، برای موجودیتی نظیر کارمند یک سازمان معین، ممکن است خصیصه‌ها و مقادیر متناظر آنها به صورت زیر باشد:

Social Security Number	Sex	Age	Name	خصیصه‌ها :
134 - 24 - 5533	F	34	ROHLAND, GAIL	مقادیر :

موجودیت‌هایی که دارای خصیصه‌های مشابه هستند مانند تمام کارمندان یک سازمان، تشکیل یک مجموعه موجودیت را می‌دهند. هر خصیصه از یک مجموعه موجودیت دارای یک دامنه از مقادیر است، این دامنه، مجموعه تمام مقادیر ممکن است که می‌توان آنها را به خصیصه‌های خاص نسبت داد. اصطلاح اطلاعات گاهی اوقات به جای داده‌هایی با خصیصه‌های معین بکار می‌رود؛ به عبارت دیگر، به داده‌های دارای معنی یا داده‌های پردازش شده، اطلاعات می‌گویند.

روشی که در آن داده‌ها به سلسله مراتب فیلد، رکورد و فایل سازماندهی می‌شوند در رابطه بین خصیصه‌ها، موجودیت‌ها و مجموعه‌های موجودیت انعکاس پیدا می‌کند؛ یعنی، یک فیلد یک واحد ابتدایی منحصر بفرد از اطلاعات است که یک خصیصه از یک موجودیت را به نمایش می‌گذارد. یک رکورد مجموعه‌ای از مقادیر فیلدهای یک موجودیت معین است و یک فایل مجموعه‌ای از رکوردهای موجودیت در یک مجموعه از موجودیت معین است.

هر رکورد یک فایل ممکن است از چند فیلد تشکیل شود اما مقدار یک فیلد معین، می‌تواند به طور منحصر بفرد رکورد داخل فایل را مشخص کند. به یک چنین فیلدی که آن را K می‌نامیم کلید اولیه یا اصلی و به مقادیر k_1, k_2, \dots این فیلد، کلیدها یا مقادیر کلیدی می‌گویند.

مثال ۱-۱

(الف) فرض کنید یک بنگاه معاملات اتومبیل مشخصات اتومبیل‌ها را در یک فایل نگهداری می‌کند که هر رکورد آن شامل فیلدهای زیر است:

Serial Number	شماره سریال	Type	نوع	Year	سال	Price	قیمت	Accessories	لوازم همراه
فیلد شماره سریال را می‌توان به عنوان کلید اولیه فایل مورد استفاده قرار داد، زیرا هر اتومبیل شماره سریال منحصر بفرد دارد.									

(ب) فرض کنید یک سازمان مشخصات عضوهایش را در یک فایل نگهداری می‌کند که هر رکورد آن شامل فیلدهای زیر است:

Name	نام	Address	آدرس	Telephone Number	شماره تلفن	Dues Owed	دیون بدهکار
------	-----	---------	------	------------------	------------	-----------	-------------

هرچند هر رکورد چهار عنصر داده‌ای دارد، نام و آدرس ممکن است عنصرهای چند قسمتی باشند. در اینجا فیلد نام، یک کلید اولیه است. توجه دارید که فیلدهای آدرس و شماره تلفن را نمی‌توان به عنوان کلید اولیه مورد استفاده قرار داد چون برخی از اعضا ممکن است متعلق به یک خانواده باشند و در نتیجه دارای یک آدرس و یک شماره تلفن هستند.

رکوردها را می‌توان برحسب طول آنها نیز دسته‌بندی کرد. یک فایل می‌تواند دارای رکوردهایی با طول ثابت یا رکوردهایی با طول متغیر باشد. در رکوردهای با طول ثابت، تمام رکوردها دارای فیلدهای برابر و یکسان هستند و به هر فیلد مقدار حافظه مساوی اختصاص می‌یابد. در رکوردهای با طول متغیر، رکوردهای فایل ممکن است طولهای مختلف داشته باشند؛ برای مثال، رکوردهای دانشجویی معمولاً طول متغیر دارند چون دانشجویان مختلف تعداد درسهای متفاوتی را اختیار می‌کنند. معمولاً رکوردهای با طول متغیر، یک طول حداقل و یک طول حداکثر دارند.

سازماندهی داده‌ها به شکل بالا به صورت فیلد، رکورد و فایل ممکن است آنقدر پیچیده نباشد تا مجموعه‌هایی از داده‌های معین را در حافظه ذخیره کند و به صورت موثر و کارا مورد پردازش قرار دهد. به همین دلیل، داده‌ها نیز به انواع پیچیده‌تری از ساختمانها تقسیم‌بندی می‌شوند. مطالعه چنین ساختمان داده‌هایی، که موضوع اصلی این کتاب را تشکیل می‌دهد، شامل سه مرحله زیر است:

(۱) توصیف منطقی یا ریاضی ساختمان داده

(۲) پیاده‌سازی این ساختمان داده بر روی یک کامپیوتر

(۳) تجزیه و تحلیل کمی این ساختمان داده که شامل تعیین مقدار حافظه موردنیاز برای ذخیره این ساختمان و زمان موردنیاز برای پردازش آن است.

بخش بعدی، برخی از این ساختمان داده‌ها را به شما معرفی می‌کند.

توجه کنید: مرحله دوم و سوم مطالعه ساختمان داده‌ها بستگی به این دارد که آیا داده‌ها (الف) در حافظه اصلی (اولیه) کامپیوتر ذخیره می‌شوند یا (ب) در واحد حافظه ثانویه (خارجی). این کتاب اساساً حالت اول را پوشش می‌دهد؛ یعنی آدرس دادن به یک خانه حافظه و زمان موردنیاز برای دسترسی به محتوای خانه حافظه، که بستگی به یک حافظه معین یا به محتوای حافظه‌ای که قبلاً به آن دسترسی پیدا کردیم ندارد. حالت دوم، که مدیریت فایل یا مدیریت پایگاه داده‌ها نیز نامیده می‌شود، مطالب مربوط به خود را شامل می‌شود که بحث و بررسی آن از محدوده درس ساختمان داده‌ها خارج است.

۳-۱ ساختمان داده‌ها

داده‌ها می‌توانند به صورتهای متفاوتی سازماندهی شوند. مدل منطقی یا ریاضی سازماندهی داده‌ها

به یک صورت خاص، یک ساختمان داده نامیده می‌شود. انتخاب یک مدل خاص از داده‌ها بستگی به دو مسأله قابل توجه دارد. نخست این‌که، از نظر ساختمان باید به اندازه کافی غنی باشد تا بتواند رابطه‌های واقعی بین داده‌ها را در دنیای ما منعکس سازد، از سوی دیگر، این ساختمان باید به اندازه کافی ساده باشد تا بتواند به هنگام نیاز، داده‌ها را به صورت مؤثری پردازش کند. این بخش، برخی از ساختمان داده‌هایی را که دیرتر در این کتاب به طور مشروح مورد بررسی قرار می‌گیرد، به ما معرفی می‌کند.

آرایه‌ها

یک آرایه خطی (یا یک بعدی) ساده‌ترین نوع ساختمان داده‌ها است. منظور از یک آرایه خطی، یک لیست متناهی با n عنصر داده‌ای مشابه است که به عناصر آن به ترتیب به کمک مجموعه‌ای از n عدد متوالی که معمولاً 1، 2، 3، ... n می‌باشد دسترسی پیدا می‌کنیم. اگر ما برای نام آرایه، A را اختیار کنیم، آنگاه عنصرهای آرایه A را با نماد اندیس‌گذاری شده

$$a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$$

یا نماد پرانتزی

$$A(1), A(2), A(3), \dots, A(N)$$

یا با نماد کروشه‌ای

$$A[1], A[2], A[3], \dots, A[N]$$

نمایش می‌دهیم.

صرف‌نظر از نوع نمادگذاری، عدد K در $A[K]$ یک اندیس و $A[K]$ یک متغیر اندیس‌دار نامیده می‌شود. توجه کنید: نماد پرانتزی و نماد کروشه‌ای غالباً هنگامی مورد استفاده قرار می‌گیرند که نام آرایه بیش از یک حرف داشته باشد یا نام آرایه در یک الگوریتم بکار گرفته شود. هنگام استفاده از این نمادگذاری، معمولاً برای نام آرایه و اندیس آرایه همانگونه که در بالا بیان شده است از حروف بزرگ A و N استفاده می‌کنیم. در غیر اینصورت، می‌توانیم از نمادگذاری متداول اندیسی کج برای نام و اندیسهایش و از حروف کوچک، به صورتی که در بالا با a و n بیان شده است برای اندیسها استفاده کنیم. از نمادگذاری اول اغلب در کتب چاپی ریاضی استفاده می‌شود حال آنکه در اکثر کتب کامپیوتری، نمادگذاری دوم دیده می‌شود.

مثال ۱-۲

آرایه خطی STUDENT از نام شش دانشجو، به صورتی که در شکل ۱-۱ نشان داده، تشکیل شده

است. در اینجا [1]STUDENT، John Brown و [2]STUDENT، Sandra Gold و غیره را نمایش می‌دهد.

STUDENT	
1	John Brown
2	Sandra Gold
3	Tom Jones
4	June Kelly
5	Mary Reed
6	Alan Smith

شکل ۱-۱

آرایه‌های خطی، آرایه‌های یک بعدی نیز نامیده می‌شوند زیرا به هر عنصر چنین آرایه‌ای تنها می‌توان از طریق یک اندیس مراجعه کرد. یک آرایهٔ دوبعدی، یک مجموعه از عناصر داده‌ای مشابه است که به هر عنصر آن از طریق دو اندیس مراجعه می‌کنیم. به آرایهٔ دوبعدی در ریاضیات ماتریس و در امور تجاری جدول می‌گویند. آرایه‌های چند بعدی به‌طور مشابه تعریف می‌شوند. بحث و بررسی مشروح آرایه‌ها در فصل ۴ کتاب گنجانده شده است.

مثال ۱-۳

یک فروشگاه زنجیره‌ای از ۲۸ فروشگاه تشکیل شده است که هر فروشگاه ۴ بخش دارد و می‌توان فروش هفتگی آن را (برحسب نزدیکترین عدد به دلار) مانند شکل ۱-۲ ارائه داد:

Dept. Store	1	2	3	4
1	2872	805	3211	1560
2	2196	1223	2525	1744
3	3257	1017	3686	1951
...
28	2618	931	2333	982

شکل ۱-۲

این نوع داده‌ها را می‌توان با استفاده از یک آرایه دو بعدی در کامپیوتر ذخیره کرد که در آن اندیس اول شماره فروشگاه و اندیس دوم شماره بخش را نشان می‌دهد. اگر SALES نامی باشد که به این آرایه داده‌ایم، آنگاه

$$\text{SALES}[1, 1] = 2872, \quad \text{SALES}[1, 2] = 805, \quad \text{SALES}[1, 3] = 3211, \dots, \quad \text{SALES}[28, 4] = 982$$

اندازه این آرایه به صورت 28×4 (بخوانید ۲۸ در ۴) نمایش داده می‌شود زیرا این آرایه ۲۸ سطر (شماره‌های خطوط افقی) و ۴ ستون (شماره‌های خطوط عمودی) دارد.

لیستهای پیوندی

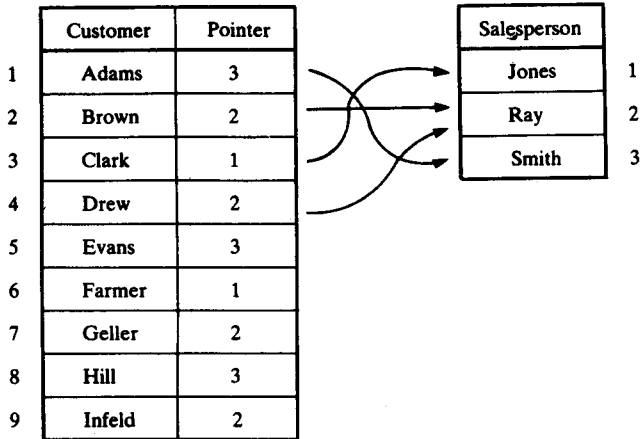
به کمک یک مثال لیستهای پیوندی را معرفی می‌کنیم. فرض کنید یک شرکت حق‌العمل کار، مشخصات مشتری‌های خود را در یک فایل نگهداری می‌کند که هر رکورد آن شامل نام مشتری Customer و فروشنده Salesperson است و فرض کنید این فایل شامل داده‌هایی است که در شکل ۱-۳ نشان داده شده است :

	Customer	Salesperson
1	Adams	Smith
2	Brown	Ray
3	Clark	Jones
4	Drew	Ray
5	Evans	Smith
6	Farmer	Jones
7	Geller	Ray
8	Hill	Smith
9	Infeld	Ray

شکل ۱-۳

واضح است که این فایل می‌توانست به وسیله چنین جدولی یعنی به وسیله یک جدول دو ستونه با نه نام در کامپیوتر ذخیره شود. با وجود این، همانگونه که بحث زیر نشان می‌دهد، این روش نمی‌تواند مفیدترین راه برای ذخیره داده‌ها باشد.

روش دیگر برای ذخیره داده‌های شکل ۱-۳، آن است که یک آرایه مستقل برای فروشنده‌ها و یک مدخل موسوم به اشاره‌گر در فایل مشتری داشته باشیم که به مکان فروشنده هر مشتری اشاره می‌کند. این روش ذخیره داده‌ها در شکل ۱-۴ نشان داده شده است که در آن تنها تعدادی از اشاره‌گرها به وسیله



شکل ۱-۴

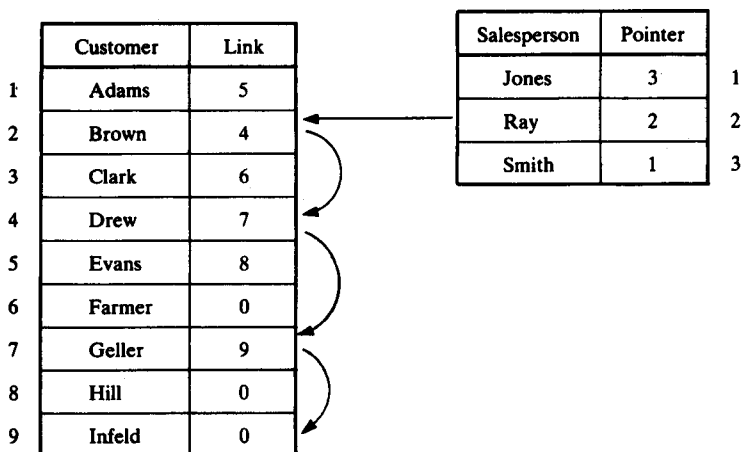
اما در کامپیوتر عملاً از یک عدد صحیح استفاده می‌شود. چون یک اشاره‌گر، نسبت به یک اسم به حافظه کمتری نیاز دارد. از این‌رو، این نحوه نمایش باعث صرفه‌جویی در حافظه می‌شود به‌ویژه این‌که اگر هر فروشنده چند صد مشتری داشته باشد، اهمیت صرفه‌جویی در حافظه بیشتر نمایان می‌شود. فرض کنید این شرکت بخواهد لیست تمام مشتریان یک فروشنده معین را به دست آورد. با استفاده از داده‌های نشان داده‌شده در شکل ۱-۴، شرکت مجبور است در میان فایل تمام مشتری‌ها، فروشنده موردنظر را جستجو کند. یک راه ساده برای چنین جستجویی، داشتن پیکانهایی نظیر شکل ۱-۴ است که به اطلاعات دیگر اشاره می‌کند. اکنون هر فروشنده یک مجموعه از اشاره‌گر دارد که به مکان مشتری‌های وی اشاره می‌کند. شکل ۱-۵ را ببینید.

	Salesperson	Pointer
1	Jones	3, 6
2	Ray	2, 4, 7, 9
3	Smith	1, 5, 8

شکل ۱-۵

عیب اصلی این نمایش آن است که هر فروشنده ممکن است چند اشاره‌گر داشته باشد و با اضافه و حذف شدن مشتریها، مجموعه اشاره‌گرها تغییر خواهند کرد.

یکی از راههای بسیار متداول ذخیره داده‌های شکل ۳-۱، در شکل ۶-۱ نشان داده شده است. در اینجا هر فروشنده یک اشاره‌گر دارد که به مشتری اول اشاره می‌کند که اشاره‌گر آن نیز به نوبه خود به مشتری دوم اشاره می‌کند و الی آخر، که در آن فروشنده مشتری آخر با یک 0 مشخص شده است. این اشاره‌گرها برای فروشنده‌ای به نام Ray به وسیله پیکانهایی، در شکل ۶-۱ نشان داده شده است. استفاده از این نمایش به سادگی می‌توان لیست تمام مشتریهای یک فروشنده معین را به دست آورد. همانگونه که در فصل ۵ خواهید دید به سادگی می‌توان عمل اضافه کردن و حذف مشتریها را انجام داد.



شکل ۶-۱

نمایش داده‌های شکل ۶-۱ یک مثال از لیستهای پیوندی است. اگرچه معمولاً اصطلاحات "اشاره‌گر" و "پیوند" به یک معنی بکار می‌روند. اما سعی می‌کنیم از اصطلاح "اشاره‌گر" در مواردی استفاده کنیم که یک عنصر از یک لیست به یک عنصر در لیست دیگر اشاره می‌کند و اصطلاح "پیوند" را برای مواردی نگه می‌داریم که یک عنصر از یک لیست به عنصر دیگری از همان لیست اشاره می‌کند.

درختها

داده‌ها اغلب شامل رابطه سلسله مراتبی بین عناصر مختلف هستند. ساختمان داده‌ای که این رابطه را

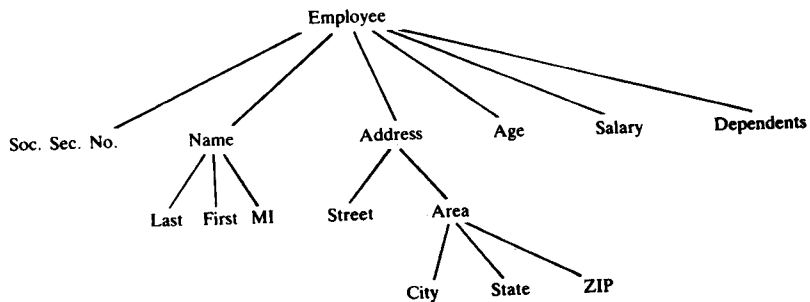
منعکس می‌کند یک گراف درختی ریشه‌دار یا فقط یک درخت نامیده می‌شود. درختها در فصل ۷ تعریف شده و به‌طور مفصل مورد بحث و بررسی قرار می‌گیرند. در اینجا ما با ارائه دو مثال تنها برخی از خواص اصلی آنها را بیان می‌کنیم.

مثال ۴-۱: ساختمان رکورد

هرچند یک فایل را می‌توان به وسیله یک یا چند آرایه یا رکورد نگهداری کرد که هر یک از آنها، می‌توانند هم فیلدهای چند قسمتی و هم فیلدهای ابتدایی باشند. اما می‌توان آن را به وسیله یک ساختمان درختی به شکل بهتری بیان کرد. برای مثال، رکورد پرسنلی یک کارمند می‌تواند شامل فیلدهای زیر باشد:

Social Security Number, Name, Address, Age, Salary, Dependents

با وجود این، نام Name ممکن است یک فیلد چند قسمتی با فیلدهای کوچک نام Name، نام آخر، Last نام اول First و نام وسط MI باشد. علاوه بر این، آدرس Address ممکن است یک فیلد چند قسمتی با فیلدهای کوچک آدرس خیابان Street و آدرس منطقه Area باشد که در آن منطقه Area خود می‌تواند یک فیلد چند قسمتی با فیلدهای کوچک شهر، City، ایالت State و شماره کد پستی ZIP باشد. این ساختمان سلسله مراتبی در شکل ۷-۱ (الف) به تصویر درآمده است.



شکل ۷-۱ (الف)

روش دیگر به نمایش گذاشتن یک ساختمان درختی از این نوع، برحسب سطوح آن در شکل ۷-۱ (ب) نشان داده شده است.

```

01 Employee
  02 Social Security Number
  02 Name
    03 Last
    03 First
    03 Middle Initial
  02 Address
    03 Street
    03 Area
      04 City
      04 State
      04 ZIP
  02 Age
  02 Salary
  02 Dependents
    
```

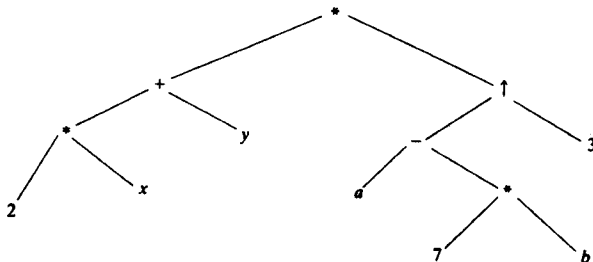
شکل ۷-۱ (ب)

مثال ۵-۱: عبارتهای جبری

عبارت جبری زیر را در نظر بگیرید:

$$(2x+y)(a-7b)^3$$

با استفاده از پیکان به طرف بالای \uparrow برای توان و ستاره $*$ برای ضرب، می‌توانیم این عبارت را به صورت درخت شکل ۸-۱ نمایش دهیم.

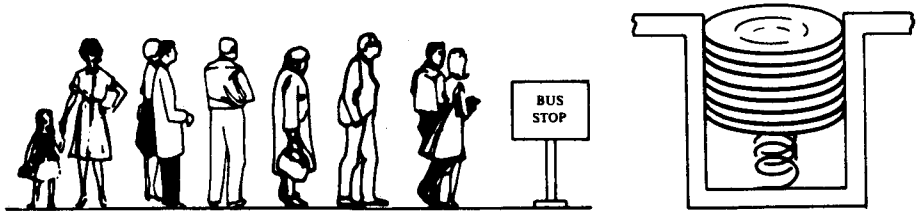


شکل ۸-۱

ملاحظه می‌کنید که ترتیب اجرای عملیات در این نمودار نیز، انعکاس یافته است، عمل توان‌رساندن باید بعد از انجام عمل تفریق عبارت داخل پرانتز اجرا شود و عمل ضرب نشان داده شده در بالای درخت باید آخر اجرا شود.

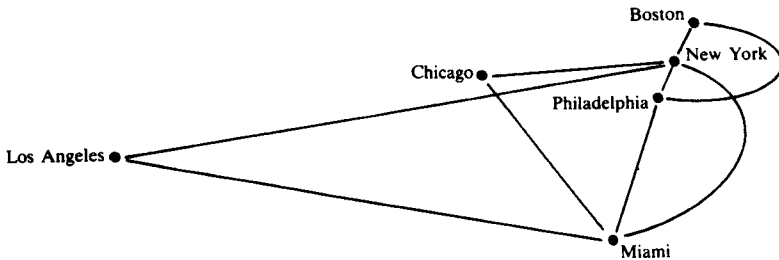
به غیر از آرایه‌ها، لیستهای پیوندی و درختها، ساختمان داده‌های دیگری وجود دارند که ما برخی از این ساختمانها را که به اختصار در زیر شرح داده‌ایم دیرتر بطور مشروح مورد مطالعه قرار خواهند گرفت. (الف) پشته Stack: یک پشته که به آن یک سیستم LIFO یا آخرین ورودی اولین خروجی است، نیز

می‌گویند، یک لیست خطی است که در آن عملیات اضافه‌شدن عناصر تنها از یک انتهای آن موسوم به بالای پشته Top صورت می‌گیرد. این ساختمان، عملیاتی مشابه یک پشته از بشقابها بر روی یک سیستم فتری دارد که در شکل ۹-۱ (الف) نشان داده شده است. توجه دارید که بشقابهای جدید را می‌توان تنها از بالای پشته به آن اضافه کرد و عمل حذف یا برداشتن بشقابها تنها از بالای پشته امکان‌پذیر است.



(ب) صف انتظار اتوبوس

(الف) یک پشته از بشقابها



(ج) خطوط هواپیمایی

شکل ۹-۱

(ب) صف Queue: یک صف، که به آن یک سیستم FIFO یا اولین ورودی اولین خروجی است، نیز می‌گویند، یک لیست خطی است که در آن عملیات حذف عناصر تنها از یک انتهای لیست موسوم به ابتدا Front لیست و اضافه‌شدن عناصر به صف تنها از انتهای دیگر لیست، موسوم به انتها Rear لیست صورت می‌گیرد. این ساختمان داده به همان صورتی عمل می‌کند که ما در صف انتظار یک ایستگاه اتوبوس عمل می‌کنیم. این وضعیت در شکل ۹-۱ (ب) به تصویر درآمده است: اولین نفر داخل صف اولین کسی است که سوار اتوبوس می‌شود. یک مثال دیگر از صف، مربوط به اتومبیل‌هایی است که در یک چهارراه در انتظار عبور به سر می‌برند، به محض سبزشدن چراغ راهنمایی، اولین اتومبیل داخل

صف اولین اتومبیلی است که از چهارراه عبور می‌کند.

(ج) گراف: گاهی اوقات داده‌ها یک رابطه بین جفت عناصر موجود در طبیعت را بیان می‌کنند که لزوماً به صورت سلسله مراتبی نیستند. برای مثال، خطوط هواپیمایی شکل ۹-۱ (ج) را در نظر بگیرید که ارتباط بین شهرها تنها با رسم خطوط نشان داده شده است. ساختمان داده‌ای که این نوع رابطه را بیان می‌کند یک گراف نام دارد. گرافها به صورت رسمی در فصل ۸ تعریف شده، مورد مطالعه و بررسی کامل قرار می‌گیرند.

توجه کنید: برای عناصر یک ساختمان داده از اسم‌های مختلف و گوناگونی استفاده می‌شود. برخی از اسم‌های متداول عبارتند از: عنصر داده‌ای، فیلد، مجموعه‌ای از فیلدها، رکورد، گره و شیئی داده‌ای. اسم خاصی که مورد استفاده قرار می‌گیرد، بستگی به نوع ساختمان داده‌ای دارد که در یک متن یا یک مبحث، از آن ساختمان داده استفاده می‌شود و برنامه‌نویسان از آن اسم استفاده می‌کنند. ما برای این منظور اصطلاح "عنصر داده‌ای" را ترجیح می‌دهیم اما هنگام بحث و بررسی فایلها از اصطلاح رکورد و هنگام مطالعه لیستهای پیوندی، و همچنین درختها و گرافها از اصطلاح گره استفاده می‌کنیم.

۴-۱ عملیات بر روی ساختمان داده‌ها

داده‌هایی که در ساختمان داده‌ها ظاهر می‌شوند به وسیله عملیات مشخصی پردازش می‌شوند. درواقع، ساختمان داده خاصی که برنامه‌نویس برای یک مسئله معین انتخاب می‌کند بستگی زیاد به میزان عملیات خاصی دارد که در آن مسئله انجام می‌شود. در این بخش دانشجو با برخی از این عملیات که زیاد مورد استفاده قرار می‌گیرد، آشنا می‌شود.

در این کتاب چهار عمل زیر نقش اصلی را ایفا می‌کنند:

(۱) پیمایش: دسترسی به اطلاعات یک رکورد آن هم دقیقاً یکبار، پیمایش نامیده می‌شود، طوری که بتوان بعضی از فیلدهای رکورد را مورد پردازش قرار داد. گاهی اوقات به دسترسی و پردازش رکورد ملاقات نیز گفته می‌شود.

(۲) جستجو: به عمل یافتن مکان یک رکورد با یک مقدار کلیدی معین یا پیدا کردن مکان تمام رکوردهایی که در یک یا چند شرط صدق می‌کنند، جستجو می‌گویند.

(۳) اضافه کردن: افزودن رکورد جدید به ساختمان داده است.

(۴) حذف کردن: حذف یک رکورد از ساختمان داده است.

گاهی اوقات ممکن است از دو یا چند عمل در یک کار مشخص استفاده شود. مثلاً چنانچه بخواهیم یک رکورد با کلید معلوم را حذف کنیم لازم است نخست مکان آن رکورد را جستجو (پیدا) کنیم.

- دو عمل زیر نیز در وضعیت‌های خاص مورد استفاده قرار می‌گیرند که در زیر آنها را از نظر می‌گذرانیم:
- (۱) مرتب‌کردن: عبارت است از قراردادن رکوردها با یک نظم معین در کنار هم. مثلاً با یک نظم الفبایی براساس یک کلید نام NAME یا با یک نظم عددی برطبق یک کلید عددی NUMBER مانند شماره تأمین اجتماعی یا شماره حساب بانکی.
- (۲) ادغام‌کردن: ترکیب رکوردهای دو فایل مرتب‌شده مختلف و قراردادن آنها در یک فایل مرتب‌شده ادغام‌کردن نام دارد.
- عملیات دیگری مانند کپی‌کردن و اتصال اطلاعات دیرتر در این کتاب بررسی می‌شود.

مثال ۱-۶

یک سازمان، یک فایل برای اعضایش دارد که در آن فایل، هر رکورد یک عضو معین، دارای فیلدهای زیر است:

Name.	Address,	Telephone Number,	Age,	Sex
-------	----------	-------------------	------	-----

(الف) فرض کنید این سازمان بخواهد یک گردهم‌آیی برای اعضایش ترتیب دهد. در آن صورت لازم است که عمل پیمایش در فایل انجام شود تا نام و آدرس هر عضو به دست آید.

(ب) فرض کنید این سازمان بخواهد نام تمام عضوهای را که در یک منطقه معین زندگی می‌کنند به دست آورد. برای این حالت نیز لازم است عمل پیمایش در فایل انجام شود تا اطلاعات موردنیاز به دست آید.

(ج) فرض کنید این سازمان بخواهد آدرس یک نام Name معین را به دست آورد. در آن صورت لازم است عمل جستجو در این فایل انجام شود تا رکورد مربوط به این نام Name به دست آید.

(د) فرض کنید شخص جدیدی به این سازمان پیوسته است. در آن صورت لازم است رکورد وی به فایل اضافه شود.

(ه) فرض کنید یک عضو این سازمان در گذشته است. در آن صورت لازم است رکورد وی از این فایل حذف شود.

(و) فرض کنید یک عضو محل زندگی‌اش را تغییر داده است و دارای آدرس و شماره تلفن جدید است. با معلوم بودن نام این عضو، نخست لازم است رکورد او را در فایل جستجو کنیم. آنگاه لازم است عمل "تازه شدن" یا Update انجام شود یعنی بعضی از فیلدهای رکورد او را با توجه به مشخصات تازه او تغییر دهیم.

(ز) فرض کنید این سازمان بخواهد تعداد اعضای خود را که ۶۵ سال یا بیشتر سن دارند به دست آورد.

برای این حالت نیز لازم است عمل پیمایش در فایل انجام شود و تعداد این عضوها شمرده شوند.

۵-۱ الگوریتم‌ها: پیچیدگی الگوریتم، توازن بین زمان اجرا و حافظه

یک الگوریتم، یک لیست خوش تعریف از مراحل است که برای حل یک مسئله معین در نظر گرفته می‌شود. یکی از اهداف اصلی این کتاب ارائه الگوریتم‌های کارا و مؤثر برای پردازش داده‌ها است. از زمان و حافظه به عنوان دو معیار اصلی در کارایی یک الگوریتم استفاده می‌شود. پیچیدگی یک الگوریتم، تابعی است که زمان اجرا و/یا حافظه را برحسب تعداد داده‌های ورودی به دست می‌دهد. مفهوم پیچیدگی یک الگوریتم در فصل ۲ بررسی می‌شود.

هر یک از الگوریتم‌های این کتاب حاوی ساختمان داده خاصی است. براین اساس همیشه نمی‌توانیم از کاراترین الگوریتم استفاده کنیم چون انتخاب ساختمان داده به عوامل زیادی از قبیل، نوع داده‌ها و تعداد دفعاتی که با آن، عملیات داده‌ای متعدد انجام می‌شود بستگی دارد. گاهی اوقات در انتخاب ساختمان داده‌ها مسئله توازن (سبک و سنگینی) بین زمان اجرا و حافظه مورد توجه قرار می‌گیرد به این معنی که: جهت ذخیره داده‌ها، با افزایش مقدار حافظه، می‌توان زمان لازم برای پردازش داده‌ها را کاهش داد و برعکس. این ایده‌ها را با دو مثال روشن می‌کنیم.

الگوریتم‌های جستجو

فایل اعضای سازمان مثال ۶-۱ را در نظر بگیرید که در آن هر رکورد به همراه چند فیلد دیگر، دارای دو فیلد نام Name و شماره تلفن Telephone Number است. فرض کنید که نام یک عضو داده شده است و بخواهیم شماره تلفن او را پیدا کنیم. یک راه برای این منظور جستجوی خطی در فایل است یعنی از الگوریتم زیر استفاده کنیم.

جستجوی خطی: در هر یک از رکوردهای فایل نام داده شده را جستجو کنید به محض پیدا شدن رکوردی با نام داده شده و در نتیجه با شماره تلفن متناظر با آن، به عمل جستجو خاتمه دهید.

قبل از هر کاری، واضح است که زمان مورد نیاز اجرای این الگوریتم متناسب با تعداد مقایسه‌ها است. همچنین فرض کنید هر نام Name درون فایل، احتمال مساوی برای انتخاب شدن داشته باشند. به طور شهودی واضح است که میانگین تعداد مقایسه‌ها برای یک فایل با n رکورد برابر $n/2$ است یعنی پیچیدگی الگوریتم جستجوی خطی به صورت $C(n) = n/2$ است.

چنانچه بخواهیم عمل جستجو را در میان لیستی شامل چند هزار نام، مانند دفترچه تلفن انجام دهیم استفاده از الگوریتم بالا عملاً غیرممکن است. با وجود این، اگر نامها به صورت الفبایی مرتب باشند

مانند دفترچه‌های تلفن، در آن صورت می‌توانیم از یک الگوریتم کارا به نام جستجوی دودویی استفاده کنیم. این الگوریتم به تفصیل در فصل ۴ شرح داده شده است ولی ایده کلی آن به اختصار در زیر شرح داده می‌شود.

جستجوی دودویی: نام داده شده را با نام وسط لیست مقایسه کنید. انجام این کار به ما می‌گوید که نام داده شده در کدام نیمه از لیست است. آنگاه نام داده شده را با نام وسط نیمه راست مقایسه کنید تا معلوم شود این نام در کدام ربع از لیست وجود دارد. عمل جستجو را تا پیدا شدن نام موردنظر در لیست ادامه دهید.

می‌توان نشان داد که پیچیدگی الگوریتم جستجوی دودویی از رابطه

$$C(n) = \log_2 n$$

به دست می‌آید. برای مثال، برای پیدا کردن یک نام Name داده شده در یک لیست با 25000 نام، به بیش از 15 مقایسه نیاز نداریم.

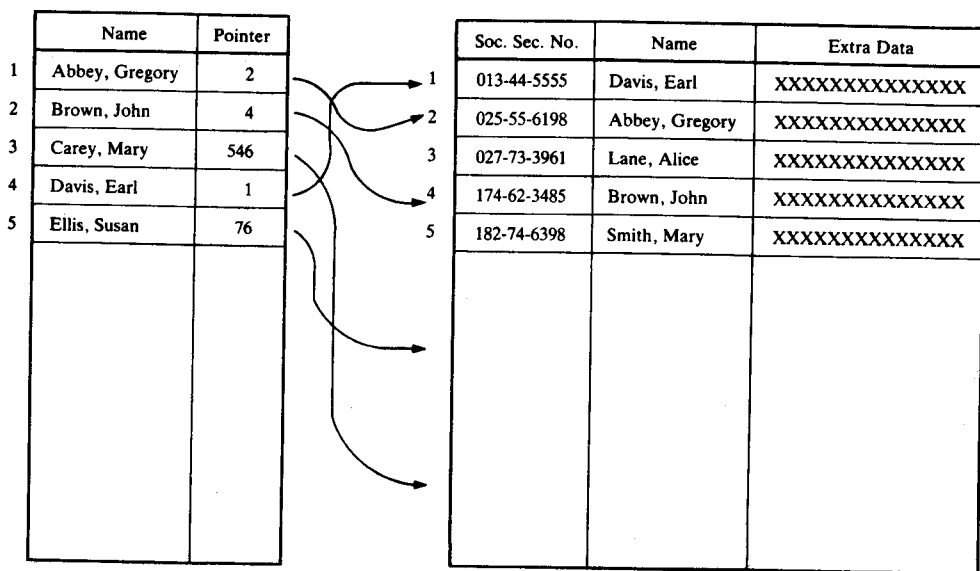
اگرچه الگوریتم جستجوی دودویی الگوریتم بسیار کارآیی است اما یک عیب اساسی دارد. به خصوص این که، این الگوریتم فرض می‌کند به نام وسط لیست یا لیستهای کوچک شده بعدی دسترسی مستقیم داریم به این معنی که لیست باید در نوعی از آرایه ذخیره شده باشد. متأسفانه، اضافه کردن یک عنصر در یک آرایه مستلزم آن است عناصر آرایه یک خانه به طرف پائین لیست انتقال داده شوند و حذف یک عنصر از یک آرایه نیز مستلزم انتقال عناصر آرایه یک خانه به طرف بالای لیست است.

شرکت تلفن، با چاپ یک دفترچه تلفن جدید در هر سال مسأله بالا را حل می‌کند و این درحالی است که شماره تلفن مشتریان جدید را به طور جداگانه در یک فایل موقت نگه می‌دارد یعنی شرکت تلفن هر ساله فایل مشترکینش را به روز درمی‌آورد. از طرف دیگر، یک بانک، می‌تواند مشخصات مشتری جدید را تقریباً به طور لحظه‌ای در فایل مربوطه اضافه کند. بنابراین، برای یک بانک یک لیست مرتب‌شده خطی بهترین ساختمان داده نیست.

یک مثال از توازن بین زمان اجرا و حافظه مصرفی

فرض کنید یک فایل از رکوردهایی شامل فیلدهای نام، شماره تأمین اجتماعی و چند فیلد اضافی دیگر تشکیل شده است. مرتب کردن این فایل به صورت الفبایی با استفاده از یک جستجوی دودویی راه بسیار کارآیی در پیدا کردن یک رکورد با نام معین است. از طرف دیگر فرض کنید تنها شماره تأمین اجتماعی یک شخص داده شده است. در آن صورت مجبوریم برای این رکورد یک جستجوی دودویی انجام دهیم که این روش، برای فایلی با تعداد رکوردهای بسیار زیاد زمان اجرا را به میزان قابل توجهی بالا

می‌برد. برای حل اینگونه مسایل چه روشی می‌توان درپیش گرفت؟ یک راه آن است که فایل دیگری داشته باشیم که آن فایل براساس شماره تأمین اجتماعی به صورت عددی مرتب شده باشد. باوجود این، این روش حافظه موردنیاز برای مرتب‌کردن داده‌ها را به دو برابر افزایش می‌دهد. راه دیگر که در شکل ۱۰-۱ نشان داده شده است، آن است که فایل اصلی را به صورت مرتب‌شده عددی براساس شماره تأمین اجتماعی و یک آرایه کمکی تنها با دو ستون دراختیار داشته باشیم، که در این آرایه، ستون اول شامل نام‌ها با ترتیب الفبایی و ستون دوم شامل اشاره‌گرهایی باشد که این اشاره‌گرها به مکان رکوردهای متناظر آن در فایل اصلی اشاره کنند. این روش یکی از راه‌های این مسأله است که اغلب مورد استفاده قرار می‌گیرد، زیرا حافظه اضافی که تنها شامل دو ستون است برای مقدار اطلاعات اضافی تدارک دیده شده، حداقل حافظه می‌باشد.



شکل ۱۰-۱

آرایه کمکی که به صورت الفبایی
مرتب شده است.

فایل اصلی
که براساس شماره تأمین اجتماعی
Soc. Sec. No مرتب شده است.

توجه کنید: فرض کنید یک فایل به صورت الفبایی براساس شماره تأمین اجتماعی مرتب شده است.

به محض اضافه شدن یک رکورد جدید در این فایل، رکوردها باید پیوسته به مکان جدید خود انتقال پیدا کنند تا ترتیب مرتب شده رکوردها حفظ شود. یک راه ساده برای به حداقل رساندن مقدار جابجایی رکوردها آن است که از شماره تأمین اجتماعی به عنوان آدرس هر رکورد استفاده کنیم. با این کار به هنگام اضافه شدن یک رکورد، نه تنها هیچ گونه جابجایی صورت نمی گیرد بلکه در هر لحظه می توان به هر رکوردی دسترسی پیدا کرد. بنابراین برای تنها چند صد یا احتمالاً چند هزار رکورد، این روش مرتب کردن اطلاعات به یک میلیارد (10^9) خانه حافظه احتیاج دارد واضح است که این مقدار حافظه در مقابل زمان اجرا مقرون به صرفه و اقتصادی! نیست. یک روش دیگر برای این منظور، تعریف یک تابع H از مجموعه مقادیر کلید K یعنی، شماره تأمین اجتماعی به مجموعه L از آدرس خانه های حافظه است. به یک چنین تابع H ای، تابع درهم ساز Hashing می گویند. تابعهای درهم ساز و خواص آن مطالب فصل ۹ این کتاب را تشکیل می دهد.

مسأله های حل شده

اصطلاحات اصلی

مسأله ۱-۱: یک استاد دانشگاه لیست دانشجویان یک کلاس را که شامل اطلاعات زیر است نگهداری می کند:

Name, Major, Student Number, Test Scores, Final Grade

(الف) موجودیتها، خصیصه ها و مجموعه موجودیت لیست را تعیین کنید.

(ب) مقادیر فیلدها، رکوردها و فایل ها را شرح دهید.

(ج) برای این لیست چه خصیصه هایی را می توان به عنوان کلیدهای اولیه مورد استفاده قرار داد؟

حل: (الف) هر دانشجو یک موجودیت است و مجموعه دانشجویان مجموعه موجودیت است. ویژگی های دانشجویان از قبیل نام دانشجو، رشته او و غیره خصیصه آنها هستند.

(ب) مقادیر فیلد، مقادیری هستند که به خصیصه ها نسبت داده می شوند یعنی نامهای واقعی، نمرات امتحانات و غیره. مقادیر فیلد هر دانشجو یک رکورد را تشکیل می دهد و مجموعه ای از تمام رکوردهای دانشجویان فایل دانشجویی آنها است.

(ج) نام Name یا شماره دانشجویی Student Number را می توان به عنوان کلید اولیه مورد استفاده قرار داد، چون هر یک از این فیلدها رکورد دانشجویی را به طور منحصر بفرد مشخص می کنند. معمولاً استاد دانشگاه نام Name را به عنوان کلید اولیه به کار می برد. درحالی که اداره ثبت نام دانشگاه ممکن است از

شماره دانشجویی Student Number به عنوان کلید اولیه استفاده کند.

مسئله ۲-۱: یک بیمارستان مشخصات بیماران را در یک فایل نگهداری می‌کند که در آن هر رکورد شامل فیلدهای زیر است:

Admission Date, Social Security Number, Room, Bed Number, Doctor

(الف) چه فیلدی را می‌توان به عنوان کلید اولیه مورد استفاده قرار داد؟

(ب) کدام جفت فیلد را می‌توان به عنوان کلید اولیه مورد استفاده قرار داد؟

(ج) کدامیک از فیلدها چندقسمتی هستند؟

حل: (الف) نام Name و شماره تأمین اجتماعی Social Security Number را می‌توان به عنوان کلید اولیه مورد استفاده قرار داد. فرض کرده‌ایم هیچ دو بیماری همنام نیستند.

(ب) اتاق Room و شماره تخت Bed Number با هم به طور منحصر بفرد یک بیمار را مشخص می‌کنند.

(ج) نام Name، تاریخ پذیرش Admission Date و دکتر Doctor فیلدهای چندقسمتی هستند.

مسئله ۳-۱: کدامیک از فیلدهای داده‌ای زیر هنگامی که به عنوان فیلد در رکورد گنجانده شوند می‌توانند منتهی به رکوردهایی با طول متغیر شوند: (الف) سن age (ب) جنس sex (ج) نام همسر (د) نام بچه‌ها (ه) میزان تحصیلات education (و) کارمندان سابق.

حل: چون (د) و (و) می‌توانند فیلدهای چندقسمتی با تعداد کم یا تعداد زیادی زیرفیلد باشند از این رو می‌توانند منتهی به رکوردهایی با طول متغیر شوند. علاوه بر این (ه) می‌تواند چند فیلدی باشد مگر آنکه، فقط بالاترین سطح تحصیلات موردنظر باشد.

مسئله ۴-۱: سیستم‌های پایگاه اطلاعات تنها به اختصار در این کتاب مطرح شده است. چرا؟

حل: چون سیستم‌های پایگاه اطلاعات بخشی از علم کامپیوتر است که به داده‌های ذخیره شده در حافظه ثانویه کامپیوتر مربوط می‌شود. پیاده‌سازی و تجزیه و تحلیل ساختمان داده‌های حافظه ثانویه بسیار متفاوت با ساختمان داده‌های حافظه اصلی کامپیوتر هستند. این کتاب اساساً ساختمان داده‌های حافظه اصلی را مورد بررسی قرار می‌دهد نه حافظه فرعی یا ثانویه را.

ساختمان داده‌ها و عملیات بر روی آنها

مسئله ۵-۱: هر یک از اصطلاحات زیر را به اختصار شرح دهید. (الف) پیمایش (ب) مرتب کردن و (ج) جستجو کردن.

حل: (الف) دقیقاً به یکبار دسترسی و پردازش اطلاعات هر رکورد پیمایش می‌گویند.

(ب) قرار دادن داده‌ها با یک نظم و ترتیب خاص در کنار هم مرتب کردن نام دارد.

(ج) یافتن مکان رکورد با کلید یا کلیدهای معین جستجو کردن نام دارد.

مسئله ۶-۱: هر یک از اصطلاحات زیر را به اختصار شرح دهید. (الف) اضافه کردن رکورد (ب) حذف رکورد.

حل: (الف) افزودن یک رکورد جدید به یک ساختمان داده، که در آن معمولاً نظم قبلی حفظ می شود.

(ب) حذف یک رکورد خاص از ساختمان داده، حذف رکورد نام دارد.

مسئله ۷-۱: آرایه خطی NAME در شکل ۱۱-۱ را در نظر بگیرید که به ترتیب الفبایی مرتب است.

NAME	
1	Adams
2	Clark
3	Evans
4	Gupta
5	Jones
6	Lane
7	Pace
8	Smith

شکل ۱۱-۱

(الف) NAME[2] ، NAME[4] ، NAME[7] را پیدا کنید.

(ب) هرگاه بخواهیم Davis را به این آرایه اضافه کنیم، چه تعداد نام بایستی به مکانهای جدید انتقال یابد؟

(ج) هرگاه بخواهیم Gupta را از این آرایه حذف کنیم، چه تعداد نام بایستی به مکانهای جدید انتقال یابد؟

حل: (الف) در اینجا K ، NAME[K] ، K امین نام در لیست است. از این رو

$$\text{NAME}[2] = \text{Clark}, \quad \text{NAME}[4] = \text{Gupta}, \quad \text{NAME}[7] = \text{Pace}$$

(ب) از آنجا که Davis در NAME[3] جایگزین خواهد شد، نامهای Evans تا Smith باید جابجا شوند. از این رو شش نام باید به مکان جدید انتقال یابد.

(ج) نامهای Jones تا Smith باید به بالای آرایه انتقال یابد. از این رو چهار نام باید جابجا شود.

مسئله ۸-۱: آرایه خطی NAME در شکل ۱۲-۱ را در نظر بگیرید.

FIRST		NAME	LINK
5	1	Rogers	7
	2	Clark	8
	3		
	4	Hansen	10
	5	Brooks	2
	6	Pitt	1
	7	Walker	0
	8	Fisher	4
	10	Leary	6

شکل ۱۲-۱

مقادیر **FIRST** و **LINK[K]** در شکل، یک ترتیب خطی از نامها را به صورت زیر مشخص می‌کنند. **FIRST** به مکان اولین نام درون لیست اشاره می‌کند و **LINK[K]** به مکان نام بعدی **NAME[K]** اشاره می‌کند که در آن 0 علامت پایان لیست است. ترتیب خطی نامها را مشخص کنید.

حل: ترتیب موردنظر به صورت زیر به دست می‌آید:

FIRST = 5، از این رو اولین نام درون لیست **NAME[5]** یا **Brooks** است.

LINK[5] = 2، از این رو نام بعدی **NAME[2]** یا **Clark** است.

LINK[2] = 8، از این رو نام بعدی **NAME[8]** یا **Fisher** است.

LINK[8] = 4، از این رو نام بعدی **NAME[4]** یا **Hansen** است.

LINK[4] = 10، از این رو نام بعدی **NAME[10]** یا **Leary** است.

LINK[10] = 6، از این رو نام بعدی **NAME[6]** یا **Pitt** است.

LINK[6] = 1، از این رو نام بعدی **NAME[1]** یا **Rogers** است.

LINK[1] = 7، از این رو نام بعدی **NAME[7]** یا **Walker** است.

LINK[7] = 0، که نشان‌دهنده پایان لیست است.

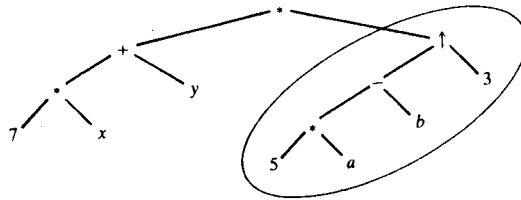
بنابراین، ترتیب خطی نامها عبارت است از:

Brooks , Clark , Fisher , Hansen , Leary , Pitt, Rogers , Walker

توجه دارید که این همان ترتیب الفبایی نامها است.

مسئله ۹-۱: عبارت جبری $(7x+y)(5a-b)^3$ را در نظر بگیرید. (الف) نمودار درختی متناظر با آن را مانند مثال ۵ رسم کنید. (ب) دامنه تغییرات نماد توان رسانی را مشخص کنید. (دامنه تغییرات گره v در یک درخت، زیردرختی است که شامل v و گره‌های بعد از v است).

حل: (الف) با استفاده از پیکان به طرف بالای \uparrow برای توان و ستاره $*$ به جای ضرب، درخت شکل ۱-۱۳ به دست می‌آید.



شکل ۱-۱۳

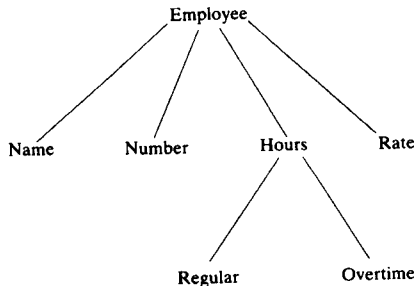
(ب) دامنه تغییرات نماد توان \uparrow در نمودار، زیردرختی است که با بیضی مشخص شده است و متناظر با عبارت $(5a-b)^3$ است.

مسئله ۱۰-۱: اطلاعات زیر مربوط به یک ساختمان درختی است که به وسیله شماره‌های سطح آن، به صورتی که در مثال ۴ توصیف شده است مشخص شده است.

01 Employee 02 Name 02 Number 02 Hours 03 Regular 03 Overtime 02 Rate

نمودار درختی متناظر با آن را رسم کنید.

حل: نمودار درختی آن در شکل ۱-۱۴ نشان داده شده است.



شکل ۱-۱۴

در اینجا هر گره ۷، عنصر بعدی گره‌ای است که قبل از ۷ قرار دارد و شماره سطح آن پائین‌تر از ۷ است. مسئله ۱۱-۱: مطلوب است بحث و بررسی این مطلب که از پشته یا صف، کدامیک ساختاری مناسب برای تعیین ترتیبی است که در آن، عناصر در هر یک از وضعیتهای زیر پردازش می‌شوند.

(الف) برنامه‌های کامپیوتری دسته‌ای Batch که به مرکز محاسبات ارائه می‌شود.

(ب) برنامه A زیربرنامه B را فرا می‌خواند که B به نوبه خود، زیربرنامه C را فرا می‌خواند و الی آخر.

(ج) کارمندان، قراردادی را به امضا می‌رسانند که در آن، روش خاص سیستم ارشدیت برای استخدام یا اخراج منظور می‌شود.

حل: (الف) صف، صرفنظر از حالت‌های اولویت داده شده، برنامه‌هایی که اول از همه می‌آیند در اولین مرحله سرویس می‌گیرند.

(ب) پشته. آخرین زیربرنامه، اول اجرا می‌شود و نتیجه آن به برنامه‌ای داده می‌شود که قبل از برنامه آخر است که بعد از آن اجرا می‌شود و الی آخر، تا این که اولین برنامه فراخواننده اجرا شود.

(ج) پشته. در یک سیستم ارشدیت، آخرین عضو استخدامی اولین فرد قابل اخراج محسوب می‌شود.

مسئله ۱۲-۱: پروازهای روزانه یک شرکت هواپیمایی در شکل ۱۵-۱ نشان داده شده است. CITY

لیست شهرها و ORIG[K] و DEST[K] به ترتیب شهرهای مبدأ و مقصد پرواز شماره NUMBER[K]

را نمایش می‌دهد. گراف جهت‌دار متناظر با این اطلاعات را رسم کنید. (این گراف جهت‌دار است چون

شماره‌های پرواز، پرواز از یک شهر به شهر دیگر را بدون برگشت نشان می‌دهد.)

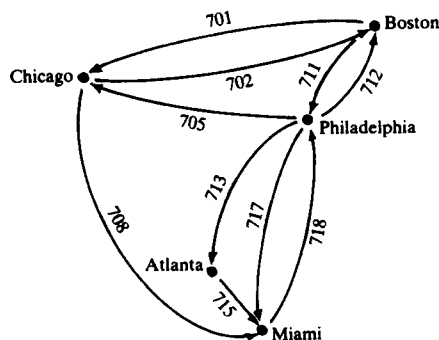
	NUMBER	ORIG	DEST
1	701	2	3
2	702	3	2
3	705	5	3
4	708	3	4
5	711	2	5
6	712	5	2
7	713	5	1
8	715	1	4
9	717	5	4
10	718	4	5

(ب)

	CITY
1	Atlanta
2	Boston
3	Chicago
4	Miami
5	Philadelphia

(الف)

حل: گره‌های این گراف از پنج شهر تشکیل شده است. اگر پروازی از شهر A به B وجود داشته باشد یک پیکان از شهر A به شهر B رسم کنید و پیکان را با شماره پرواز، شماره گذاری کنید. گراف جهت دار این مسأله در شکل ۱۶-۱ رسم شده است.



شکل ۱۶-۱

پیچیدگی و توازن بین زمان اجرا و حافظه

مسأله ۱۳-۱: هر یک از مفاهیم زیر را به اختصار شرح دهید.

(الف) پیچیدگی یک الگوریتم (ب) توازن بین زمان اجرا و حافظه الگوریتم.

حل: (الف) پیچیدگی یک الگوریتم تابعی به صورت $f(n)$ است که مدت زمان اجرا و/یا مقدار حافظه استفاده شده توسط یک الگوریتم را برحسب تعداد داده‌های ورودی n اندازه می‌گیرد.

(ب) توازن بین زمان اجرا و حافظه به انتخابی در میان جوابهای الگوریتمی یک مسأله پردازش داده‌ها مربوط می‌شود که اجازه می‌دهد زمان اجرای یک جواب الگوریتمی را با افزایش خانه‌های حافظه که داده‌ها را ذخیره می‌کند کاهش دهیم و برعکس.

مسأله ۱۴-۱: فرض کنید S یک مجموعه n عنصری از داده‌ها باشد.

(الف) T_1 زمان اجرای الگوریتم جستجوی خطی را با T_2 زمان اجرای الگوریتم جستجوی دودویی مقایسه کنید هرگاه (i) $n = 1000$ و (ii) $n = 10000$.

(ب) فرض کنید S به صورت یک لیست پیوندی ذخیره شده است. جستجوی یک عنصر مشخص در S را مورد بررسی قرار دهید.

حل: از بخش ۵-۱ یادآور می‌شویم که زمان اجرای انتظاری الگوریتم جستجوی خطی برابر $f(n) = n/2$

و از آن الگوریتم جستجوی دودویی برابر $f(n) = \log_2^n$ است. در نتیجه (i) به ازای $n = 1000$ ، $T_1 = 500$ ولی $T_2 = \log_2 1000 \approx 10$ و (ii) به ازای $n = 10000$ ، $T_1 = 5000$ ولی $T_2 = \log_2 10000 \approx 14$ است.

(ب) الگوریتم جستجوی دودویی فرض می‌کند مستقیماً می‌توان به عنصر وسط مجموعه S دسترسی پیدا کرد اما در یک لیست پیوندی نمی‌توان مستقیماً به عنصر وسط دسترسی پیدا کرد. از این رو وقتی S به صورت یک لیست پیوندی ذخیره می‌شود بهتر است از الگوریتم جستجوی خطی استفاده شود.

مسئله ۱۵-۱: داده‌های شکل ۱۵-۱ را در نظر بگیرید که اطلاعاتی راجع به پروازهای مختلف یک خط هواپیمایی به دست می‌دهد. راههای مختلف ذخیره داده‌ها که زمان اجرا را در حالت‌های زیر پائین می‌آورد مورد بررسی قرار دهید:

(الف) با معلوم بودن شماره پرواز، مبدأ و مقصد را پیدا کند.

(ب) با معلوم بودن دو شهر A و B، تعیین کنید که آیا پرواز از A به B وجود دارد یا خیر و در صورت مثبت بودن جواب، شماره پرواز آن را پیدا کنید.

حل: (الف) داده‌های شکل ۱۵-۱ (ب) را در آرایه‌های ORIG و DEST ذخیره کنید که در آن همانند شکل ۱۷-۱ (الف) اندیس آرایه، شماره پرواز است.

(ب) داده‌های شکل ۱۵-۱ (ب) را در آرایه دو بعدی FLIGHT ذخیره کنید که در آن FLIGHT[J,K] شامل شماره پرواز از شهر CITY[J] به شهر CITY[K] است یا هرگاه هیچ پروازی صورت نگیرد شامل 0 است، که این وضعیت در شکل ۱۷-۱ (ب) نشان داده شده است.

FLIGHT	1	2	3	4	5
1	0	0	0	715	0
2	0	0	701	0	711
3	0	702	0	708	0
4	0	0	0	0	718
5	713	712	705	717	0

	ORIG	DEST
701	2	3
702	3	2
703	0	0
704	0	0
705	5	3
706	0	0
...
715	1	4
716	0	0
717	5	4
718	4	5

(ب)

شکل ۱۷-۱

(الف)

مسأله ۱۶-۱: فرض کنید یک شرکت هواپیمایی به n شهر S پرواز عرضه می‌کند. معایب نمایش داده‌ها را به صورتی که در شکل ۱۷-۱ (الف) و شکل ۱۷-۱ (ب) آمده است شرح دهید.

حل: (الف) فرض کنید شماره‌های پرواز با فاصله خیلی زیاد از آدرس صفر، در حافظه ذخیره شده است یعنی فرض کنید نسبت شماره‌های پرواز S به شماره خانه‌های حافظه عدد بسیار کوچکی مثلاً تقریباً 0.05 باشد. در آن صورت است که گرفتن فضای حافظه اضافی ممکن است مقرون به صرفه نباشد.

(ب) فرض کنید نسبت شماره پروازهای S به شماره خانه‌های حافظه n در آرایه FLIGHT عدد بسیار کوچکی است یعنی آرایه FLIGHT به گونه‌ای است که شامل تعداد بسیار زیادی صفر است. (به این گونه آرایه‌ها ماتریس خلوت یا $T_{\text{تک}}$ می‌گویند). در آن صورت است که گرفتن فضای حافظه اضافی ممکن است مقرون به صرفه نباشد.

فصل ۲

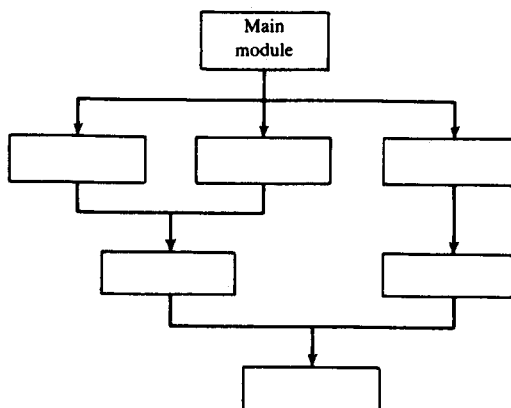
مفاهیم مقدماتی

۲-۱ مقدمه

به دست آوردن الگوریتم‌هایی برای ایجاد و پردازش ساختمان داده‌ها، ویژگی اصلی این کتاب را تشکیل می‌دهد. در این فصل با مثالهای ساده، فرمتهایی را توضیح می‌دهیم که به کمک آنها به ارائه الگوریتم‌ها می‌پردازیم. فرمتی که ما برای ارائه الگوریتم‌ها انتخاب کرده‌ایم مشابه فرمتی است که دانیل کناث D.Knuth از آنها در کتاب معروفش، الگوریتم‌های بنیادی استفاده کرده است. اگرچه فرمت مورد استفاده ما مستقل از زبان برنامه‌نویسی است اما به اندازه کافی ساختیافته بوده، جزئیات آن بیان شده است و به سادگی می‌توان آنها را به یکی از زبان‌های برنامه‌نویسی نظیر PASCAL، C، FORTRAN یا BASIC ترجمه کرد. شایان ذکر است که برخی از الگوریتم‌های کتاب، در بخش مسایل به این زبانها نوشته شده است.

الگوریتم‌ها تا حدودی پیچیده هستند. درک پیاده‌سازی الگوریتم‌های پیچیده به صورت برنامه‌های کامپیوتری، زمانی با سادگی زیاد امکان‌پذیر است که بتوان این برنامه‌ها را به چند قطعه برنامه آن هم به صورت سلسله مراتبی، مشابه آنچه که در شکل ۲-۱ نشان داده شده است سازماندهی کرد.

در یک چنین سازماندهی‌ای، در اول هر برنامه قطعه برنامه اصلی قرار دارد که الگوریتم را به صورت کلی شرح می‌دهد. قطعه برنامه اصلی چند زیربرنامه را احضار می‌کند که در آنها جزئیات بیشتری راجع



شکل ۱-۲ سلسله مراتب قطعه برنامه‌ها

به کار برنامه اصلی گنجانده شده است. هر زیربرنامه ممکن است به زیربرنامه‌های دیگری که دارای جزئیات بیشتری هستند رجوع کنند و الی آخر. سازماندهی یک برنامه به صورت چنین سلسله مراتبی از قطعه برنامه‌ها، معمولاً مستلزم استفاده از فلوچارت‌های مختلف و دستورهای منطقی است که عموماً در هر زبان برنامه‌نویسی ساختیافته وجود دارد. در این فصل چند فلوچارت و دستورهای منطقی از نظر گذرانده می‌شود.

فصل حاضر با شرح مختصری از چند تابع ریاضی شروع می‌شود که در مطالعه الگوریتم‌ها و به طور کلی در علوم کامپیوتر با آن‌ها مواجه می‌شوید و با بحث روی انواع مختلف متغیرهایی که می‌توانند در الگوریتم‌ها و برنامه‌ها ظاهر شوند به پایان می‌رسد.

مفهوم پیچیدگی یک الگوریتم نیز در این فصل گنجانده شده است. این معیار بسیار مهم در الگوریتم‌ها، ابزاری را در اختیار دانشجو قرار می‌دهد تا بتواند جوابهای مختلف الگوریتمی مسأله خاص نظیر جستجو یا مرتب‌کردن اطلاعات را با هم مقایسه کند. مفهوم یک الگوریتم و پیچیدگی آن نه تنها در درس ساختمان داده‌ها، بلکه تقریباً در تمام شاخه‌های علوم کامپیوتر از اهمیت اساسی و بنیادی برخوردار است.

۲-۲ نمادگذاری ریاضی و تابعهای کامپیوتری

در این بخش چند تابع ریاضی معرفی می‌شود که به همراه نمادشان بکرات در تجزیه و تحلیل

الگوریتم‌ها و به طور کلی در علم کامپیوتر ظاهر می‌شوند.

تابعهای کف و سقف

فرض کنید x یک عدد اعشاری باشد. در این صورت x بین دو عدد صحیح قرار دارد که کف و سقف x نامیده می‌شوند. به خصوص این که:

$\lfloor x \rfloor$ که کف x نامیده می‌شود، بزرگترین عدد صحیحی را نشان می‌دهد که بزرگتر از x نباشد.
 $\lceil x \rceil$ که سقف x نامیده می‌شود کوچکترین عدد صحیحی را نشان می‌دهد که کوچکتر از x نباشد.
 اگر x یک عدد صحیح باشد، آنگاه $\lfloor x \rfloor = \lceil x \rceil = x$ در غیر اینصورت $\lfloor x \rfloor + 1 = \lceil x \rceil$.

مثال ۲-۱

$$\begin{array}{llll} \lfloor 3.14 \rfloor = 3, & \lfloor \sqrt{5} \rfloor = 2, & \lfloor -8.5 \rfloor = -9, & \lfloor 7 \rfloor = 7 \\ \lceil 3.14 \rceil = 4, & \lceil \sqrt{5} \rceil = 3, & \lceil -8.5 \rceil = -8, & \lceil 7 \rceil = 7 \end{array}$$

تابع باقیمانده، حساب باقیمانده

فرض کنید K یک عدد صحیح دلخواه و M یک عدد صحیح مثبت باشد. آنگاه

$$k \pmod{M}$$

(بخوانید باقیمانده k بر M) هنگام تقسیم k بر M برای نمایش باقیمانده صحیح به کار می‌رود. به بیان دقیق‌تر، $K \pmod{M}$ برابر عدد صحیح منحصر بفرد r است طوری که

$$K = Mq + r \quad \text{که در آن} \quad 0 \leq r < M$$

هرگاه K مثبت باشد تنها با تقسیم K بر M باقیمانده r به دست می‌آید. بنابراین:

$$25 \pmod{7} = 4, \quad 25 \pmod{5} = 0, \quad 35 \pmod{11} = 2, \quad 3 \pmod{8} = 3$$

در حالتی که k منفی باشد مسأله ۲ (ب) روشی را برای تعیین $K \pmod{M}$ نشان می‌دهد. از اصطلاح \pmod در رابطه ریاضی همنهشتی نیز استفاده می‌شود که به صورت زیر نمایش داده شده، تعریف می‌شود:

$$a \equiv b \pmod{M} \quad \text{اگر و فقط اگر} \quad M \text{ یک عامل } b - a \text{ باشد.}$$

در اینجا M سنج یا هنگ نامیده می‌شود و $a \equiv b \pmod{M}$ به صورت " a همنهشت است با b به سنج M " خوانده می‌شود. ویژگی‌های زیر از رابطه همنهشتی اغلب مفید هستند:

$$a \pm M \equiv a \pmod{M} \quad \text{و} \quad 0 \equiv M \pmod{M}$$

منظور از حساب با باقیمانده M عملیات حسابی جمع، ضرب و تفریق است که در آن مقدار حسابی، جایگزین مقدار معادل آن در مجموعه

$$\{0, 1, 2, \dots, M-1\}$$

یا در مجموعه

$$\{0, 1, 2, \dots, M\}$$

می‌شود. برای مثال در حساب با باقیمانده 12 که گاهی اوقات حساب "ساعتی" نیز نامیده می‌شود داریم:

$$6 + 9 \equiv 3, \quad 7 \times 5 \equiv 11, \quad 1 - 5 \equiv 8, \quad 2 + 10 \equiv 0 \equiv 12$$

(استفاده از 0 یا M بستگی به کاربرد آن در محاسبه دارد.)

تابعهای مقدار صحیح و قدر مطلق

فرض کنید x یک عدد اعشاری دلخواه باشد. مقدار صحیح x که به صورت $\text{INT}(x)$ نوشته می‌شود

عدد اعشاری x را با حذف (قطع) قسمت کسری آن به یک عدد صحیح تبدیل می‌کند. بنابراین

$$\text{INT}(3.14) = 3, \quad \text{INT}(\sqrt{5}) = 2, \quad \text{INT}(-8.5) = -8, \quad \text{INT}(7) = 7$$

ملاحظه می‌کنید بسته به اینکه x مثبت یا منفی باشد $\text{INT}(x) = \lfloor x \rfloor$ یا $\text{INT}(x) = \lceil x \rceil$.

قدر مطلق عدد اعشاری x که به صورت $\text{ABS}(x)$ یا $|x|$ نوشته می‌شود بنا به تعریف برابر x یا $-x$ است.

از این رو $\text{ABS}(0) = 0$ و به ازای $x \neq 0$ ، $\text{ABS}(x) = x$ یا $\text{ABS}(x) = -x$ ، بسته به این که x مثبت یا

منفی باشد. بنابراین

$$|-15| = 15, \quad |7| = 7, \quad |-3.33| = 3.33, \quad |4.44| = 4.44, \quad |-0.075| = 0.075$$

توجه دارید که $|x| = |-x|$ و به ازای $x \neq 0$ ، $|x|$ مثبت است.

نماد جمع؛ مجموعه‌ها

در اینجا نماد جمع Σ را معرفی می‌کنیم که علامت حرف یونانی سیگما است. دنباله a_1, a_2, a_3, \dots

را در نظر بگیرید. آنگاه مجموع

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n \quad \text{و} \quad a_m + a_{m+1} + \dots + a_n$$

به ترتیب به صورت زیر نمایش داده می‌شود:

$$\sum_{j=m}^n a_j \quad \text{و} \quad \sum_{j=1}^n a_j$$

حرف j در بسطهای بالا، اندیس ظاهری یا متغیر ظاهری نامیده می‌شود. از حروف دیگری نظیر i, k, s

و t نیز به عنوان متغیرهای ظاهری زیاد استفاده می‌شود.

مثال ۲-۲

$$\sum_{i=1}^n a_i b_i = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n$$

$$\sum_{j=2}^5 j^2 = 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 = 4 + 9 + 16 + 25 = 54$$

$$\sum_{j=1}^n j = 1 + 2 + \dots + n$$

اغلب اوقات، آخرین جمع مثال ۲ در کاربردها ظاهر می شود. مقدار آن برابر $n(n+1)/2$ است. به عبارت دیگر:

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

به این ترتیب برای مثال:

$$1 + 2 + \dots + 50 = \frac{50(51)}{2} = 1275$$

تابع فاکتوریل

ضرب اعداد صحیح مثبت از ۱ تا n و خود n را با $n!$ نمایش داده، آن را n فاکتوریل می خوانند، به بیان دیگر:

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (n-2)(n-1)n$$

بنابه قرارداد $0! = 1$ تعریف می شود.

مثال ۳-۲

(الف)

$$2! = 1 \cdot 2 = 2; \quad 3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6; \quad 4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$$

(ب) به ازای $n > 1$ ، داریم $n! = n \cdot (n-1)!$. از این رو

$$5! = 5 \cdot 4! = 5 \cdot 24 = 120; \quad 6! = 6 \cdot 5! = 6 \cdot 120 = 720$$

جایگشتها

یک جایگشت، یک مجموعه n عنصری از عناصر است که در آن، عناصر با یک نظم خاص مرتب شده باشند. برای مثال، جایگشتهای یک مجموعه با عنصرهای a, b, c به صورت زیر است:

$$abc, \quad acb, \quad bac, \quad bca, \quad cab, \quad cba$$

می توان ثابت کرد که: یک مجموعه n عنصری $n!$ جایگشت دارد. بنابراین یک مجموعه ۴ عنصری $24 = 4!$ جایگشت و یک مجموعه ۵ عنصری $120 = 5!$ جایگشت دارد و الی آخر.

توان رسانی و لگاریتم گیری

یادآوری می کنیم که تعریف های زیر برای توانهای صحیح a (که در آن m عدد صحیح مثبت است) همواره صادق است:

$$a^0 = 1, \quad a^{-m} = \frac{1}{a^m}, \quad a^m = \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_m \text{ (بار } m)$$

عمل توان رسانی تا جایی که شامل تمام اعداد گویا می شود قابل تعمیم است. بنابه تعریف برای هر عدد گویای m/n داریم:

$$a^{m/n} = \sqrt[n]{a^m} = (\sqrt[n]{a})^m$$

مثلاً

$$2^4 = 16, \quad 2^{-4} = \frac{1}{2^4} = \frac{1}{16}, \quad 125^{2/3} = 5^2 = 25$$

درحقیقت، عمل توان رسانی تا جایی که شامل تمام اعداد حقیقی می‌شود نیز قابل تعمیم است. بنابه تعریف برای هر عدد حقیقی x ،

$$a^x = \lim_{r \rightarrow x} a^r \quad \text{که در آن } r \text{ یک عدد گویا است}$$

برطبق آن، به‌ازای تمام اعداد حقیقی، تابع نمایی $a^x = f(x)$ تعریف می‌شود. لگاریتم با توان به صورت زیر در ارتباط است. فرض کنید b یک عدد صحیح مثبت باشد. لگاریتم عدد مثبت و دلخواه x در مبنای b که به صورت زیر نوشته می‌شود.

$$\log_b x$$

برابر توانی است که b بایستی به آن توان برسد تا x بدست آید، به بیان دیگر

$$b^y = x \quad \text{و} \quad y = \log_b x$$

دو رابطه معادل هستند. بنابراین

$$10^2 = 100 \quad \text{چون} \quad \log_{10} 100 = 2; \quad 2^3 = 8 \quad \text{چون} \quad \log_2 8 = 3$$

$$10^{-3} = 0.001 \quad \text{چون} \quad \log_{10} 0.001 = -3; \quad 2^6 = 64 \quad \text{چون} \quad \log_2 64 = 6$$

علاوه بر این برای هر مبنای دلخواه b :

$$b^0 = 1 \quad \text{چون} \quad \log_b 1 = 0$$

$$b^1 = b \quad \text{چون} \quad \log_b b = 1$$

لگاریتم اعداد منفی و لگاریتم صفر تعریف نشده است.

می‌توان تابعهای نمایی و لگاریتمی

$$g(x) = \log_b x \quad \text{و} \quad f(x) = b^x$$

را به عنوان توابع معکوس یکدیگر، مورد توجه قرار داد. به‌موجب آن، نمودارهای این دو تابع، معکوس یکدیگر هستند. مسأله ۱۵-۲ را ببینید.

اغلب مقدار لگاریتم اعداد به صورت مقادیر تقریبی بیان می‌شوند. برای مثال با استفاده از جدول لگاریتمی، ماشین حساب یا کامپیوتر

$$\log_e 40 = 3.6889 \quad \text{و} \quad \lg_{10} 300 = 2.4771$$

را به عنوان جوابهای تقریبی به‌دست می‌آوریم. در اینجا $e = 2.71828...$ لگاریتم‌هایی که در کار ما از اهمیت زیادی برخوردارند عبارتند از: لگاریتم در مبنای ۱۰ که لگاریتم معمولی نام دارد، لگاریتم در مبنای e که لگاریتم طبیعی نام دارد و لگاریتم در مبنای ۲ که لگاریتم دودویی نام دارد.

در بعضی از کتابها به جای $\log_e x$ می نویسند $\ln x$ و به جای $\log_2 x$ می نویسند $\lg x$ یا $\log x$. این کتاب که دربارهٔ درس ساختمان داده‌هاست اساساً با لگاریتم‌های دودویی اعداد و عبارتها سر و کار دارد.

بنابراین منظور ما از اصطلاح $\log x$ در این کتاب $\log_2 x$ است مگر آن که خلاف آن بیان شود. اغلب ما فقط به مقادیر کف و سقف لگاریتم دودویی نیازمندیم. با ملاحظهٔ توانهای 2، می‌توانیم به این مقادیر دست یابیم. برای مثال:

$$\begin{array}{llll} 2^7 = 128 & 2^6 = 64 & \text{چون} & [\log_2 100] = 6 \\ 2^9 = 1024 & 2^8 = 512 & \text{چون} & [\log_2 1000] = 9 \end{array}$$

و الی آخر.

۳-۲ نمایش الگوریتمی

به بیان شهودی، یک الگوریتم یک لیست متناهی و مرحله به مرحله از دستورات خوش تعریف است که برای حل یک مسأله خاص در نظر گرفته می‌شود. تعریف رسمی الگوریتم که از مفهوم ماشین تیورینگ بهره می‌گیرد بسیار پیچیده و در محدودهٔ مطالب این درس قرار ندارد. این بخش فرمتی را توضیح می‌دهد که برای نمایش الگوریتم‌ها در سراسر کتاب از آن استفاده می‌شود بهتر دیدیم این نمایش الگوریتمی را با ارائه چند مثال توضیح دهیم.

مثال ۴-۲

آرایهٔ DATA با مقادیر عددی در حافظه ذخیره شده است. می‌خواهیم LOC مکان و MAX مقدار بزرگترین عنصر آرایهٔ DATA را پیدا کنیم. دربارهٔ DATA هیچ اطلاع دیگری نداریم. یک راه برای حل این مسأله به قرار زیر است:

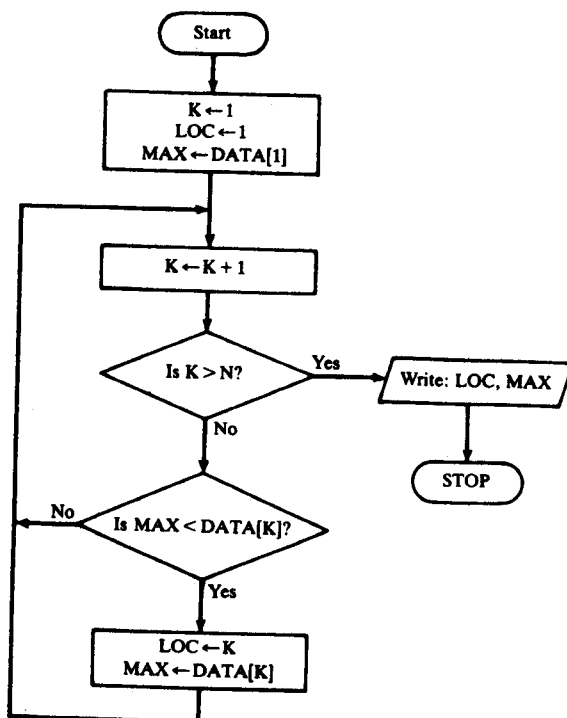
در آغاز، کار را با $LOC = 1$ و $MAX = DATA[1]$ شروع می‌کنیم. آنگاه MAX را با هر یک از عناصر بعدی DATA یعنی با $DATA[K]$ مقایسه می‌کنیم. اگر $DATA[K]$ بزرگتر از MAX باشد آنگاه LOC و MAX را تازه می‌کنیم طوری که $LOC = K$ و $MAX = DATA[K]$ شود. آخرین مقداری که در LOC و MAX قرار می‌گیرد مکان و مقدار بزرگترین عنصر DATA است.

نمایش رسمی این الگوریتم به صورت زیر است. فلوچارت آن در شکل ۲-۲ رسم شده است.

Algorithm 2.1: (Largest Element in Array) A nonempty array DATA with N numerical values is given. This algorithm finds the location LOC and the value MAX of the largest element of DATA. The variable K is used as a counter.

- Step 1. [Initialize.] Set $K := 1$, $LOC := 1$ and $MAX := DATA[1]$.
 Step 2. [Increment counter.] Set $K := K + 1$.
 Step 3. [Test counter.] If $K > N$, then:
 Write: LOC, MAX, and Exit.
 Step 4. [Compare and update.] If $MAX < DATA[K]$, then:
 Set $LOC := K$ and $MAX := DATA[K]$.
 Step 5. [Repeat loop.] Go to Step 2.

فُرمت بالا برای نمایش رسمی یک الگوریتم از دو قسمت تشکیل شده است. در قسمت اول، متنی قرار دارد که اطلاعاتی راجع به هدف الگوریتم به دست می‌دهد و متغیرهایی را که در الگوریتم از آنها استفاده می‌شود معرفی می‌کند و لیست داده‌های ورودی را ارائه می‌دهد. قسمت دوم این الگوریتم شامل لیست مرحله‌هایی است که بایستی به ترتیب اجرا شوند.



در زیر چند قرارداد را که ما در ارائه الگوریتم‌ها از آن استفاده می‌کنیم به صورت خلاصه شده، می‌آوریم. برخی از دستورهای کنترلی در بخش بعد به کار می‌آیند.

شماره شناسایی

به هر الگوریتم به صورت زیر یک شماره شناسایی نسبت داده شده است: که منظور از الگوریتم 3-4 الگوریتم سوم از فصل ۴ و منظور از الگوریتم P 5-3 الگوریتم مسأله ۳-۵ از فصل ۵ است. توجه دارید که حرف P مبین آن است که این الگوریتم در یک مسأله Problem عنوان شده است.

مرحله‌ها، کنترل، خروج از الگوریتم Exit

مراحل یک الگوریتم یکی پس از دیگری اجرا می‌شوند. این مراحل با مرحله 1 شروع می‌شود، مگر آن که خلاف آن گفته شود. دستور "برو به n، یا، Go To n" کنترل کار را به دستور مرحله n از الگوریتم منتقل می‌کند. مثلاً در الگوریتم 1-2 مرحله 5، کنترل اجرا را به مرحله 2 منتقل می‌کند. به بیان کلی‌تر، دستورهای GO To با بکارگیری تعدادی از دستورهای کنترلی که در بخش بعد مطرح می‌شوند عملاً و در ظاهر حذف می‌شوند. اگر در یک مرحله، از چند دستور استفاده شود نظیر

MAX:=DATA[1] و LOC:=1، Set K:=1

آنگاه این دستورها از چپ به راست اجرا می‌شوند.

الگوریتم زمانی به پایان می‌رسد که دستور خروج از الگوریتم

Exit

مشاهده شود به عبارت دیگر دستور Exit به معنی پایان الگوریتم است. این دستور مشابه دستور STOP در FORTRAN و فلوجارت‌ها است.

توضیحات Comments

هر مرحله ممکن است شامل یک توضیح در داخل کروشه باشد که هدف اصلی آن مرحله را بیان می‌کند. توضیح، معمولاً در آغاز یا پایان یک مرحله داده می‌شود.

اسامی متغیرها

در نام متغیرها نظیر MAX و DATA از حروف بزرگ استفاده می‌کنیم. از متغیرهای تک حرفی که در الگوریتم با حروف بزرگ نوشته شده‌اند مانند K و N، به عنوان شمارنده یا اندیس استفاده می‌کنیم حتی

اگر برای این متغیرها در تجزیه و تحلیل‌ها یا عبارات ریاضی از حروف کوچک نظیر k و n استفاده شود. برای یادآوری، به بحث مربوط به نمادهایی با حروف کج یا حروف کوچک بخش ۳-۱ از فصل ۱، تحت عنوان آرایه‌ها مراجعه کنید.

دستورهای جایگزینی

برای دستورهای جایگزینی همانگونه که در زبان PASCAL رایج است از نماد کولن و تساوی = استفاده می‌شود. برای مثال :

Max := DATA[1]

مقدار DATA[1] را در متغیر MAX جایگزین می‌کند. بعضی از کتابها برای عمل جایگزینی از نماد پیکان به چپ ← یا علامت تساوی = استفاده می‌کنند.

ورودی و خروجی

داده‌ها به کمک دستور Read به صورت زیر از ورودی دریافت شده، در متغیرها جایگزین می‌شوند :

نام چند متغیر : Read

به‌طور مشابه، پیغامهایی که در داخل علامت نقل قول یا کوتیشن قرار دارند به همراه داده‌های داخل

متغیرها، به کمک دستور Write یا Print به صورت زیر در خروجی چاپ می‌شوند :

نام چند متغیر یا / و یا پیغام : Write

زیربرنامه

اصطلاح "زیربرنامه" برای قطعه الگوریتم مستقلی به کار می‌رود که بخشی از یک مسأله را حل می‌کند. استفاده از واژه "زیربرنامه" یا "قطعه برنامه" به جای "الگوریتم" برای یک مسأله داده شده، تنها یک موضوع سلیقه‌ای است. به بیان کلی‌تر، واژه الگوریتم برای حل یک مسأله با نگرش کلی به کار می‌رود اما اصطلاح "زیربرنامه" برای توصیف و حل یک بخش از الگوریتم یا زیرالگوریتم مورد استفاده قرار می‌گیرد که در بخش ۶-۲ به تفصیل مورد بحث و بررسی قرار خواهد گرفت.

۴-۲ دستورهای کنترلی

الگوریتم‌ها و برنامه‌های کامپیوتری معادل آنها زمانی بهتر و ساده‌تر درک می‌شوند که در آنها اساساً

از چند زیربرنامه و سه نوع منطق یا جریان کنترلی به شرح زیر استفاده شود :

(۱) منطق توالی یا جریان متوالی اجرای دستورات

(۲) منطق انتخاب یا دستورات شرطی

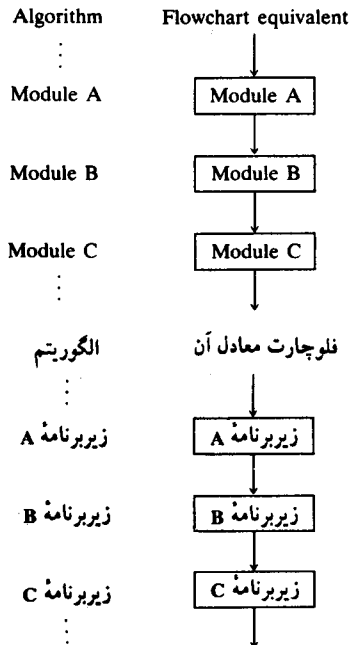
(۳) منطق تکرار یا جریان تکراری

سه منطق بالا در زیر، مورد بحث و بررسی قرار می‌گیرد و در هر حالت فلوچارت مربوط به آن رسم می‌شود.

منطق توالی (جریان متوالی اجرای دستورات)

منطق توالی قبلاً مورد بررسی قرار گرفت بجز در مواردی که بعضی از دستورات، اجرای پشت سرهم یا متوالی دستورات را برهم می‌زنند. تمام دستورات برنامه‌ها و زیربرنامه‌ها به صورت متوالی و پشت سرهم اجرا می‌شوند. توالی دستورات ممکن است با استفاده از شماره مراحل به صورت صریح بیان شود و یا براساس ترتیبی که در آن دستورات زیربرنامه‌ها یا برنامه‌ها نوشته می‌شوند به صورت ضمنی باشد. (شکل ۳-۲ را ببینید).

در بیشتر پردازشها، حتی در مسایل پیچیده، عموماً از این الگوی مقدماتی جریان کنترلی، تبعیت می‌شود.



شکل ۳-۲. منطق توالی

منطق انتخاب (دستورات شرطی)

منطق انتخاب از تعدادی شرط استفاده می‌کند که منتهی به انتخاب یک زیربرنامه از میان چند زیربرنامه می‌شود. دستوراتی که ما برای پیاده‌سازی این منطق به کار می‌گیریم، دستورات شرطی یا دستورات IF است. برای روشنی بیشتر مطلب، غالباً در پایان این‌گونه دستورات عبارت [پایان دستور IF] یا [End of If Structure. If] را می‌نویسیم.

یا با عبارت معادل آن نوشته می‌شود.

دستورات شرطی به سه نوع مختلف تقسیم می‌شوند که هر یک از این دستورات به‌طور جداگانه مورد بحث قرار می‌گیرد.

(۱) حالت یک وضعیتی: این دستور به صورت زیر است:

IF شرط ، THEN :

If condition, then:

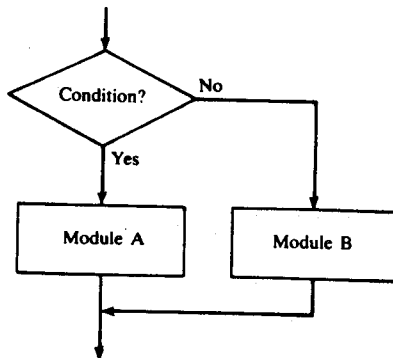
[زیربرنامه A]

[Module A]

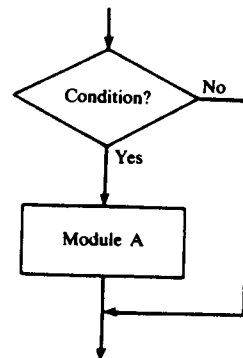
[پایان دستور IF]

[End of If structure.]

منطق این دستور در فلوچارت شکل ۴-۲ (الف) نشان داده شده است. اگر شرط برقرار باشد، آنگاه زیربرنامه A اجرا می‌شود که خود می‌تواند شامل یک یا چند دستور باشد، در غیر اینصورت زیربرنامه A نادیده گرفته می‌شود و کنترل اجرای دستورات به مرحله بعدی الگوریتم داده می‌شود.



(ب) حالت دو وضعیتی



(الف) حالت یک وضعیتی

شکل ۴-۲

(۲) حالت دو وضعیتی: این دستور به صورت زیر است:

IF شرط ، THEN :

If condition, then:

[زیربرنامه A]		[Module A]
ELSE :	یا	Else:
[زیربرنامه B]		[Module B]
[IF پایان دستور]		[End of If structure.]

منطق این دستور در فلوچارت شکل ۴-۲ (ب) نشان داده شده است. همانگونه که فلوچارت بیان می‌کند اگر شرط برقرار باشد آنگاه زیربرنامه A اجرا می‌شود، در غیر اینصورت اجرا به زیربرنامه B داده می‌شود.

(۳) حالت چندوضعیتی :

IF (۱) شرط , THEN :	If condition(1), then:
[زیربرنامه A ₁]	[Module A ₁]
ELSE IF (۲) شرط , THEN :	Else if condition(2), then:
[زیربرنامه A ₂]	[Module A ₂]
:	:
Else IF (M) شرط , THEN :	Else if condition(M), then:
[زیربرنامه A _M]	[Module A _M]
ELSE :	Else:
[زیربرنامه B]	[Module B]
[IF پایان دستور]	[End of If structure.]

منطق این دستور به گونه‌ای است که تنها اجازه اجرای یک زیربرنامه را می‌دهد. به‌ویژه این‌که، یا زیربرنامه پائین شرط اول در صورت برقراربودن اجرا می‌شود یا زیربرنامه‌ای که پائین آخرین دستور Else قرار دارد اجرا می‌شود. در عمل به‌ندرت اتفاق می‌افتد که بیش از سه شرط متداخل در زیربرنامه وجود داشته باشد.

مثال ۵-۲

ریشه‌های معادله درجه دوم

$$ax^2 + bx + c = 0$$

که در آن $a \neq 0$ ، با استفاده از دستور زیر به دست می‌آید :

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

مقدار $D = b^2 - 4ac$ مبین Discriminant معادله درجه دوم نامیده می‌شود. اگر D منفی باشد، آنگاه معادله ریشه حقیقی ندارد. اگر $D = 0$ باشد، آنگاه معادله تنها یک ریشه مضاعف (دو ریشه مساوی) $x = -b / 2a$ دارد. اگر D مثبت باشد، دستور بالا دو ریشه حقیقی متمایز را به دست می‌دهد. الگوریتم زیرریشه‌های معادله زیر را پیدا می‌کند.

Algorithm 2.2: (Quadratic Equation) This algorithm inputs the coefficients A, B, C of a quadratic equation and outputs the real solutions, if any.

Step 1. Read: A, B, C.

Step 2. Set $D := B^2 - 4AC$.

Step 3. If $D > 0$, then:

(a) Set $X1 := (-B + \sqrt{D})/2A$ and $X2 := (-B - \sqrt{D})/2A$.

(b) Write: $X1, X2$.

Else if $D = 0$, then:

(a) Set $X := -B/2A$.

(b) Write: 'UNIQUE SOLUTION', X .

Else:

Write: 'NO REAL SOLUTIONS'.

[End of If structure.]

Step 4. Exit.

توجه کنید: ملاحظه می‌کنید که در مرحله 3 از الگوریتم 2.2 سه شرط دوه دو متقابل وجود دارد که اجرای هر یک از آنها بستگی به آن دارد که آیا D مثبت است یا صفر یا منفی. در چنین وضعیتی، می‌توان به‌طور متناوب حالت‌های مختلف را به صورت زیر ارائه داد:

Step 3. (1) If $D > 0$, then:

.....

(2) If $D = 0$, then:

.....

(3) If $D < 0$, then:

.....

بیان دستور If مرحله 3 از الگوریتم 2.2، مشابه استفاده از دستور CASE در زبان PASCAL است.

منطق تکرار (جریان تکراری)

نوع سوم از منطق یا جریان کنترلی به یکی از دو نوع دستور حلقه تکرار زیر مربوط می‌شود. هر یک از این حلقه‌ها با یک دستور Repeat شروع می‌شود، بدنال آن یک زیربرنامه قرار می‌گیرد که بدنه حلقه نامیده می‌شود. برای روشنی بیشتر مطلب، در پایان این گونه دستورات عبارت

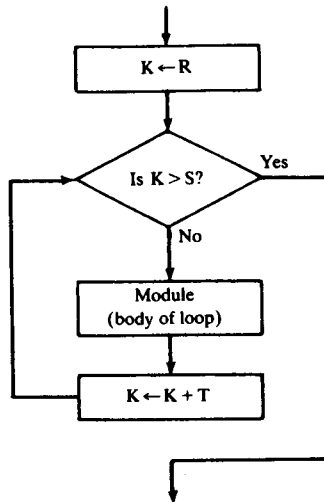
[End of loop.]

یا عبارت معادل آن نوشته می‌شود.

هر یک از این دو نوع دستور حلقه تکرار بطور جداگانه مورد بحث قرار می‌گیرد.
حلقه تکرار Repeat – For از یک متغیر شاخص Index نظیر K برای کنترل مراحل تکرار حلقه استفاده می‌کند. این حلقه معمولاً به صورت زیر است:

Repeat for $K = R$ to S by T :
[Module]
[End of loop.]

منطق این دستور در فلوچارت شکل ۵-۲ (الف) نشان داده شده است. در اینجا R مقدار اولیه و S مقدار پایانی یا مقدار آزمایشی حلقه و T نمو حلقه نام دارد.



شکل ۵-۲ (الف)

دستور Repeat – For

ملاحظه می‌کنید که بدنه این حلقه ابتدا به ازای $K = R$ ، بعد به ازای $K = R + T$ و بدنبال آن به ازای $K = R + 2T$ و غیره اجرا می‌شود. حلقه وقتی پایان می‌یابد که $K > S$ شود. این فلوچارت فرض می‌کند که نمو T مثبت است، اگر T منفی باشد و در نتیجه مقدار K دائماً کاهش می‌یابد آنگاه حلقه وقتی پایان می‌یابد که $K < S$ باشد.

حلقه Repeat – While از یک شرط برای کنترل مراحل تکرار حلقه استفاده می‌کند. این حلقه معمولاً

به صورت زیر است :

Repeat While شرط :

| [زیربرنامه]

[پایان حلقه.]

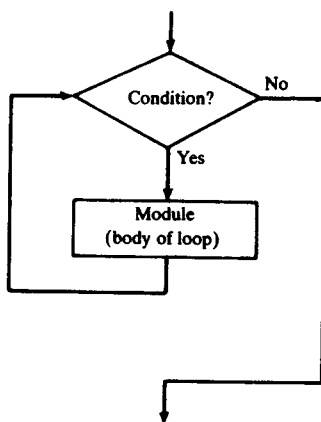
Repeat while condition:

[Module]

[End of loop.]

یا

منطق این دستور در فلوچارت شکل ۵-۲ (ب) نشان داده شده است.



شکل ۵-۲ (ب)

دستور Repeat — While

ملاحظه می‌کنید که اجرای این حلقه تا زمانی ادامه می‌یابد که شرط برقرار باشد. تأکید می‌کنیم که بایستی قبل از این دستور، دستوری وجود داشته باشد تا به متغیر کنترل‌کننده شرط حلقه، مقدار اولیه بدهد و برای اینکه اجرای حلقه بتواند در نهایت متوقف شود، بایستی در بدنه حلقه دستوری وجود داشته باشد تا شرط را تغییر دهد.

مثال ۶-۲

الگوریتم 2.1 بجای دستور GO TO ، با استفاده از یک حلقه Repeat — While به صورت زیر نوشته می‌شود.

Algorithm 2.3: (Largest Element in Array) Given a nonempty array DATA with N numerical values, this algorithm finds the location LOC and the value MAX of the largest element of DATA.

1. [Initialize.] Set $K := 1$, $LOC := 1$ and $MAX := DATA[1]$.
2. Repeat Steps 3 and 4 while $K \leq N$:
3. If $MAX < DATA[K]$, then:
Set $LOC := K$ and $MAX := DATA[K]$.
[End of If structure.]
4. Set $K := K + 1$.
[End of Step 2 loop.]
5. Write: LOC, MAX.
6. Exit.

الگوریتم 2.3 برخی از ویژگیهای دیگر آن را بیان می‌کند. معمولاً کلمه "مرحله" در الگوریتم حذف می‌شود و سعی می‌شود به جای دستورات Go To از دستورات Repeat استفاده شود. دستور Repeat می‌تواند به صورت صریح مراحل را نشان دهد که بدنه حلقه را تشکیل می‌دهند. دستور "پایان حلقه End of Loop" می‌تواند به صورت صریح مرحله‌ای را نمایش دهد که از آن حلقه شروع می‌شود. زیربرنامه‌های درون دستورات منطقی معمولاً برای سادگی بیشتر در خواندن آنها، به صورت پله‌ای یا تورفته نوشته می‌شوند. این مطلب تأکیدی دیگر بر نوشتن دستورات معمولی حلقه‌ها به صورت پله‌ای در زبانهای برنامه‌نویسی ساختیافته است.

هر نماد یا قرارداد جدید دیگری که در این کتاب آمده باشد یا بروشنی واضح است یا هنگام استفاده از آن، توضیح داده می‌شود.

۵-۲ پیچیدگی الگوریتم‌ها

تجزیه و تحلیل الگوریتم‌ها، وظیفه اصلی علم کامپیوتر است. برای مقایسه الگوریتم‌ها، باید معیارهایی برای اندازه‌گیری کارایی الگوریتم در اختیار داشته باشیم. این موضوع مهم، و قابل توجه در این بخش از کتاب شرح داده می‌شود.

فرض کنید M یک الگوریتم و n تعداد داده‌های ورودی آن باشد. دو معیار اصلی برای الگوریتم M ، زمان و مقدار حافظه‌ای است که الگوریتم M از آنها استفاده می‌کند. زمان اجرا با شمارش و محاسبه تعداد عملیات کلیدی داخل الگوریتم اندازه گرفته می‌شود به عنوان مثال در الگوریتم‌های مرتب‌کردن و جستجوی اطلاعات، تعداد مقایسه‌ها عمل کلیدی الگوریتم است. به این علت که عملیات کلیدی چنان تعریف می‌شوند تا زمان مربوط به عملیات دیگر خیلی کوچکتر یا حداکثر متناسب با زمان مربوط به عملیات کلیدی باشد. حافظه، با شمارش و محاسبه ماگزیمم خانه حافظه مورد نیاز الگوریتم اندازه گیری می‌شود.

پیچیدگی الگوریتم M ، تابع $f(n)$ است که زمان اجرا و/یا حافظه مورد نیاز الگوریتم را برحسب n تعداد داده ورودی به دست می‌دهد. اغلب، حافظه مورد نیاز یک الگوریتم تنها مضربی از n یا تعداد داده‌های ورودی است. برطبق آن، منظور از اصطلاح "پیچیدگی" زمان اجرای الگوریتم است مگر آن که خلاف آن بیان شود یا بکار آید.

مثال زیر نشان می‌دهد تابع $f(n)$ که زمان اجرای یک الگوریتم را به دست می‌دهد نه تنها به n تعداد داده‌های ورودی بستگی دارد بلکه به نوع داده‌ها نیز وابسته است.

مثال ۷-۲

فرض کنید یک داستان کوتاه به نام TEXT در اختیار داریم و بخواهیم در TEXT اولین کلمه سه حرفی به نام W را با جستجو پیدا کنیم. اگر W کلمه سه حرفی the باشد، آنگاه به نظر می‌رسد که W در ابتدای داستان TEXT وجود داشته باشد از این رو $f(n)$ یک عدد کوچک خواهد بود. از طرف دیگر، اگر W کلمه سه حرفی zoo باشد آنگاه ممکن است این کلمه اصلاً در TEXT وجود نداشته باشد، در نتیجه $f(n)$ بسیار بزرگ خواهد بود.

بحث بالا منتهی به این سؤال می‌شود که تابع پیچیدگی $f(n)$ را در حالت‌های خاص پیدا کنیم. دو حالتی که معمولاً در نظریه پیچیدگی الگوریتم‌ها مورد توجه قرار می‌گیرد عبارتند از:

(۱) بدترین حالت: که ماگزیم مقدار $f(n)$ برای هر ورودی ممکن است.

(۲) حالت میانگین: که مقدار انتظاری $f(n)$ یا امید ریاضی $f(n)$ است.

گاهی اوقات، حداقل مقدار ممکن $f(n)$ نیز مدنظر قرار می‌گیرد که بهترین حالت نامیده می‌شود. تجزیه و تحلیل حالت میانگین فرض می‌کند داده‌های ورودی از یک توزیع احتمال مشخص پیروی می‌کند. در یک چنین فرضی ممکن است تمام جایگشت‌های ممکن مجموعه داده‌های ورودی با احتمال مساوی باشد. حالت میانگین از مفهوم زیر نیز در نظریه احتمالات استفاده می‌کند. فرض کنید اعداد n_1, n_2, \dots, n_k به ترتیب با احتمال p_1, p_2, \dots, p_k ظاهر شوند. آنگاه امید ریاضی یا مقدار میانگین E از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$E = n_1 p_1 + n_2 p_2 + \dots + n_k p_k$$

این ایده‌ها در مثال زیر نشان داده شده است.

مثال ۸-۲: جستجوی خطی

فرض کنید آرایه خطی DATA دارای n عنصر است و داده مشخص ITEM نیز داده شده است.

می‌خواهیم در صورت وجود ITEM در آرایه DATA، LOC مکان آن را پیدا کنیم و در صورت عدم وجود، پیغامی نظیر $LOC = 0$ بدهیم، تا نشان داده‌شود ITEM در DATA وجود ندارد. الگوریتم جستجوی خطی، این مسأله را از طریق مقایسه ITEM با تک‌تک عناصر آرایه DATA حل می‌کند. به عبارت دیگر، ITEM با $DATA[1]$ ، آنگاه با $DATA[2]$ و الی آخر مقایسه می‌شود تا LOC پیدا شود طوری که $ITEM = DATA[LOC]$ باشد. نمایش رسمی این الگوریتم به قرار زیر است:

Algorithm 2.4: (Linear Search) A linear array DATA with N elements and a specific ITEM of information are given. This algorithm finds the location LOC of ITEM in the array DATA or sets $LOC = 0$.

1. [Initialize] Set $K := 1$ and $LOC := 0$.
2. Repeat Steps 3 and 4 while $LOC = 0$ and $K \leq N$.
3. If $ITEM = DATA[K]$, then: Set $LOC := K$.
4. Set $K := K + 1$. [Increments counter.]
[End of Step 2 loop.]
5. [Successful?]
If $LOC = 0$, then:
Write: ITEM is not in the array DATA.
Else:
Write: LOC is the location of ITEM.
[End of If structure.]
6. Exit.

پیچیدگی الگوریتم جستجو با C، تعداد مقایسه‌های انجام‌شده بین ITEM و $DATA[K]$ به دست می‌آید. $C(n)$ را در بدترین حالت و حالت میانگین تعیین می‌کنیم.

بدترین حالت

واضح است که بدترین حالت وقتی اتفاق می‌افتد که ITEM آخرین عنصر آرایه DATA باشد یا اصلاً در آرایه وجود نداشته باشد. در هر دو حالت داریم:

$$C(n) = n$$

بنابراین $C(n) = n$ پیچیدگی بدترین حالت الگوریتم جستجوی خطی است.

حالت میانگین

در اینجا فرض می‌کنیم که ITEM در آرایه DATA و با احتمال مساوی در هر مکانی از آرایه وجود دارد. به موجب آن، تعداد مقایسه‌ها را می‌توان هر یک از اعداد 1، 2، 3، ...، n دانست و احتمال وقوع هر عدد برابر $P = 1/n$ است. آنگاه

$$\begin{aligned}
 C(n) &= 1 \cdot \frac{1}{n} + 2 \cdot \frac{1}{n} + \dots + n \cdot \frac{1}{n} \\
 &= (1 + 2 + \dots + n) \cdot \frac{1}{n} \\
 &= \frac{n(n+1)}{2} \cdot \frac{1}{n} = \frac{n+1}{2}
 \end{aligned}$$

این نتیجه با احساس شهودی ما نیز تطابق دارد که میانگین تعداد مقایسه‌های موردنیاز برای تعیین مکان ITEM تقریباً برابر نصف تعداد عناصر لیست خطی DATA است.

توجه کنید: پیچیدگی حالت میانگین یک الگوریتم، معمولاً بسیار پیچیده‌تر از تجزیه و تحلیل پیچیدگی بدترین حالت است. علاوه بر این، توزیع احتمالی که برای حالت میانگین در نظر گرفته می‌شود عملاً در وضعیت‌های حقیقی ممکن نیست بکار گرفته شود. به موجب آن، منظور از پیچیدگی یک الگوریتم، تابعی است که زمان اجرای الگوریتم را در بدترین حالت برحسب تعداد داده‌های ورودی به دست می‌دهد، مگر آنکه خلاف آن بیان شود یا بکار آید. این فرض آنقدرها که فکر می‌کنیم قوی نیست، چون پیچیدگی حالت میانگین در مورد بسیاری از الگوریتم‌ها متناسب با بدترین حالت است.

آهنگ (نرخ) رشد، نماد O ی بزرگ (Big O)

فرض کنید M یک الگوریتم و n تعداد داده‌های ورودی آن باشد. واضح است که پیچیدگی $f(n)$ الگوریتم M با زیاد شدن تعداد داده‌های ورودی n افزایش می‌یابد. معمولاً ما مایل به تعیین آن، آهنگ افزایش $f(n)$ هستیم. این کار معمولاً از مقایسه $f(n)$ با چند تابع استاندارد نظیر

$$\log_2 n, \quad n, \quad n \log_2 n, \quad n^2, \quad n^3, \quad 2^n$$

حاصل می‌شود. آهنگهای رشد این توابع استاندارد، در شکل ۶-۲ نشان داده شده است که مقادیر تقریبی آنها را، به ازای چند مقدار معین n به دست می‌دهد.

$\begin{matrix} g(n) \\ n \end{matrix}$	$\log n$	n	$n \log n$	n^2	n^3	2^n
5	3	5	15	25	125	32
10	4	10	40	100	10^3	10^3
100	7	100	700	10^4	10^6	10^{30}
1000	10	10^3	10^4	10^6	10^9	10^{300}

شکل ۶-۲. آهنگ رشد چند تابع استاندارد

ملاحظه می‌شود که تابعها، به ترتیب آهنگ رشدشان ارائه شده‌اند. تابع لگاریتمی $\log_2 n$ رشد نسبتاً کندی دارد، تابع نمایی 2^n رشد نسبتاً تندی دارد و تابع چندجمله‌ای n^c با توجه به مقدار توان c رشد می‌کند. یک راه برای مقایسهٔ تابع $f(n)$ با این تابعهای استاندارد، استفاده از نماد تابعی O است که به صورت زیر تعریف می‌شود:

فرض کنید $f(n)$ و $g(n)$ دو تابعی باشند که بر روی اعداد صحیح مثبت تعریف شده، و دارای این خاصیت هستند که $f(n)$ به‌ازای تمام مقادیر n توسط مضربی از $g(n)$ محدود شده است. به عبارت دیگر، فرض کنید که عدد صحیح مثبت n_0 و عدد مثبت M وجود دارد به‌گونه‌ای که به‌ازای تمام $n > n_0$ داریم:

$$|f(n)| \leq M|g(n)|$$

در آن صورت می‌توان نوشت:

$$f(n) = O(g(n))$$

که خوانده می‌شود $f(n)$ از مرتبهٔ $g(n)$ است. برای چندجمله‌ای $p(n)$ که از درجهٔ m است در مسأله ۱۰-۲ نشان می‌دهیم $P(n) = O(n^m)$ ، به عنوان مثال

$$8n^3 - 576n^2 + 832n - 248 = O(n^3)$$

همچنین می‌توان نوشت:

$$f(n) - h(n) = O(g(n)) \quad \text{وقتی که} \quad f(n) = h(n) + O(g(n))$$

(این نماد " O " ی بزرگ یا "Big O" نام دارد چون $f(n) = O(g(n))$ معنی کاملاً متفاوتی دارد.)
برای این که نشان دهیم این نمادگذاری چقدر مناسب است پیچیدگی چند الگوریتم معروف جستجو و مرتب‌کردن را ارائه می‌دهیم:

(الف) جستجوی خطی $O(n)$

(ب) جستجوی دودویی $O(\log n)$

(ج) مرتب‌کردن حبابی $O(n^2)$

(د) مرتب‌کردن با ادغام $O(n \log n)$

این نتیجه‌ها در فصل ۹ در مبحث مرتب‌کردن و جستجوی اطلاعات به تفصیل مورد بررسی قرار می‌گیرد.

۶-۲ زیر الگوریتم‌ها

یک زیر الگوریتم یک قطعه برنامهٔ الگوریتمی کامل و به‌طور مستقل تعریف شده، است که به وسیلهٔ الگوریتم اصلی یا الگوریتم دیگری مورد استفاده قرار می‌گیرد (احضار یا صدا زده می‌شود). یک

زیرالگوریتم، مقادیر خود را که آرگومان نامیده می‌شوند از الگوریتم اصلی یا فراخواننده دریافت می‌کند، محاسبات لازم را انجام می‌دهد و آنگاه نتیجه را به الگوریتم فراخواننده برمی‌گرداند. زیر الگوریتم به این علت به صورت مستقل تعریف می‌شود تا الگوریتم‌های مختلف بتوانند آن را احضار کنند یا در همان الگوریتم در زمانهای مختلف بتوانند آن را صدا بزنند. رابطه بین یک الگوریتم و یک زیرالگوریتم مشابه رابطه بین برنامه اصلی و یک زیربرنامه در زبانهای برنامه‌نویسی است.

اختلاف اصلی بین فرمت یک زیرالگوریتم و یک الگوریتم در آن است که زیرالگوریتم معمولاً دارای عنوانی به صورت زیر است:

NAME(PAR₁, PAR₂, ..., PAR_k)

که در اینجا منظور از NAME نام زیرالگوریتم است و هنگامی مورد استفاده قرار می‌گیرد که زیرالگوریتم احضار شده باشد و PAR₁, PAR₂, ..., PAR_k پارامترهایی هستند که برای انتقال یا جابجایی داده‌ها بین زیرالگوریتم و الگوریتم فراخواننده بکار می‌روند.

تفاوت دیگر، آن است که در زیرالگوریتم به جای دستور Exit دستور Return داریم. تأکید می‌کنیم کنترل اجرا، زمانی به برنامه فراخواننده داده می‌شود که اجرای زیرالگوریتم کامل شده باشد.

زیرالگوریتم‌ها به دودسته اصلی تقسیم می‌شوند: زیرالگوریتم‌های تابع FUNCTION و زیرالگوریتم‌های PROCEDURE. به کمک چند مثال شباهتها و تفاوت‌های این دو نوع زیرالگوریتم را مورد بررسی قرار می‌دهیم. یک تفاوت اساسی این دو زیرالگوریتم آن است که زیرالگوریتم تابع تنها یک مقدار را به الگوریتم فراخواننده برمی‌گرداند، درحالی که زیرالگوریتم PROCEDURE می‌تواند بیش از یک مقدار برگرداند.

مثال ۹-۲

زیرالگوریتم تابع MEAN زیر، میانگین AVE سه عدد A، B و C را پیدا می‌کند.

Function 2.5: MEAN(A, B, C)

1. Set AVE := (A + B + C)/3.
2. Return(AVE).

توجه دارید که MEAN نام زیرالگوریتم است و A، B و C پارامترهای آن هستند. دستور Return مقدار متغیر AVE را که در داخل پراتر قرار دارد به برنامه فراخواننده برمی‌گرداند.

به همان صورتی که یک زیربرنامه تابع به وسیله یک برنامه فراخواننده احضار می‌شود، زیرالگوریتم MEAN نیز توسط یک الگوریتم احضار می‌شود. برای مثال، فرض کنید یک الگوریتم شامل دستور

$$\text{TEST} := \text{MEAN}(T_1, T_2, T_3)$$

است که در آن T_1 ، T_2 و T_3 نمرهای آزمون دانشجویان هستند. مقدار آرگومان T_1 ، T_2 و T_3 در زیرالگوریتم به پارامترهای A، B و C داده می‌شود. زیرالگوریتم MEAN اجرا می‌شود و بدنبال آن مقدار AVE به برنامه برگردانده می‌شود و جایگزین $\text{MEAN}(T_1, T_2, T_3)$ در دستور بالا می‌شود. در نتیجه آن، میانگین T_1 و T_2 و T_3 در TEST جایگزین می‌شود.

مثال ۱۰-۲

زیربرنامه Procedure در زیر با نام SWITCH مقدار متغیرهای AAA و BBB را جابجا می‌کند.

Procedure 2.6: SWITCH(AAA, BBB)

1. Set TEMP := AAA, AAA := BBB and BBB := TEMP.
2. Return.

این زیربرنامه توسط دستور CALL صدا زده می‌شود. برای مثال با دستور CALL زیر

Call SWITCH(BEG, AUX)

مقادیر متغیرهای BEG و AUX جابجا می‌شوند. به ویژه این که، هنگام احضار زیربرنامه SWITCH، آرگومان BEG و AUX به ترتیب به پارامترهای AAA و BBB منتقل می‌شود، زیربرنامه Procedure اجرا می‌شود، که در نتیجه آن مقادیر AAA و BBB جابجا می‌شوند و بدنبال آن مقادیر جدید AAA و BBB به ترتیب به BEG و AUX داده می‌شود.

توجه کنید: هر زیرالگوریتم تابع را به سادگی می‌توان به یک زیرالگوریتم Procedure معادل آن تبدیل کرد، به این صورت که، کافی است به الگوریتم فراخواننده یک پارامتر دیگر اضافه کنیم تا از آن برای برگرداندن مقدار محاسبه شده استفاده شود. مثلاً می‌توان تابع Function 2.5 را به صورت زیربرنامه

Procedure

$\text{MEAN}(A, B, C, \text{AVE})$

نوشت که در پارامتر AVE آن میانگین A، B و C جایگزین می‌شود. آنگاه دستور

Call MEAN($T_1, T_2, T_3, \text{TEST}$)

دارای همان اثر جایگزینی میانگین T_1 ، T_2 و T_3 در TEST است. به بیان کلی‌تر، به جای زیرالگوریتم‌های تابع می‌توانیم از زیرالگوریتم‌های Procedure استفاده کنیم.

۷-۲ متغیرها و انواع داده‌ها

هر متغیر در یک الگوریتم یا برنامه، دارای یک نوع داده‌ای است که، آن نوع داده، کدی را مشخص می‌کند که از آن برای ذخیره مقدار متغیر استفاده می‌شود. چهار نوع داده استاندارد به قرار زیر است:

(۱) نوع داده کاراکتری: در این حالت، داده‌ها با استفاده از نوعی کد کاراکتری مانند EBCDIC یا کد ASCII ذخیره می‌شوند. کد ۸ بیتی EBCDIC تعدادی از کاراکترها، در شکل ۷-۲ ارائه شده است.

Char.	Zone	Numeric	Hex	Char.	Zone	Numeric	Hex	Char.	Zone	Numeric	Hex
A	1100	0001	C1	S	1110	0010	E2	blank	0100	0000	40
B		0010	C2	T		0011	E3	.		1011	4B
C		0011	C3	U		0100	E4	<		1100	4C
D		0100	C4	V		0101	E5	(1101	4D
E		0101	C5	W		0110	E6	+	0100	1110	4E
F		0110	C6	X		0111	E7	&	0101	0000	50
G		0111	C7	Y		1000	E8	\$		1011	5B
H		1000	C8	Z	1110	1001	E9	*		1100	5C
I	1100	1001	C9	0	1111	0000	F0)		1101	5D
J	1101	0001	D1	1		0001	F1	:	0101	1110	5E
K		0010	D2	2		0010	F2	-	0110	0000	60
L		0011	D3	3		0011	F3	/		0001	61
M		0100	D4	4		0100	F4	%		1011	6B
N		0101	D5	5		0101	F5	>		1100	6C
O		0110	D6	6		0110	F6	?	0110	1111	6E
P		0111	D7	7		0111	F7	:	0111	1010	7A
Q		1000	D8	8		1000	F8	#		1011	7B
R	1101	1001	D9	9	1111	1001	F9	@		1100	7C
								=	0111	1110	7E

شکل ۷-۲. بخشی از کد EBCDIC

معمولاً یک کاراکتر در یک بایت حافظه ذخیره می‌شود.

(۲) نوع داده اعشاری (یا نقطه شناور): در این حالت داده‌های عددی با استفاده از صورت نمایی داده‌ها ذخیره می‌شوند.

(۳) نوع داده صحیح (یا نقطه ثابت): در این حالت اعداد صحیح مثبت با استفاده از نمایش دودویی ذخیره می‌شوند و اعداد صحیح منفی با یک تبدیل دودویی مانند مکمل ۲ ذخیره می‌شوند.

(۴) نوع داده منطقی: در این حالت از کدگذاری، متغیر می‌تواند تنها مقدار True و False داشته باشد. از این رو متغیر تنها با استفاده از یک بیت کدگذاری می‌شود. 1 برای True و 0 برای False. گاهی اوقات از بایتهای 1111 1111 و 0000 0000 به ترتیب برای True و False استفاده می‌شود.

در الگوریتم‌های این کتاب، نوع متغیرها مانند برنامه‌های کامپیوتری به صورت صریح بیان نمی‌شود اما در درون متن، به صورت ضمنی بیان می‌شود.

مثال ۱۱-۲

فرض کنید X یک خانه حافظه ۳۲ بیتی با دنباله بتهای زیر باشد:

0110 1100 1100 0111 1101 0110 0110 1100

بجز در حالتی که نوع متغیر X بیان شده است به هیچ طریق نمی‌توان هیچگونه اطلاع دقیقی از محتوای این خانه حافظه به دست آورد.

(الف) فرض کنید متغیر X دارای نوع کاراکتری است و برای آن از گدگذاری EBCDIC هم استفاده شده است. در آن صورت چهار کاراکتر %GO% در متغیر X قابل ذخیره است.

(ب) فرض کنید X دارای نوع دیگری نظیر صحیح یا اعشاری است. در آن صورت می‌توان یک عدد صحیح یا اعشاری را در X ذخیره کرد.

متغیرهای محلی و سراسری

سازماندهی یک برنامه کامپیوتری به صورت یک برنامه اصلی و چند زیربرنامه منتهی به مفهوم متغیرهای محلی و سراسری شده است. معمولاً یک قطعه برنامه شامل لیستی از چند متغیر مربوط به خود موسوم به متغیرهای محلی است که فقط توسط این قطعه برنامه قابل دسترسی است. علاوه بر این، قطعه‌هایی که به صورت زیربرنامه هستند، می‌توانند شامل چند پارامتر، باشند این پارامترها، متغیرهایی هستند که داده‌ها را بین یک زیربرنامه و برنامه فراخواننده انتقال می‌دهند.

مثال ۱۲-۲

زیربرنامه Procedure مثال ۱۰-۲ یعنی (AAA, BBB) SWITCH را در نظر بگیرید. متغیرهای AAA و BBB پارامتر هستند. از این پارامترها برای انتقال داده‌ها بین زیربرنامه Procedure و الگوریتم فراخواننده استفاده می‌شود. از طرف دیگر متغیر TEMP در زیربرنامه Procedure یک متغیر محلی است. محل "زندگی" یا "محیط زیست" این متغیر تنها در زیربرنامه Procedure است یعنی مقدار آن تنها با اجرای این زیربرنامه قابل دسترسی و تغییر است. حقیقت این است که از نام TEMP می‌توان در هر قطعه برنامه دیگر تحت عنوان نام یک متغیر استفاده کرد و استفاده از این نام در قطعه برنامه دیگر هیچ تأثیری در اجرای زیربرنامه SWITCH ندارد.

طراحان زبانهای برنامه‌نویسی بر این باورند که در یک برنامه کامپیوتری بهتر است از چند متغیر مشخص استفاده شود، تا یک یا حتی تمام قطعه برنامه‌ها بتوانند به آن متغیرها دسترسی داشته باشند. متغیرهایی که تمام قطعه برنامه‌ها به آنها دسترسی دارند متغیرهای سراسری نام دارند و متغیرهایی که قطعه برنامه‌های معین به آنها دسترسی دارند متغیرهای غیرمحلی نام دارند. هر زبان برنامه‌نویسی برای معرفی چنین متغیرهایی، ساختار دستوری مختص به خود دارد. برای مثال، در زبان FORTRAN دستور COMMON برای معرفی متغیرهای سراسری استفاده می‌شود و زبان PASCAL از قاعده دامنه تغییرات متغیرها SCOPE برای معرفی متغیرهای سراسری و غیرمحلی استفاده می‌کند. بنابراین، برای انتقال اطلاعات بین قطعه برنامه‌ها دو روش اساسی زیر وجود دارد:

(۱) روش مستقیم، به کمک پارامترهایی که خوش تعریف‌اند.

(۲) روش غیرمستقیم، به کمک متغیرهای غیرمحلی و سراسری.

تغییر غیرمستقیم مقدار متغیر یک قطعه برنامه توسط قطعه برنامه دیگر اثر جانبی یا عوارض جانبی Side Effect نام دارد. دانشجویان می‌باید به هنگام استفاده از متغیر غیرمحلی و سراسری نهایت دقت را داشته باشند چون خطاهای ایجاد شده توسط اثر جانبی به سختی قابل کشف است.

مسأله‌های حل شده

نمادگذاری ریاضی و تابعهای کامپیوتری

مسأله ۱-۲: مطلوب است تعیین

$$[7.5], [-7.5], [-18], [\sqrt{30}], [\sqrt[3]{30}], [\pi] \quad (\text{الف})$$

$$[7.5], [-7.5], [-18], [\sqrt{30}], [\sqrt[3]{30}], [\pi] \quad (\text{ب})$$

حل: (الف) بنا به تعریف، $[x]$ بزرگترین عدد صحیحی را نمایش می‌دهد که بزرگتر از x نباشد و کف x نامیده می‌شود. در نتیجه:

$$\begin{array}{lll} [7.5] = 7 & [-7.5] = -8 & [-18] = -18 \\ [\sqrt{30}] = 5 & [\sqrt[3]{30}] = 3 & [\pi] = 3 \end{array}$$

(ب) بنا به تعریف، $\lceil x \rceil$ کوچکترین عدد صحیحی را نمایش می‌دهد که کوچکتر از x نباشد و سقف x نامیده می‌شود. در نتیجه:

$$\begin{array}{lll} \lceil 7.5 \rceil = 8 & \lceil -7.5 \rceil = -7 & \lceil -18 \rceil = -18 \\ \lceil \sqrt{30} \rceil = 6 & \lceil \sqrt[3]{30} \rceil = 4 & \lceil \pi \rceil = 4 \end{array}$$

مسئله ۲-۲:

(الف) مطلوب است تعیین $26 \pmod{7}$, $34 \pmod{8}$, $2345 \pmod{6}$, $495 \pmod{11}$ (ب) مطلوب است تعیین $-26 \pmod{7}$, $-2345 \pmod{6}$, $-371 \pmod{8}$, $-39 \pmod{3}$ (ج) با استفاده از حساب با باقیمانده ۱۵، حاصل $9 + 13, 7 + 11, 4 - 9, 2 - 10$ را به دست آورید.حل: (الف) چون k مثبت است تنها با تقسیم k بر M باقیمانده r بدست می‌آید. در آن صورت $r \equiv k \pmod{M}$ بنابراین

$$5 = 26 \pmod{7} \quad 2 = 34 \pmod{8} \quad 5 = 2345 \pmod{6} \quad 0 = 495 \pmod{11}$$

(ب) هرگاه k منفی باشد، با تقسیم $|k|$ بر M باقیمانده r' به دست می‌آید. در آن صورت $k \equiv -r' \pmod{M}$.هرگاه $r' \neq 0$ از این رو است که $k \pmod{M} = M - r'$ بنابراین

$$\begin{aligned} -26 \pmod{7} &= 7 - 5 = 2 & -371 \pmod{8} &= 8 - 3 = 5 \\ -2345 \pmod{6} &= 6 - 5 = 1 & -39 \pmod{3} &= 0 \end{aligned}$$

(ج) از $a \pm M \equiv a \pmod{M}$ استفاده کنید.

$$\begin{aligned} 9 + 13 &= 22 \equiv 22 - 15 = 7 & 7 + 11 &= 18 \equiv 18 - 15 = 3 \\ 4 - 9 &= -5 \equiv -5 + 15 = 10 & 2 - 10 &= -8 \equiv -8 + 15 = 7 \end{aligned}$$

مسئله ۳-۲: تمام جایگشت‌های سه عدد ۱، ۲، ۳ و ۴ را بنویسید.

حل: ابتدا توجه داشته باشید که تعداد کل این جایگشت‌ها $4! = 24$ است.

1234	1243	1324	1342	1423	1432
2134	2143	2314	2341	2413	2431
3124	3142	3214	3241	3412	3421
4123	4132	4213	4231	4312	4321

ملاحظه می‌کنید که شش جایگشت سطر اول با یک، شش جایگشت سطر دوم با ۲ شروع می‌شوند همینطور تا آخر.

مسئله ۴-۲: مطلوب است تعیین (الف) 2^{-5} , $8^{2/3}$, $25^{-3/2}$;(ب) $\log_2 32$, $\log_{10} 1000$, $\log_2 (1/16)$; (ج) $[\log_2 1000]$, $[\log_2 0.01]$ حل: (الف) $2^{-5} = 1/2^5 = 1/32$; $8^{2/3} = (\sqrt[3]{8})^2 = 2^2 = 4$; $25^{-3/2} = 1/25^{3/2} = 1/5^3 = 1/125$ (ب) $\log_2 32 = 5$ چون $2^5 = 32$ ، $\log_{10} 1000 = 3$ چون $10^3 = 1000$

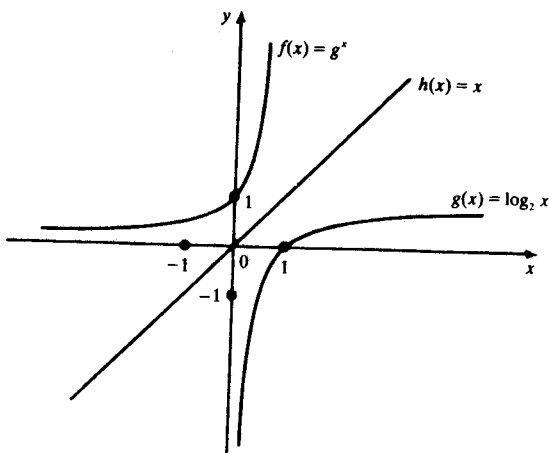
$$2^{-4} = 1/2^4 = 1/16 \quad \text{چون} \quad \log_2(1/16) = -4$$

(ج) $[\log_2 1000] = 9$ چون $2^9 = 512$ ، اما $2^{10} = 1024$

$$2^{-7} = 1/128 < 0.01 < 2^{-6} = 1/64 \quad \text{چون} \quad [\log_2 0.01] = -7$$

مسئله ۵-۲: نمودار تابع نمایی $f(x) = 2^x$ ، تابع لگاریتمی $f(x) = \log_2 x$ و تابع خطی $h(x) = x$ را بر

روی یک محور مختصات رسم کنید. (الف) خاصیت هندسی نمودار $f(x)$ و $g(x)$ را بیان کنید. (ب) به ازای عدد مثبت دلخواه c ، چه رابطه‌ای بین $f(c)$ ، $g(c)$ و $h(c)$ برقرار است؟
حل: در شکل ۸-۲ نمودار این سه تابع رسم شده است.



شکل ۸-۲

(الف) چون $f(x) = 2^x$ و $g(x) = \log_2 x$ معکوس یکدیگر هستند. از این رو نمودار این دو تابع نسبت به خط $y = x$ متقارن است.

(ب) به ازای هر عدد مثبت c ، داریم:

$$g(c) < h(c) < f(c)$$

واقعیت این است که با افزایش مقدار c ، فاصله قائم بین تابعهای

$$f(c) - h(c), \quad \text{و} \quad h(c) - g(c)$$

از نظر مقدار افزایش می‌یابد، علاوه بر این تابع لگاریتمی $g(x)$ در مقایسه با تابع خطی $h(x)$ رشد کندتری دارد و رشد تابع نمایی $f(x)$ در مقایسه با تابع خطی $h(x)$ بسیار تند است.

الگوریتم‌ها، پیچیدگی آنها

مسئله ۶-۲: الگوریتم 2.3 را در نظر بگیرید که مکان LOC و مقدار MAX بزرگترین عنصر آرایه DATA با n عنصر را پیدا می‌کند. $C(n)$ پیچیدگی تابع را در نظر بگیرید که تعداد دفعاتی را که LOC و MAX در

مرحله 3 تازه می شوند اندازه می گیرد. تعداد مقایسه ها مستقل از ترتیب قرارگیری عناصر در DATA است.

(الف) بدترین حالت را تشریح کنید و $C(n)$ آن را پیدا کنید.

(ب) بهترین حالت را تشریح کنید و $C(n)$ آن را پیدا کنید.

(ج) به ازای $n = 3$ ، $C(n)$ را برای حالت میانگین پیدا کنید، فرض کنید ترتیب قرارگیری تمام عناصر در DATA با احتمال مساوی است.

حل: (الف) بدترین حالت وقتی اتفاق می افتد که عناصر DATA به ترتیب صعودی باشند که در آن، مقایسه MAX با $DATA[K]$ باعث می شود LOC و MAX تازه شوند، در این حالت $C(n) = n-1$.

(ب) بهترین حالت وقتی اتفاق می افتد که بزرگترین عنصر آرایه، اولین عنصر آن باشد و از این رو هنگام مقایسه MAX با $DATA[K]$ ، LOC و MAX هرگز تازه نمی شوند. بنابراین در این حالت $C(n) = 0$.

(ج) فرض کنید 1، 2 و 3 به ترتیب بزرگترین عنصر، دومین عنصر بزرگ آرایه و کوچکترین عنصر آرایه DATA باشند. عناصر در آرایه DATA می توانند به شش طریق ممکن ظاهر شوند که متناظر با جایگشت های سه عدد 1، 2، 3 یعنی $3! = 6$ است. برای هر جایگشت P، فرض کنید n_p نمایش تعداد دفعات تازه شدن LOC و MAX باشد، که الگوریتم با ورودی P اجرا می شود. شش جایگشت P و مقادیر n_p متناظر آن به صورت زیر است:

جایگشت P: 321 312 231 213 132 123

مقادیر n_p : 2 1 1 1 0 0

با فرض این که تمام جایگشت ها با احتمال مساوی باشند:

$$C(3) = \frac{0+0+1+1+1+2}{6} = \frac{5}{6}$$

محاسبه مقدار میانگین $C(n)$ برای n دلخواه، خارج از حدود مطالب درس ساختمان داده ها است. یکی از اهداف این مسأله، آن است که نشان دهیم هنگام تعیین پیچیدگی حالت میانگین یک الگوریتم، با چه مشکلاتی دست به گریبان هستیم.

مسأله ۷-۲: فرض کنید M واحد زمانی، لازم است تا قطعه برنامه A اجرا شود که در آن M یک مقدار ثابت است. هرگاه n تعداد داده های ورودی و h عدد مثبتی بزرگتر از یک باشد، $C(n)$ پیچیدگی هر یک از دو الگوریتم زیر را به دست آورید.

(الف) الگوریتم P 2-7 A :

Algorithm P2.7A:

1. Repeat for I = 1 to N:
2. Repeat for J = 1 to N:
3. Repeat for K = 1 to N:
4. Module A.
- [End of Step 3 loop.]
- [End of Step 2 loop.]
- [End of Step 1 loop.]
5. Exit.

(ب) الگوریتم P 2-7 B :

Algorithm P2.7B:

1. Set J := 1.
2. Repeat Steps 3 and 4 while J ≤ N:
3. Module A.
4. Set J := B × J.
- [End of Step 2 loop.]
5. Exit.

ملاحظه می‌کنید که در این الگوریتم به جای n از N و به جای b از B استفاده شده است.

حل : (الف) در اینجا

$$C(n) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n M$$

تعداد دفعاتی که M در این مجموع ظاهر می‌شود برابر تعداد سه‌تایی‌های (i,j,k) است که در آن i, j, k اعداد صحیح از 1 تا خود n هستند. تعداد n^3 سه‌تایی از این نوع وجود دارد. از این رو

$$C(n) = Mn^3 = O(n^3)$$

(ب) ملاحظه می‌کنید که مقادیر شاخص حلقه J توانهایی از b هستند :

$$1, b, b^2, b^3, b^4, \dots$$

بنابراین قطعه برنامه A دقیقاً T بار تکرار می‌شود که در آن T اولین توانی از b است که

$$b^T > n$$

در آن

$$T = \lceil \log_b n \rceil + 1$$

در نتیجه :

$$C(n) = MT = O(\log_b n)$$

بنابراین :

مسئله ۸-۲ : (الف) یک زیر برنامه Procedure به نام FIND(DATA, N, LOC1, LOC2) بنویسید که

LOC1 مکان بزرگترین عنصر و LOC2 مکان دومین عنصر بزرگ آرایه DATA را برای $n > 1$ عنصر پیدا

کند.

حل : (الف) عناصر DATA را یک به یک مورد بررسی قرار دهید. در خلال اجرای این زیر برنامه procedure ، FIRST و SECOND به ترتیب مقادیر بزرگترین عنصر و دومین عنصر بزرگ آرایه را که قبلاً مورد بررسی قرار گرفتند نمایش می دهند. هر عنصر جدید DATA[K] به صورت زیر آزمایش می شود که اگر

$$SECOND \leq FIRST < DATA[K]$$

آنگاه FIRST عنصر SECOND جدید و DATA[K] عنصر FIRST جدید می شود. از طرف دیگر اگر

$$SECOND < DATA[K] \leq FIRST$$

آنگاه DATA[K] عنصر SECOND جدید می شود. در آغاز قرار دهید FIRST:=DATA[1] و SECOND:=DATA[2] و بررسی کنید که آیا این عناصرها با ترتیب درست قرار گرفته اند یا خیر. نمایش رسمی این زیر برنامه به صورت زیر است :

Procedure P2.8: FIND(DATA, N, LOC1, LOC2)

1. Set FIRST:=DATA[1], SECOND:=DATA[2], LOC1:=1, LOC2:=2.
2. [Are FIRST and SECOND initially correct?]
If FIRST<SECOND, then:
 (a) Interchange FIRST and SECOND,
 (b) Set LOC1:=2 and LOC2:=1.
 [End of If structure.]
3. Repeat for K = 3 to N:
 If FIRST<DATA[K], then:
 (a) Set SECOND:=FIRST and FIRST:=DATA[K].
 (b) Set LOC2:=LOC1 and LOC1:=K.
 Else if SECOND<DATA[K], then:
 Set SECOND:=DATA[K] and LOC2:=K.
 [End of If structure.]
 [End of loop.]
4. Return.

(ب) استفاده از پارامتر اضافی FIRST و SECOND به نظر زاید می آید چون LOC1 و LOC2 خود به خود به برنامه فراخواننده می گویند که DATA[LOC1] و DATA[LOC2] به ترتیب مقادیر بزرگترین عنصر و دومین عنصر بزرگ آرایه DATA هستند.

مسئله ۹-۲: عدد صحیح $n > 1$ یک عدد اول نامیده می شود اگر مقصوم علیه های مثبت آن تنها 1 و n باشند در غیر این صورت به n یک عدد مرکب می گویند، برای مثال، در زیر لیست اعداد اول کوچکتر از 20 ارائه شده است :

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19

اگر $n > 1$ اول نباشد، یعنی اگر n یک عدد مرکب باشد آنگاه n باید مقسوم علیهی مانند $K \neq 1$ داشته باشد بطوری که $k \leq \sqrt{n}$ یا به بیان دیگر $k^2 \leq n$.

فرض کنید خواسته باشیم تمام اعداد اول کوچکتر از یک عدد معلوم m مانند 30 را به دست آوریم.

این کار با روشی موسوم به "روش غربال اراثستین" عملی است که از مراحل زیر تشکیل شده است. لیست تمام اعداد از یک تا 30 را بنویسید :

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15
16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30

عدد 1 و تمام مضربهای عدد 2 به غیر از خود 2 را به صورت زیر حذف کنید :

~~1~~, 2, 3, ~~4~~, 5, ~~6~~, 7, ~~8~~, 9, ~~10~~, 11, ~~12~~, 13, ~~14~~, 15
~~16~~, 17, ~~18~~, 19, ~~20~~, 21, ~~22~~, 23, ~~24~~, 25, ~~26~~, 27, ~~28~~, 29, ~~30~~

حال چون عدد 3 اولین عدد بعد از 2 است که حذف نشده است در این مرحله تمام مضربهای عدد 3 غیر از خود 3 را به صورت زیر از لیست حذف کنید :

~~1~~, 2, 3, ~~4~~, 5, ~~6~~, 7, ~~8~~, ~~9~~, ~~10~~, 11, ~~12~~, 13, ~~14~~, ~~15~~
~~16~~, 17, ~~18~~, 19, ~~20~~, ~~21~~, ~~22~~, 23, ~~24~~, 25, ~~26~~, ~~27~~, ~~28~~, 29, ~~30~~

حال چون عدد 5 اولین عدد بعد از 3 است که حذف نشده است در این مرحله تمام مضربهای عدد 5 غیر از خود 5 را به صورت زیر از لیست حذف کنید :

~~1~~, 2, 3, ~~4~~, 5, ~~6~~, 7, ~~8~~, ~~9~~, ~~10~~, 11, ~~12~~, 13, ~~14~~, ~~15~~
~~16~~, 17, ~~18~~, 19, ~~20~~, ~~21~~, ~~22~~, 23, ~~24~~, ~~25~~, ~~26~~, ~~27~~, ~~28~~, 29, ~~30~~

حال چون عدد 7 اولین عدد بعد از 5 است که حذف نشده است و چون $7^2 > 30$. این الگوریتم به پایان رسیده است و اعداد باقیمانده در لیست، اعداد اول کوچکتر از 30 هستند :

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29

باتوجه به توضیحات فوق، روش غربال اراثستین برای پیدا کردن کلیه اعداد اول کوچکتر از عدد معلوم n را به یک الگوریتم تبدیل کنید.

حل : ابتدا آرایه A را به گونه‌ای تعریف می‌کنیم که

$$A[1] = 1, \quad A[2] = 2, \quad A[3] = 3, \quad A[4] = 4, \dots, A[N-1] = N-1, \quad A[N] = N$$

عدد صحیح L را با دستور جایگزینی $A[L] = 1$ از لیست حذف می‌کنیم زیر برنامه Procedure CROSSOUT زیر، آزمایش می‌کند که آیا $A[K] = 1$ یا خیر، در صورت منفی بودن جواب، قرار می‌دهد :

$$A[2K] = 1, \quad A[3K] = 1, \quad A[4K] = 1, \dots$$

یعنی مضربهای K از لیست حذف شده‌اند :

Procedure P2.9A: CROSSOUT(A, N, K)

1. If $A[K] = 1$, then: Return.
2. Repeat for $L = 2K$ to N by K :
Set $A[L] := 1$.
[End of loop.]
3. Return.

روش غربال را اکنون می توان به صورت ساده زیر نوشت :

Algorithm P2.9B: This algorithm prints the prime numbers less than N .

1. [Initialize array A.] Repeat for $K = 1$ to N :
Set $A[K] := K$.
2. [Eliminate multiples of K.] Repeat for $K = 2$ to \sqrt{N} .
Call CROSSOUT(A, N, K).
3. [Print the primes.] Repeat for $K = 2$ to N :
If $A[K] \neq 1$, then: Write: $A[K]$.
4. Exit.

مسأله ۱۰-۲: فرض کنید $P(n) = a_0 + a_1n + a_2n^2 + \dots + a_m n^m$ یعنی فرض کنید درجه $P(n)$ برابر m باشد. ثابت کنید که $P(n) = O(n^m)$.

حل: اگر $b_0 = |a_0|, b_1 = |a_1|, \dots, b_m = |a_m|$ ، آنگاه به ازای $n \geq 1$

$$P(n) \leq b_0 + b_1n + b_2n^2 + \dots + b_m n^m = \left(\frac{b_0}{n^m} + \frac{b_1}{n^{m-1}} + \dots + b_m \right) n^m \\ \leq (b_0 + b_1 + \dots + b_m) n^m = M n^m$$

که در آن $M = |a_0| + |a_1| + \dots + |a_m|$ از این رو $P(n) = O(n^m)$ و برای مثال $5x^3 + 3x = O(x^3)$ و $x^5 - 4\,000\,000x^2 = O(x^5)$.

متغیرها، انواع داده‌ای

مسأله ۱۱-۲: به اختصار تفاوت بین متغیرهای محلی، پارامترها و متغیرهای سراسری را بیان کنید.

حل: متغیرهای محلی متغیرهایی هستند که تنها در درون یک برنامه خاص یا یک زیربرنامه، قابل دسترس هستند. پارامترها، متغیرهایی هستند که برای انتقال داده‌ها بین یک زیربرنامه و برنامه فراخواننده بکار می‌رود. متغیرهای سراسری، متغیرهایی هستند که تمام قطعه برنامه‌های یک برنامه کامپیوتری می‌توانند به آنها دسترسی داشته باشند. هر زبان برنامه‌نویسی که استفاده از متغیرهای سراسری را مجاز دانسته باشد دارای دستوراتی برای معرفی این نوع متغیرها است.

مسأله ۱۲-۲: فرض کنید NUM معرف تعداد رکوردهای یک فایل باشد. مزایای تعریف NUM را به صورت یک متغیر سراسری شرح دهید. معایب استفاده از متغیرهای سراسری را در حالت کلی شرح

دهید.

حل : در بسیاری از زیربرنامه‌های Procedure پردازش رکوردهای یک فایل با استفاده از نوعی حلقه صورت می‌گیرد. از آنجا که تمام این زیربرنامه‌ها، تنها از یک نام برای رکورد، یعنی، NUM استفاده می‌کنند که این یکی از عیبهای معرفی NUM به صورت یک متغیر سراسری است، به بیان کلی‌تر، متغیرهای سراسری و غیرمحملی ممکن است در اثر عوارض جانبی Side Effect منجر به خطاهایی errors شوند که احتمالاً کشف آنها مشکل است.

مسئله ۱۳-۲: فرض کنید AAA یک خانه حافظه ۳۲ بیتی با دنباله بیت‌های زیر باشد :

0100 1101 1100 0001 1110 1001 0101 1101

مطلوب است تعیین داده ذخیره شده در AAA.

حل : بجز در حالتی که نوع داده‌ای AAA را می‌دانیم، هیچ راهی برای تعیین داده ذخیره شده در AAA وجود ندارد. اگر AAA یک متغیر کاراکتری باشد و از کدگذاری EBCDIC نیز برای ذخیره داده‌ها استفاده شود آنگاه (AZ) در AAA ذخیره می‌شود. اگر AAA یک متغیر صحیح باشد، آنگاه یک عدد صحیح با نمایش دودویی بالا در AAA ذخیره می‌شود.

مسئله ۱۴-۲: از نظر ریاضی، اعداد صحیح را می‌توان مانند اعداد حقیقی (اعشاری) مورد بررسی قرار داد. دلایلی برای داشتن دو نوع داده مختلف صحیح و اعشاری ارائه دهید.

حل : حساب اعداد صحیح که با استفاده از نوعی نمایش دودویی در کامپیوتر ذخیره می‌شوند خیلی ساده‌تر از حساب اعداد اعشاری است که به صورت نمایی ذخیره می‌شوند. علاوه بر این خطای ناشی از گردکردن که در اعداد اعشاری اتفاق می‌افتد در حساب اعداد صحیح وجود ندارد.

مسئله‌های تکمیلی

نمادهای ریاضی و تابعهای کامپیوتری

مسئله ۱۵-۲: مطلوب است تعیین

(الف) $[3.4], [-3.4], [-7], [\sqrt{75}], [\sqrt[3]{75}], [e]$

(ب) $[3.4], [-3.4], [-7], [\sqrt{75}], [\sqrt[3]{75}], [e]$

مسئله ۱۶-۲: (الف) مطلوب است محاسبه $48 \pmod{5}$, $48 \pmod{7}$, $1397 \pmod{11}$, $2468 \pmod{9}$

(ب) مطلوب است محاسبه $-48 \pmod{5}$, $-152 \pmod{7}$, $-358 \pmod{11}$, $-1326 \pmod{13}$

(ج) با استفاده از حساب با باقیمانده ۱۳، مطلوب است محاسبه

$$9 + 10, \quad 8 + 12, \quad 3 + 4, \quad 3 - 4, \quad 2 - 7, \quad 5 - 8$$

مسئله ۱۷-۲: مطلوب است تعیین

$$|3 + 8|, |3 - 8|, |-3 + 8|, |-3 - 8| \quad (\text{الف})$$

$$7!, 8!, 14!/12!, 15!/16! \quad (\text{ب})$$

مسئله ۱۸-۲: مطلوب است محاسبه

$$3^{-4}, 4^{7/2}, 27^{-2/3} \quad (\text{الف})$$

$$\log_2 64, \log_{10} 0.001, \log_2 (1/8) \quad (\text{ب})$$

$$[\lg 1\,000\,000], [\lg 0.001] \quad (\text{ج})$$

الگوریتم‌ها، پیچیدگی آنها

مسئله ۱۹-۲: تابع پیچیدگی $C(n)$ را در نظر بگیرید که تعداد دفعاتی را که LOC در مرحله ۳ ی الگوریتم 2.3 تازه می‌شود اندازه می‌گیرد. به‌ازای $n = 4$ ، حالت میانگین $C(n)$ را پیدا کنید. فرض می‌شود ترتیب تمام چهار عنصر داده‌شده با احتمال برابر است. مسئله ۶-۲ را نیز ببینید.

مسئله ۲۰-۲: زیربرنامه Procedure P2.8 را در نظر بگیرید که LOC1 مکان بزرگترین عنصر و LOC2 مکان دومین عنصر بزرگ آرایه DATA را که $n > 1$ ، پیدا می‌کند. فرض کنید $C(n)$ نمایش تعداد مقایسه‌ها در خلال اجرای این Procedure باشد.

(الف) $C(n)$ را در بهترین حالت پیدا کنید.

(ب) $C(n)$ را در بدترین حالت پیدا کنید.

(ج) به‌ازای $n = 4$ ، $C(n)$ را در حالت میانگین پیدا کنید. فرض می‌شود ترتیب تمام عناصر داده‌شده در DATA با احتمال برابر است.

مسئله ۲۱-۲: مسئله ۲۰-۲ را مجدداً حل کنید با این تفاوت که اکنون فرض کنید که $C(n)$ نمایش تعداد دفعاتی باشد که باید مقادیرهای FIRST و SECOND (یا LOC1 و LOC2) تازه شوند.

مسئله ۲۲-۲: فرض کنید که زمان اجرای قطعه برنامه A مقدار ثابت M است. مرتبه بزرگی تابع پیچیدگی $C(n)$ را به دست آورید که زمان اجرای الگوریتم‌های زیر را که در آن n تعداد داده‌های ورودی است پیدا می‌کند. n در الگوریتم‌ها با N نشان داده شده است.

Procedure P2.22A: 1. Repeat for I = 1 to N: (الف)
 2. Repeat for J = 1 to I:
 3. Repeat for K = 1 to J:
 4. Module A.
 [End of Step 3 loop.]
 [End of Step 2 loop.]
 [End of Step 1 loop.]
 5. Exit.

- Procedure P2.22B:**
1. Set $J := N$.
 2. Repeat Steps 3 and 4 while $J > 1$.
 3. Module A.
 4. Set $J := J/2$.
 - [End of Step 2 loop.]
 5. Return.
- (ب)

برای مسأله‌های زیر، برنامه بنویسید

مسأله ۲۳-۲: یک زیربرنامه تابع $DIV(J,K)$ بنویسید که در آن J و K اعداد صحیح مثبت هستند طوری که اگر J یک عامل K باشد $DIV(J,K) = 1$ ، در غیر این صورت $DIV(J,K) = 0$. (برای مثال $DIV(3,15) = 1$ اما $DIV(3,16) = 0$).

مسأله ۲۴-۲: با استفاده از $DIV(J,K)$ برنامه‌ای بنویسید که یک عدد صحیح مثبت $N > 10$ را بخواند و تعیین کند که آیا N اول است یا خیر.

راهنمایی: N اول است اگر $DIV(2,N) = 0$ (i) یعنی N فرد باشد و (ii) به ازای تمام اعداد صحیح فرد K که $1 < K^2 \leq N$ ، $DIV(K,N) = 0$.

مسأله ۲۵-۲: زیربرنامه **Procedure 2.8** را به یک برنامه کامپیوتری تبدیل کنید یعنی برنامه‌ای بنویسید که $LOC1$ مکان بزرگترین عنصر و $LOC2$ مکان دومین عنصر بزرگ آرایه $DATA$ را که دارای $N > 1$ عنصر است پیدا کند. برنامه را با استفاده از 70، 30، 25، 80، 60، 50، 30، 75، 25 و 60 آزمایش کنید.

مسأله ۲۶-۲: روش غربال اراتستین برای تعیین اعداد اول را که در مسأله ۹-۲ شرح داده شده است به یک برنامه کامپیوتری تبدیل کنید تا اعداد اول کوچکتر از N را پیدا کند. برنامه را با استفاده از (الف) $N = 1000$ و (ب) $N = 10000$ آزمایش کنید.

مسأله ۲۷-۲: فرض کنید C نمایش تعداد دفعاتی باشد که LOC در الگوریتم ۳-۲ برای تعیین بزرگترین عنصر آرایه N عنصری A ، تازه می‌شود.

(الف) یک زیربرنامه $COUNT(A,N,C)$ برای تعیین C بنویسید.

(ب) یک زیربرنامه **Procedure P2.27** بنویسید که (i) N عدد تصادفی بین 0 و 1 در آرایه A بخواند و (ii) با استفاده از $COUNT(A,N,C)$ مقدار C را پیدا کند.

(ج) برنامه‌ای بنویسید که زیربرنامه **Procedure P2.27** را 1000 بار اجرا کند و میانگین هزار C را پیدا کند.

(i) به ازای $N = 3$ برنامه را آزمایش کنید و نتیجه را با مقدار به دست آمده در مسأله ۶-۲ مقایسه کنید.

(ii) به ازای $N = 4$ برنامه را اجرا کنید و نتیجه را با مقدار به دست آمده در مسأله ۲۹-۲ مقایسه کنید.

فصل ۳

پردازش رشته‌ها

۱-۳ مقدمه

از نظر تاریخی، از کامپیوتر نخست به منظور پردازش داده‌های عددی استفاده می‌شد. امروزه، اغلب کامپیوتر برای پردازش داده‌های غیر عددی موسوم به داده‌های کاراکتری مورد استفاده قرار می‌گیرد. در این فصل چگونگی ذخیره داده‌های کاراکتری و پردازش آنها بررسی می‌شود.

امروزه یکی از کاربردهای اصلی کامپیوتر در عرصه پردازش کلمات یا رشته‌ها است. معمولاً چنین پردازشهایی شامل نوعی از تطبیق الگو است نظیر تحقیق در مورد این که آیا یک کلمه خاص مانند S در متن داده شده T وجود دارد یا خیر. ما این مسأله تطبیق الگو را به طور مشروح بررسی می‌کنیم و علاوه بر این دو الگوریتم مختلف برای تطبیق الگوها ارائه خواهیم داد.

در درس کامپیوتری معمولاً برای دنباله‌ای از کاراکترها به جای اصطلاح "کلمه" از اصطلاح "رشته" استفاده می‌شود چون "کلمه" دارای معنی دیگری در علم کامپیوتر است. به همین دلیل، در بسیاری از متنها و کتابهای کامپیوتری از عبارت "پردازش رشته‌ها"، "عملیات بر روی رشته‌ها" یا "ویرایش متن" به جای عبارت "پردازش کلمه" استفاده می‌شود.

مطالب این فصل اساساً جهت یادآوری بیان شده و مستقل از بقیه مطالب کتاب است. بنابراین دانشجو یا استاد می‌تواند در مطالعه اول این فصل را حذف کند و یا مطالعه آن را تا زمان دیگر به تعویق بیندازد.

۲-۳ اصطلاحات پایه‌ای

هر زبان برنامه‌نویسی دارای یک مجموعه از کاراکترها است که از آنها برای برقراری ارتباط با کامپیوتر استفاده می‌کند. این مجموعه معمولاً شامل کاراکترهای زیر است:

کاراکترهای الفبایی: A B C D E F G H I J K L M N O P Q R S T U V W X Y Z

کاراکترهای رقمی: 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

کاراکترهای مخصوص: + - / * () , . \$ = ' □

مجموعه کاراکترهای مخصوص که شامل فضای خالی نیز است غالباً با □ نمایش داده می‌شود که اندکی از یک زبان برنامه‌نویسی تا زبان دیگر در تغییر است.

رشته یک دنباله متناهی S از صفر، یک یا چند کاراکتر است. تعداد کاراکترهای یک رشته، طول رشته نام دارد. رشته‌ای که هیچ کاراکتری نداشته باشد، رشته تهی یا رشته پوچ نام دارد. رشته‌ها را با محصورکردن کاراکترهای آن بین یک علامت نقل قول یا دو علامت نقل قول نمایش می‌دهند. علامت نقل قول یا کوتیشن Quotation به عنوان علامت ابتدا و انتهای رشته یا محدودکننده رشته نیز بکار می‌رود. از این رو

'THE END' 'TO BE OR NOT TO BE' ' ' , '□□'

رشته‌هایی به ترتیب با طول 7، 18، 0 و 2 هستند. تأکید می‌کنیم که فضای خالی، یک کاراکتر است و در نتیجه در محاسبه طول رشته‌ها شرکت می‌کند. گاهی اوقات علامت کوتیشن را می‌توان حذف کرد و این هنگامی است که از خود متن چنین استنباط شود که عبارت داده شده یک رشته است.

فرض کنید S_1 و S_2 دو رشته باشند. رشته‌ای که از ترکیب کاراکترهای S_1 و بدنبال آن کاراکترهای رشته S_2 حاصل می‌شود پیوند یا اتصال S_1 و S_2 نامیده می‌شود. ما در این کتاب اتصال دو رشته S_1 و S_2 را به صورت $S_1 // S_2$ نمایش می‌دهیم. برای مثال:

'THE' // 'END' = 'THEEND' اما 'THE' // '□' // 'END' = 'THE END'

واضح است که طول $S_1 // S_2$ برابر مجموع طول‌های دو رشته S_1 و S_2 است. رشته Y زیررشته، رشته S نامیده می‌شود هرگاه رشته‌هایی مانند X و Z وجود داشته باشد طوری که: $S = X // Y // Z$. اگر X یک رشته تهی باشد، آنگاه Y یک زیررشته اولیه یا ابتدایی S نامیده می‌شود و اگر Z یک رشته تهی باشد آنگاه Y یک زیررشته انتهایی S نامیده می‌شود. برای مثال:

'BE OR NOT' یک زیررشته 'TO BE OR NOT TO BE' است.

'THE' یک زیررشته ابتدایی 'THE END' است.

واضح است که اگر Y یک زیررشته S باشد آنگاه طول Y نمی‌تواند بیشتر از طول S باشد.

توجه کنید: کاراکترها در کامپیوتر به کمک یک کُد 6 بیتی، یک کُد 7 بیتی، یا یک کُد 8 بیتی ذخیره می‌شوند. واحدی که برابر تعداد بیت‌های موردنیاز برای نمایش یک کاراکتر است یک بایت نامیده می‌شود. کامپیوتری که بتواند به یک بایت از حافظه دسترسی پیدا کند، یک ماشین با قابلیت آدرس‌دهی بایتی نامیده می‌شود.

۳-۳ ذخیره رشته‌ها

در حالت کلی، رشته‌ها را می‌توان با سه ساختار مختلف ذخیره کرد. (۱) ساختارهایی که طول ثابت دارند. (۲) ساختارهایی با طول متغیر که ماگزیمم طول آن ثابت است و (۳) ساختارهای پیوندی. هر نوع ساختار به‌طور جداگانه مورد بررسی قرار می‌گیرد، مزایا و معایب آنها بیان می‌شود.

رکورد، حافظه با طول ثابت

در حافظه با طول ثابت هر خط چاپ، یک رکورد محسوب می‌شود که در آن تمام رکوردها دارای طول برابر هستند، یعنی در هر رکورد تعداد کاراکترها برابر می‌باشند. از آنجا که داده‌ها اغلب به صورت تصویرهای ۸۰ ستونی به عنوان ورودی به ترمینالها داده می‌شوند یا از کارتهای ۸۰ ستونی استفاده می‌کنند، فرض می‌کنیم که رکوردها طول ۸۰ دارند، در غیراینصورت طول رکورد به صورت صریح یا ضمنی بیان می‌گردد.

مثال ۳-۱

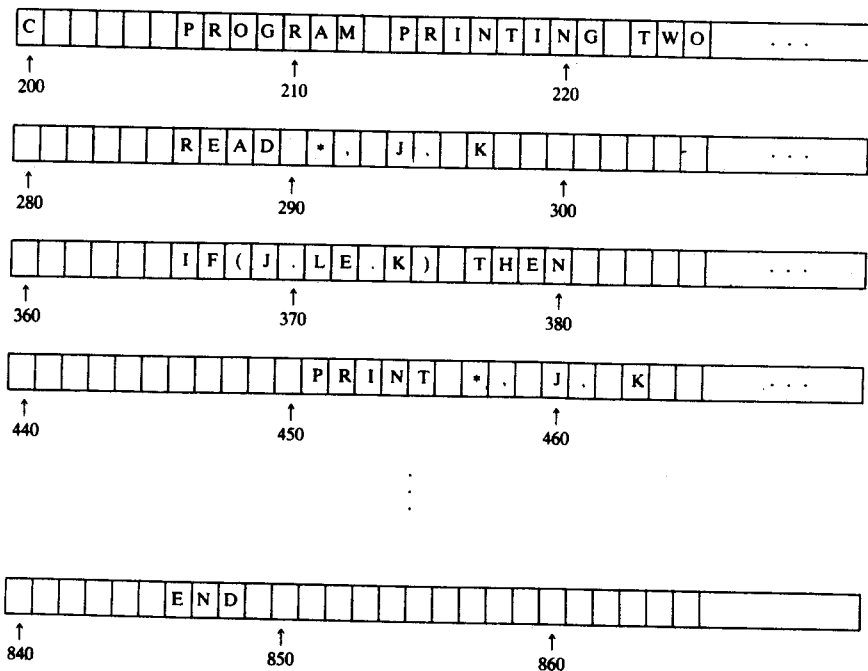
فرض کنید داده ورودی کامپیوتر، برنامه FORTRAN شکل ۳-۱ است.

```
C PROGRAM PRINTING TWO INTEGERS IN INCREASING ORDER
  READ *, J, K
  IF(J.LE.K) THEN
    PRINT *, J, K
  ELSE
    PRINT *, K, J
  ENDIF
  STOP
  END
```

شکل ۳-۱. داده ورودی

با استفاده از یک رکورد برای محیط حافظه با طول ثابت، داده ورودی در حافظه به‌صورتی که در

شکل ۲-۳ ارائه شده است نمایش داده می‌شود که در آن فرض شده است 200 ، آدرس اولین کاراکتر برنامه است.



شکل ۲-۳. رکوردها به صورت متوالی در کامپیوتر ذخیره می‌شوند.

مزایای اصلی روش بالا در ذخیره رسته‌ها عبارت است از :

- (۱) دسترسی آسان به اطلاعات هر رکورد معین
- (۲) تازه‌سازی آسان اطلاعات هر رکورد معین (مشرط بر این که طول اطلاعات جدید بیشتر از طول رکورد نباشد)

معایب عمده روش بالا عبارت است از :

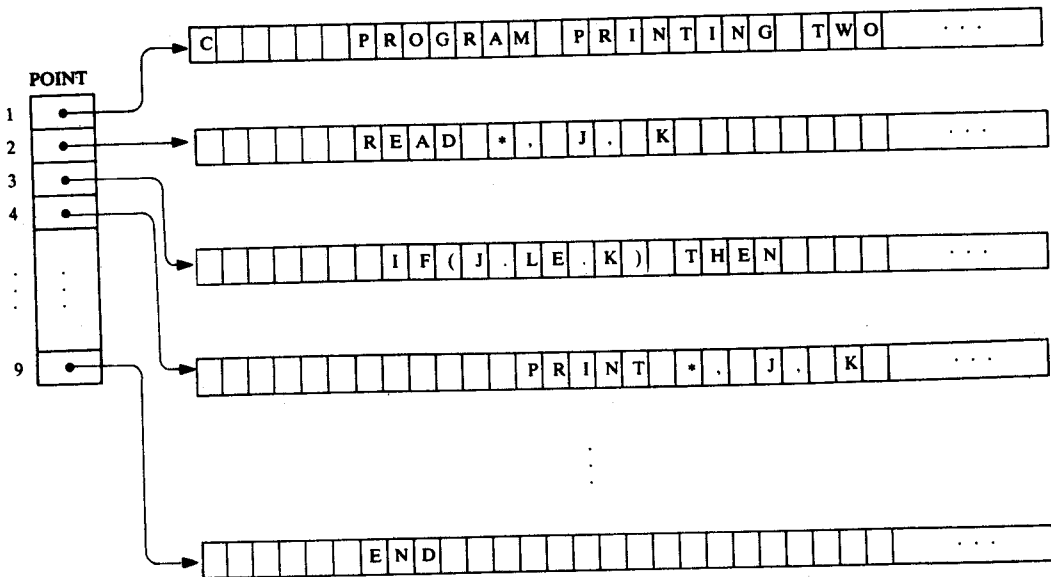
- (۱) هرگاه اکثر حافظه از فضاهای خالی تشکیل شده باشد خواندن تمام رکورد باعث به هدر رفتن زمان می‌شود.

(۲) بعضی از رکوردها به حافظه بیشتر از حافظه در دسترس، نیاز دارند.

(۳) هرگاه در متن اصلی احتیاج به تصحیح یک یا چند کاراکتر باشد، آنگاه برای تغییر یک کلمه نادرست

لازم است تمام رکوردها تغییر کند.

توجه کنید: فرض کنید بخواهیم در مثال ۳-۱ یک رکورد جدید اضافه کنیم. این کار مستلزم آن است که تمام رکوردهای بعدی به خانه‌های حافظه جدید منتقل شوند. با وجود این، این عیب را می‌توان به صورتی که در شکل ۳-۳ بیان شده است، برطرف کرد.



شکل ۳-۳. ذخیره‌سازی رکوردها با استفاده از اشاره‌گرها

یعنی می‌توان از یک آرایه خطی POINT که آدرس هر رکورد متوالی را به دست می‌دهد استفاده کرد طوری که لازم نباشد رکوردها در خانه‌های متوالی حافظه ذخیره شوند. بدین ترتیب اضافه کردن یک رکورد جدید تنها مستلزم تازه‌سازی آرایه POINT است.

حافظه با طول متغیر، که ماگزیمم طول آن ثابت است

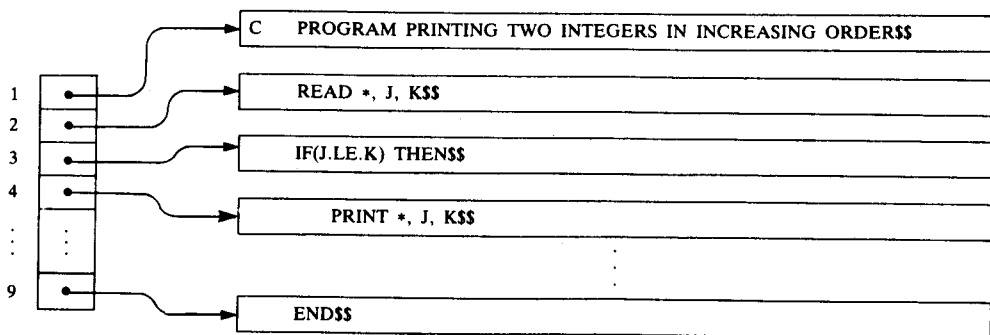
اگر چه مانند بالا رشته‌ها را می‌توان با طول ثابت در خانه‌های حافظه ذخیره کرد اما بیان طول واقعی هر رشته دارای معایبی است. مثلاً هنگامی که رشته تنها بخش آغازین خانه حافظه را اشغال می‌کند در آن صورت نباید تمام رکورد خوانده شود. علاوه بر این بعضی از عملیات روی رشته‌ها (که در بخش ۳-۴ بررسی می‌شود) بستگی به داشتن رشته‌هایی با طول متغیر دارند.

ذخیره رشته‌هایی با طول متغیر در حافظه‌ای که طول ثابت دارند می‌توان به دو روش کلی زیر انجام داد:

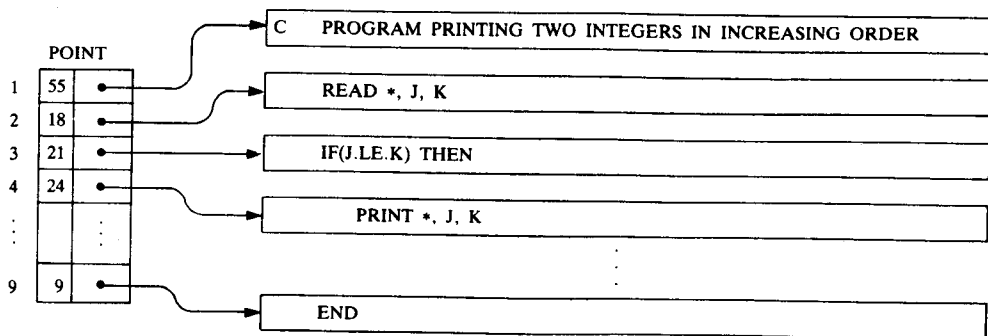
(۱) می‌توان برای پایان رشته از یک علامت، نظیر دو علامت دلار \$\$ استفاده کرد.

(۲) می‌توان طول رشته را مثلاً به عنوان یک فیلد اضافی در آرایه اشاره‌گر بیان کرد. با استفاده از داده‌های

شکل ۱-۳، روش اول در نمودار ۳-۴ (الف) و روش دوم در نمودار ۳-۴ (ب) به تصویر کشیده شده است.



(الف) رکوردها به همراه علامت پایان رشته



(ب) رکوردهایی که طولشان به صورت پیوندی هستند.

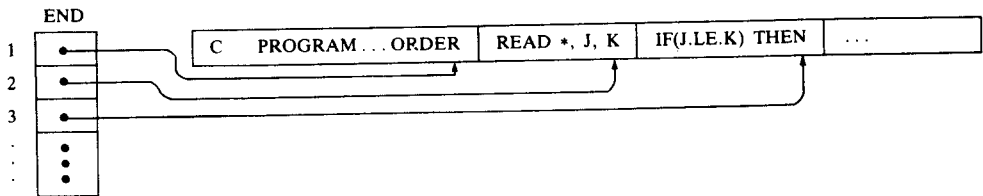
شکل ۳-۴

توجه کنید: بعضی از دانشجویان ممکن است دچار این وسوسه اغواآمیز شوند که بخواهند رشته‌ها را

یکی بعد از دیگری با استفاده از یک علامت خاص نظیر دو علامت دلار \$\$ شکل ۵-۳ (الف) یا با استفاده از یک آرایه اشاره گر که مکان رشته‌ها را مانند شکل ۵-۳ (ب) به دست می‌دهد ذخیره کنند. واضح است که این‌گونه روشهای ذخیره رشته‌ها باعث صرفه‌جویی در مقدار حافظه مصرفی می‌شود، و گاهی اوقات هنگامی که رکوردها دائمی هستند و به ندرت دستخوش تغییرات کوچک می‌شوند در حافظه ثانویه مورد استفاده قرار می‌گیرد. با وجود این، هنگامی که رشته‌ها و طول آنها غالباً در حال تغییر است، این روش ذخیره‌سازی معمولاً غیرکارا و نامؤثر است.

C	PROGRAM ... ORDERS\$\$	READ *, J, K\$\$	IF(J.LE.K) THEN\$\$...
---	------------------------	------------------	---------------------	-----

(الف)



(ب)

شکل ۵-۳. ذخیره رکوردها یکی بعد از دیگری

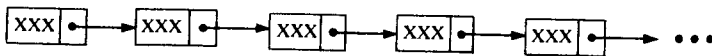
ذخیره رشته‌ها به صورت پیوندی

امروزه از کامپیوتر به میزان زیادی در پردازش کلمات یا رشته‌ها استفاده می‌شود یعنی متن به عنوان ورودی به کامپیوتر داده می‌شود آنگاه پردازش شده و به صورت چاپ شده ر خروجی ارائه می‌شود. بنابراین کامپیوتر باید توانایی تصحیح و ویرایش متن چاپ شده را نیز داشته باشد که منظور از ویرایش، حذف، تغییر و اضافه کردن کلمات، یا رشته‌ها عبارات، جملات و حتی پاراگراف‌های یک متن می‌باشد. با وجود این، حافظه‌های با طول ثابت که در بالا مورد بررسی قرار گرفت برای عملیات فوق‌الذکر مناسب نیستند. بنابراین، در اکثر کاربردهای پردازش کلمه، رشته‌ها با استفاده از لیستهای پیوندی ذخیره می‌شوند. لیستهای پیوندی و چگونگی حذف و اضافه کردن داده‌ها در آن، به‌طور مشروح در فصل ۵ بررسی

می‌شود. در اینجا ما فقط نگاهی اجمالی به چگونگی ظاهر شدن رشته‌ها در این ساختمان داده خواهیم داشت.

منظور از یک لیست پیوندی (یک طرفه)، یک دنباله از خانه‌های حافظه به نام گره است که به صورت خطی مرتب شده‌اند و هر گره شامل یک فیلد موسوم به پیوند یا اتصال است که به گره بعدی لیست اشاره می‌کند (یعنی دارای آدرس گره بعدی است).

شکل ۶-۳ نمودار فرضی یک لیست پیوندی را نشان می‌دهد.



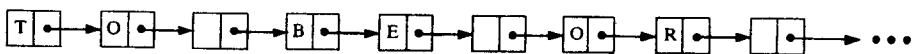
شکل ۶-۳. لیست پیوندی

رشته‌ها را می‌توان به صورت زیر در لیستهای پیوندی ذخیره کرد. در هر خانه حافظه یک کاراکتر یا تعداد معینی کاراکتر جایگزین می‌شود و یک پیوند که مقداری از حافظه را اشغال می‌کند آدرس خانه حافظه‌ای را که شامل کاراکتر بعدی یا تعدادی از کاراکترهای درون رشته است به دست می‌دهد. برای مثال، جمله مشهور زیر را در نظر بگیرید!

بودن یا نبودن، مسأله این است.

To be or not to be, that is the question.

شکل ۷-۳ (الف) چگونگی ذخیره شدن این رشته را در حافظه نشان می‌دهد که هر گره دارای یک کاراکتر است.



شکل ۷-۳ (الف). هر کاراکتر در یک گره

و شکل ۷-۳ (ب) چگونگی ذخیره شدن این حافظه را نشان می‌دهد که هر گره دارای چهار کاراکتر است.



شکل ۷-۳ (ب). چهار کاراکتر در یک گره

۴-۳ نوع داده کاراکتری

در این بخش مرور کلی بر روشهایی داریم که زبانهای برنامه‌نویسی مختلف داده نوع کاراکتری را مورد استفاده قرار می‌دهند. همانگونه که در فصل قبل (در بخش ۷-۲) متذکر شدیم، هر نوع داده‌ای دارای فرمول خاص خود جهت از کد در آوردن یک دنباله از بیتها، در حافظه است.

ثابت‌ها

اکثر زبانهای برنامه‌نویسی ثابتهای رشته‌ای را با قراردادن آن، در داخل یک یا دو کوتیشن نمایش می‌دهند. برای مثال:

'TO BE OR NOT TO BE' و 'THE END'

به ترتیب ثابت‌های رشته‌ای با طول ۷ و ۱۸ کاراکتر هستند. الگوریتم‌های این کتاب نیز ثابت‌های کاراکتری را به همین صورت تعریف می‌کند.

متغیرها

هر زبان برنامه‌نویسی دارای قانون و قاعده خاص خود برای ساختن متغیرهای کاراکتری است. با وجود این، متغیرهای کاراکتری به یکی از سه دسته زیر تقسیم می‌شوند: ایستا، نیمه‌ایستا و پویا. منظور از یک متغیر کاراکتری ایستا، متغیری است که طول آن قبل از اجرای برنامه تعریف شده و در سراسر برنامه ثابت است. منظور از یک متغیر کاراکتری نیمه‌ایستا، متغیری است که طول آن ممکن است در خلال اجرای برنامه تغییر کند طوری که طول آن نمی‌تواند از یک مقدار ماکزیممی که قبل از اجرای برنامه توسط برنامه معین می‌شود بزرگتر شود. منظور از یک متغیر کاراکتری پویا، متغیری است که طول آن می‌تواند در خلال اجرای برنامه تغییر کند. این سه دسته متغیر کاراکتری، به ترتیب متناظر با روشهایی هستند که رشته‌ها در حافظه کامپیوتر، به صورتی که در بخش قبل توضیح داده شد، ذخیره می‌شوند.

مثال ۲-۳

(الف) بسیاری از نسخه‌های زبان FORTRAN از متغیرهای کاراکتری ایستا CHARACTER استفاده می‌کنند. برای مثال قطعه برنامه FORTRAN زیر را در نظر بگیرید:

```
CHARACTER ST1*10, ST2*14
ST1 = 'THE END'
ST2 = 'TO BE OR NOT TO BE'
```

دستور اول اعلام می‌کند که ST1 و ST2 به ترتیب متغیرهای کاراکتری CHARACTER به طول 10 و 14 هستند. پس از اجرای هر یک از دو دستور جایگزینی بالا، ST1 و ST2 در حافظه به صورت زیر ذخیره می‌شوند:

ST1 T H E E N D ST2 T O B E O R N O T T

یعنی یک رشته در حافظه به صورت چیده شده از چپ ذخیره می‌شود. هرگاه طول رشته بزرگتر از طول خانه‌های حافظه باشد فضاهاى خالی در سمت راست رشته جمع می‌شوند و اگر طول رشته کوچکتر از طول خانه‌های حافظه باشد، رشته از سمت راست بریده می‌شود.

(ب) زبان BASIC متغیرهای کاراکتری را به صورتی تعریف می‌کند که در انتهای نام متغیر یک علامت \$ قرار می‌گیرد. به بیان کلی‌تر، متغیرها، از نوع متغیرهای نیمه‌ایستا هستند که طول آنها از یک حد معینی نمی‌تواند بزرگتر باشد. برای مثال، قطعه برنامه BASIC زیر:

```
AS = 'THE BEGINNING'
BS = 'THE END'
```

متغیرهای AS و BS را به صورت کاراکتری تعریف کرده است. هنگامی که این قطعه برنامه اجرا می‌شود، طول AS و BS به ترتیب 13 و 7 خواهد بود.

علاوه بر این در زبان BASIC برای نمایش ثابت‌های رشته‌ای، از دو کوتیشن استفاده می‌شود.

(ج) زبان SNOBOL از متغیرهای کاراکتری پویا استفاده می‌کند. برای مثال، قطعه برنامه SNOBOL زیر:

```
WORD = 'COMPUTER'
TEXT = 'IN THE BEGINNING'
```

متغیرهای WORD و TEXT را به صورت کاراکتری تعریف می‌کند. هنگامی که این قطعه برنامه اجرا می‌شود طول WORD و TEXT به ترتیب 18 و 16 خواهد بود. با وجود این، طول این متغیرها می‌تواند دیرتر در برنامه تغییر کند.

(د) زبان PL / I هم از متغیرهای کاراکتری ایستا و هم از متغیرهای کاراکتری نیمه‌ایستا استفاده

می‌کند. برای مثال، دستور **PL / I** زیر :

DECLARE NAME CHARACTER(20),
WORD CHARACTER(15) VARYING;

متغیر **NAME** را به صورت کاراکتری ایستا به طول 20 و متغیر **WORD** را به صورت کاراکتری نیمه‌ایستا تعریف می‌کند که طول آن می‌تواند تغییر کند ولی نمی‌تواند بیشتر از 15 باشد.

(۵) در زبان **PASCAL**، یک متغیر کاراکتری (که به اختصار به صورت **CHAR** نوشته می‌شود) می‌تواند تنها یک کاراکتر را نمایش دهد و از این رو است که یک رشته به صورت آرایه خطی از کاراکترها تعریف می‌شود. برای مثال :

VAR WORD: ARRAY[1..20] OF CHAR

WORD را به صورت یک رشته 20 کاراکتری تعریف می‌کند. علاوه بر این، **WORD[1]** اولین کاراکتر این رشته است و **WORD[2]** دومین کاراکتر رشته و غیره می‌باشد. به‌ویژه این که، آرایه‌های کاراکتری در پاسکال طول ثابت دارند و از این رو متغیرهای ایستا هستند.

۵-۳ عملیات بر روی رشته‌ها

هرچند یک رشته را می‌توان به صورت ساده، یک آرایه خطی از کاراکترها در نظر گرفت. با وجود این در کاربردها بین رشته‌ها و انواع دیگر آرایه‌ها یک تفاوت اساسی وجود دارد. به‌ویژه این که، گروههایی از عناصر متوالی، در یک رشته (نظیر کلمه‌ها، عبارتها و جمله‌ها) موسوم به زیررشته‌ها، می‌توانند واحدهایی مستقل روی این رشته‌ها باشند. علاوه بر این، واحدهای اصلی قابل دسترس در یک رشته معمولاً، زیررشته‌ها هستند نه تک‌تک کاراکترها. برای مثال رشته زیر را در نظر بگیرید :

'TO BE OR NOT TO BE'

می‌توانیم این رشته را به صورت دنباله‌ای از 18 کاراکتر **T, O, □, B, ..., E** در نظر بگیریم. با وجود این، زیر رشته‌های **TO, BE, OR, ...** دارای معنی خاص خود هستند.

از سوی دیگر، یک آرایه خطی 18 عنصری با 18 عدد صحیح زیر را در نظر بگیرید :

4, 8, 6, 15, 9, 5, 4, 13, 8, 5, 11, 9, 9, 13, 7, 10, 6, 11

واحد اصلی قابل دسترس در چنین آرایه‌ای، معمولاً تک‌تک عناصر آن آرایه است. گروههایی متوالی

از عناصر این آرایه، معمولاً معنی خاصی ندارند. بنابه دلایل بالا، عملیات متعددی روی رشته‌ها تعریف شده است که معمولاً با انواع دیگر آرایه‌ها بکار برده نمی‌شود. در این بخش، این عملیات روی رشته‌ها توضیح داده می‌شود. بخش بعد، چگونگی استفاده از این عملیات را در پردازش کلمات یا رشته‌ها نشان می‌دهد. بجز در حالتی که به صورت صریح بیان می‌شود یا به طور ضمنی توضیح داده می‌شود، فرض می‌کنیم متغیرهای نوع کاراکتری پویا هستند و طول متغیر دارند و طول آن، در متنی که از متغیر استفاده می‌کند، تعیین می‌شود.

زیر رشته

دسترسی به یک زیررشته از یک رشته داده شده، مستلزم داشتن اطلاعات زیر است: (۱) نام رشته یا خود رشته (۲) مکان اولین کاراکتر زیررشته در رشته داده شده و (۳) طول زیر رشته یا مکان آخرین کاراکتر زیر رشته. ما این عمل را SUBSTRING می‌نامیم. به ویژه این که، می‌نویسیم:

SUBSTRING(string, initial, length)

که زیر رشته، یک رشته S (String) را نشان می‌دهد، اولین کاراکتر آن از مکان K (Initial) شروع شده و طول (Length) آن L است.

مثال ۳-۳

(الف) با استفاده از تابع بالا داریم:

SUBSTRING('TO BE OR NOT TO BE', 4, 7) = 'BE OR N'
SUBSTRING('THE END', 4, 4) = '□END'

(ب) تابع SUBSTRING(S, 4, 7) در برخی از زبانهای برنامه‌نویسی به صورت زیر نمایش داده می‌شود:

PL/1:	SUBSTR(S, 4, 7)
FORTRAN 77:	S(4:10)
UCSD Pascal:	COPY(S, 4, 7)
BASIC:	MID\$(S, 4, 7)

شاخص گذاری

شاخص گذاری که تطبیق الگو نیز نامیده می‌شود، عبارت است از تعیین مکان الگوی رشته‌ای P که برای نخستین بار، در رشته داده شده T ظاهر شده است. ما این عمل را شاخص‌گذاری INDEX می‌نامیم

و می‌نویسیم:

$INDEX(text, pattern)$

اگر الگوی P در متن T ظاهر نشود، آنگاه در $INDEX$ مقدار ۰ جایگزین می‌شود. آرگومان‌های $text$ و $pattern$ در عمل بالا، می‌تواند ثابت‌های رشته‌ای یا متغیرهای رشته‌ای باشند.

مثال ۳-۴

(الف) فرض کنید T شامل متن

'HIS FATHER IS THE PROFESSOR'

باشد آنگاه: $INDEX(T, 'THE')$ ، $INDEX(T, 'THEN')$ و $INDEX(T, '□THE□')$ به ترتیب مقادیر ۷، ۰ و ۱۴ دارند.

(ب) تابع $INDEX(text, pattern)$ در برخی از زبانهای برنامه‌نویسی به صورت زیر نمایش داده می‌شود.

PL/1:	$INDEX(text, pattern)$
UCSD Pascal:	$POS(pattern, text)$

توجه دارید که در پاسکال UCSD آرگومانها به ترتیب عکس قرار گرفته‌اند.

اتصال دو رشته

فرض کنید S_1 و S_2 دو رشته باشند. از بخش ۲-۳ یادآور می‌شویم که اتصال S_1 و S_2 که ما آن را با $S_1 // S_2$ نمایش می‌دهیم، رشته‌ای است که شامل کاراکترهای S_1 و بدنبال آن کاراکترهای S_2 است.

مثال ۳-۵

(الف) فرض کنید $S_1 = 'MARK'$ و $S_2 = 'TWIN'$ باشند. آنگاه

$S_1 // S_2 = 'MARK TWAIN'$ اما $S_1 // S_2 = 'MARK □ TWIN'$

(ب) اتصال در برخی از زبانهای برنامه‌نویسی به صورت زیر نمایش داده می‌شود:

PL/1:	$S_1 // S_2$
FORTAN 77:	$S_1 // S_2$
BASIC:	$S_1 + S_2$
NOBOL:	$S_1 S_2$

(بین S_1 و S_2 یک فضای خالی وجود دارد)

طول رشته

تعداد کاراکترهای داخل یک رشته، طول آن رشته نامیده می‌شود. برای تعیین طول یک رشته معلوم می‌نویسیم:

$$\text{LENGTH}(\text{string})$$

بدین ترتیب:

$$\text{LENGTH}(\text{'COMPUTER'}) = 8 \quad \text{LENGTH}(\text{'\square'}) = 0 \quad \text{LENGTH}(\text{''}) = 0$$

برخی از زبانهای برنامه‌نویسی این تابع را به صورت زیر نمایش می‌دهند:

PL/1:	LENGTH(string)
BASIC:	LEN(string)
UCSD Pascal:	LENGTH(string)
SNOBOL:	SIZE(string)

FORTAN و **PASCAL** استاندارد که از متغیرهای رشته‌ای با طول ثابت استفاده می‌کنند و هیچ تابع کتابخانه‌ای **LENGTH** برای تعیین طول رشته‌ها ندارند. با وجود این، هرگاه از تمام فضای خالی انتهایی رشته صرف‌نظر کنیم، می‌توان چنین متغیرهایی را متغیرهایی با طول متغیر در نظر گرفت. بنابراین می‌توان در این زبانها، یک زیربرنامه **LENGTH** نوشت طوری که:

$$\text{LENGTH}(\text{'MARC '}) = 4$$

در واقع، زبان **SNOBOL** دارای تابع کتابخانه‌ای برای رشته‌ها به نام **TRIM** است که فضاهای خالی انتهای رشته را حذف می‌کند:

$$\text{TRIM}(\text{'ERIK '}) = \text{'ERIK'}$$

ما در الگوریتم‌های خود، هراز چندگاهی از این تابع **TRIM** استفاده خواهیم کرد.

۳-۶ پردازش کلمه یا رشته

در گذشته، داده‌های کاراکتری پردازش شده توسط کامپیوتر، اساساً از عناصر داده‌ای نظیر نام و آدرس تشکیل می‌شد. امروزه کامپیوتر، کارهای تایپی و نشریاتی از قبیل نامه‌ها، مقالات و گزارشها را پردازش می‌کند. بخاطر متنها و مطالب بعدی است که از اصطلاح "پردازش کلمه" یا رشته استفاده می‌کنیم. متن تایپ شده‌ای داده شده است. معمولاً عملیات مرتبط با پردازش کلمه یا رشته به قرار زیر است:

(الف) جانشین سازی: یک رشته را جانشین رشته دیگری در داخل متن کنیم.

(ب) اضافه کردن: یک رشته را در وسط متن اضافه کنیم.

(ج) حذف کردن: یک رشته را از متن حذف کنیم.

عملیات بالا را می‌توان با استفاده از عملیات روی رشته‌ها، که در بخش قبل توضیح دادیم، اجرا نمود. در زیر، این عملیات را همراه با بررسی آنها به طور مستقل، شرح می‌دهیم. بسیاری از این عملیات، در هر یک از زبانهای برنامه‌نویسی شرح داده شده در بالا، یا به صورت کتابخانه‌ای وجود دارند یا می‌توان آنها را به سادگی تعریف کرد.

اضافه کردن

متن داده شده T را در نظر بگیرید، می‌خواهیم رشته S را طوری به آن اضافه کنیم که S از مکان K شروع شود. ما این عمل را به صورت

`INSERT(text, position, string)`

نمایش می‌دهیم. برای مثال:

`INSERT('ABCDEFGH', 3, 'XYZ') = 'ABXYZCDEFGH'`
`INSERT('ABCDEFGH', 6, 'XYZ') = 'ABCDEXYZFGH'`

این تابع `INSERT` را می‌توان با استفاده از عملیات روی رشته‌ها، که در بخش قبل تعریف شده است پیاده‌سازی کرد:

$$\text{INSERT}(T, K, S) = \text{SUBSTRING}(T, 1, K - 1) \parallel S \parallel \text{SUBSTRING}(T, K, \text{LENGTH}(T) - K + 1)$$
 یعنی زیررشته ابتدایی T که قبل از مکان K است و طول $K - 1$ دارد، به رشته S متصل شده است و نتیجه به بقیه قسمت T متصل می‌شود که از مکان K شروع می‌شود و طول $\text{LENGTH}(T) - (K - 1) = \text{LENGTH}(T) - K + 1$ دارد. ما به صورت ضمنی فرض کرده‌ایم که T یک متغیر پویا است و اندازه T خیلی بزرگ نمی‌شود.

حذف کردن

متن داده شده T را در نظر بگیرید، می‌خواهیم زیررشته‌ای را از آن حذف کنیم که از مکان K شروع می‌شود و طول L دارد. این عمل را به صورت زیر نمایش می‌دهیم:

`DELETE(text, position, length)`

برای مثال

`DELETE('ABCDEFGH', 4, 2) = 'ABCFGH'`
`DELETE('ABCDEFGH', 2, 4) = 'AFGH'`

فرض می‌کنیم که عمل حذف زمانی که مکان $K = 0$ است انجام نمی‌شود. بنابراین اهمیت این "حالت صفر" دیرتر مشاهده می‌شود.

تابع DELETE را می‌توان با استفاده از عملیات بر روی رشته‌ها، که در بخش قبل به صورت زیر داده شده است پیاده‌سازی کرد:

$$\text{DELETE}(T, K, L) = \text{SUBSTRING}(T, 1, K-1) // \text{SUBSTRING}(T, K+L, \text{LENGTH}(T) - K - L + 1)$$

یعنی زیررشته ابتدایی T که قبل از مکان K است به زیررشته انتهایی T که از مکان $K+L$ شروع می‌شود متصل شده است. طول زیررشته ابتدایی $K-1$ است و طول زیررشته انتهایی برابر است با:

$$\text{LENGTH}(T) - (K + L - 1) = \text{LENGTH}(T) - K - L + 1$$

علاوه بر این فرض می‌کنیم به ازای $K = 0$ ، $\text{DELETE}(T, K, L) = T$.

حال فرض کنید متن T و الگوی P داده شده است و بخواهیم از متن T اولین وقوع الگوی P را حذف کنیم. این عمل با استفاده از تابع DELETE بالا به صورت زیر انجام می‌شود:

$$\text{DELETE}(T, \text{INDEX}(T, P), \text{LENGTH}(P))$$

یعنی در متن T، نخست $\text{INDEX}(T, P)$ را محاسبه می‌کنیم یعنی مکانی را که الگوی P برای اولین بار در T ظاهر شده است پیدا می‌کنیم و بدنبال آن $\text{LENGTH}(P)$ یعنی تعداد کاراکترهای P را محاسبه می‌کنیم. یادآور می‌شویم که وقتی $\text{INDEX}(T, P) = 0$ (یعنی هنگامی که P در T ظاهر نشده باشد) متن T تغییر نمی‌کند.

مثال ۳-۶

(الف) فرض کنید $T = \text{'ABCDEFG'}$ و $P = \text{'CD'}$ آنگاه $\text{INDEX}(T, P) = 3$ و $\text{LENGTH}(P) = 2$ از این رو

$$\text{DELETE}(\text{'ABCDEFG'}, 3, 2) = \text{'ABEFG'}$$

(ب) فرض کنید $T = \text{'ABCDEFG'}$ و $P = \text{'CD'}$ آنگاه $\text{INDEX}(T, P) = 0$ و $\text{LENGTH}(P) = 2$ از این رو، بنا به "حالت صفر":

$$\text{DELETE}(\text{'ABCDEFG'}, 0, 2) = \text{'ABCDEFG'}$$

که همان نتیجه موردانتظار است.

فرض کنید پس از خواندن متن T و الگوی P در کامپیوتر، بخواهیم هر وقوع الگوی P در متن T را حذف کنیم. این عمل را می‌توان با تکرار چند بار دستور

$\text{DELETE}(T, \text{INDEX}(T, P), \text{LENGTH}(P))$

انجام داد تا این که $\text{INDEX}(T, P) = 0$ (یعنی به محض این که P در T ظاهر نشده است).
الگوریتمی که این عمل را انجام می‌دهد به صورت زیر است:

Algorithm 3.1: A text T and a pattern P are in memory. This algorithm deletes every occurrence of P in T .

1. [Find index of P .] Set $K := \text{INDEX}(T, P)$.
2. Repeat while $K \neq 0$:
 - (a) [Delete P from T .]
Set $T := \text{DELETE}(T, \text{INDEX}(T, P), \text{LENGTH}(P))$
 - (b) [Update index.] Set $K := \text{INDEX}(T, P)$.
- [End of loop.]
3. Write: T .
4. Exit.

تأکید می‌کنیم که پس از هر عمل حذف طول T کاهش می‌یابد و از این رو الگوریتم باید متوقف شود. باوجود این، تعداد دفعاتی که حلقه اجرا می‌شود می‌تواند تعداد دفعات ظاهر شدن P در متن اولیه T را افزایش دهد، که در مثال زیر نشان داده شده است.

مثال ۷-۳

(الف) فرض کنید الگوریتم 3.1 با داده‌های زیر اجرا شده است:

$T = \text{XABYABZ}, \quad P = \text{AB}$

آنگاه حلقه داخلی الگوریتم دوبار اجرا خواهد شد. در خلال اجرای اول الگوریتم، اولین وقوع AB از T حذف خواهد شد که در نتیجه آن T به صورت $T = \text{XYABZ}$ در خواهد آمد. در خلال اجرای دوم، وقوع باقیمانده AB از T حذف خواهد شد. از این رو $T = \text{XYZ}$. بنابراین خروجی الگوریتم است:
(ب) فرض کنید الگوریتم 3.1 با داده‌های زیر اجرا شده است:

$T = \text{XAAABBBY}, \quad P = \text{AB}$

ملاحظه می‌کنید که الگوی AB تنها یکبار در T ظاهر شده است اما حلقه الگوریتم سه بار اجرا می‌شود. به‌ویژه این‌که، پس از حذف AB در مرحله اول از T داریم $T = XAABBY$ و از این‌رو AB مجدداً در T ظاهر شده است. پس از حذف AB در مرحله دوم از T ملاحظه می‌کنید که $T = XABY$ و AB همچنان در T وجود دارد. بالاخره پس از حذف AB در مرحله سوم از T داریم $T = XY$ و AB در T ظاهر نشده است و بدین ترتیب $INDEX(T, P) = 0$. از این‌رو XY خروجی الگوریتم است.

مثال بالا نشان می‌دهد که با تغییر متن T در اثر حذف الگو، الگو که در ابتدا در متن وجود داشت در انتهای این عمل در متن ظاهر نخواهد شد.

جانشین سازی

فرض کنید متن T داده شده است، می‌خواهیم الگوی P_2 را جانشین اولین وقوع الگوی P_1 کنیم. این عمل را به صورت زیر نمایش می‌دهیم:

$REPLACE(text, pattern_1, pattern_2)$

برای مثال:

$REPLACE('XABYABZ', 'AB', 'C') = 'XCYABZ'$
 $REPLACE('XABYABZ', 'BA', 'C') = 'XABYABZ'$

در حالت دوم، الگو BA در متن ظاهر نشده است و از این‌رو هیچ جانشینی صورت نمی‌گیرد. توجه داشته باشید که تابع REPLACE را می‌توان به صورت ترکیب یک عمل حذف و یک عمل اضافه کردن بیان کرد، مشروط بر این‌که از همان تابع‌های قبلی DELETE و INSERT استفاده کنید. به‌ویژه این‌که، تابع REPLACE را می‌توان با استفاده از سه مرحله زیر اجرا کرد:

$K := INDEX(T, P_1)$
 $T := DELETE(T, K, LENGTH(P_1))$
 $INSERT(T, K, P_2)$

دو مرحله اول P_1 را از T حذف می‌کند و مرحله سوم P_2 را در مکان X ای که P_1 حذف شد به T اضافه می‌کند.

فرض کنید متن T و الگوهای P و Q در حافظه یک کامپیوتر قرار دارند و بخواهیم هر وقوع P در متن T توسط الگوی Q جانشین شود. این عمل را با استفاده مکرر از دستور

$REPLACE(T, P, Q)$

تا وقتی که $INDEX(T, P) = 0$ می‌توان انجام داد (یعنی تا وقتی که الگوی P در T وجود نداشته باشد).

الگوریتمی که این کار را انجام می‌دهد به شرح زیر است:

Algorithm 3.2: A text T and patterns P and Q are in memory. This algorithm replaces every occurrence of P in T by Q .

1. [Find index of P .] Set $K := \text{INDEX}(T, P)$.
2. Repeat while $K \neq 0$:
 - (a) [Replace P by Q .] Set $T := \text{REPLACE}(T, P, Q)$.
 - (b) [Update index.] Set $K := \text{INDEX}(T, P)$.
- [End of loop.]
3. Write: T .
4. Exit.

توجه کنید: هرچند این الگوریتم شباهت زیادی با الگوریتم 3.1 دارد اما پایان یافتن الگوریتم را تضمین نمی‌کند. این واقعیت در مثال ۸-۳ (ب) توضیح داده شده است. از طرف دیگر فرض کنید که طول Q کوچکتر از طول P باشد. در این صورت طول T پس از جانشانی کاهش می‌یابد. این مطلب تضمین می‌کند که در این حالت خاص Q کوچکتر از P است و باید الگوریتم پایان یابد.

مثال ۸-۳

(الف) فرض کنید الگوریتم 3.2 با داده‌های زیر اجرا شده است:

$$T = \text{XABYABZ}, \quad P = \text{AB}, \quad Q = \text{C}$$

آنگاه حلقه داخلی الگوریتم دوبار اجرا خواهد شد. در خلال اجرای اول الگوریتم، C جانشین اولین وقوع AB در T می‌شود و نتیجه می‌دهد $T = \text{XCYABZ}$. در خلال اجرای دوم، C جانشین وقوع باقیمانده AB در T می‌شود و نتیجه می‌دهد $T = \text{XCYCZ}$. از این رو XCYCZ خروجی الگوریتم است.

(ب) فرض کنید الگوریتم 3.2 با داده‌های زیر اجرا شده است:

$$T = \text{XAY}, \quad P = \text{A}, \quad Q = \text{AB}$$

در آن صورت این الگوریتم هیچوقت به پایان نمی‌رسد. به این دلیل که صرفنظر از تعداد دفعاتی که حلقه اجرا می‌شود P همواره در متن T ظاهر خواهد شد. به‌ویژه این که:

$$T = \text{XABY} \quad \text{در پایان اجرای اول حلقه است.}$$

$$T = \text{XAB}^2\text{Y} \quad \text{در پایان اجرای دوم حلقه است.}$$

$$T = \text{XAB}^n\text{Y} \quad \text{در پایان اجرای } n \text{ ام حلقه است.}$$

چون P یک زیررشته Q است از این رو در اینجا حلقه بی‌پایان **Infinite Loop** یا **LOOP** خواهیم داشت.

۷-۳ الگوریتم‌های تطبیق الگو

تطبیق الگو، مسأله‌ای است که تعیین می‌کند یک الگوی رشته‌ای داده شده P در متن رشته‌ای T وجود دارد یا خیر. فرض می‌کنیم که طول P کوچکتر از طول T است. این بخش دو الگوریتم در مورد تطبیق الگوها را مورد بحث و بررسی کامل قرار می‌دهد. علاوه بر آن، پیچیدگی این الگوریتم‌ها مورد بررسی قرار می‌گیرد تا بتوان کارایی آنها را مورد مقایسه قرار داد.

توجه کنید: در خلال بررسی الگوریتم‌های تطبیق الگو، کاراکترهای اوقات با حروف کوچک a, b, c, \dots نمایش داده می‌شوند و از توانها برای نمایش تعداد دفعات تکرار آنها استفاده می‌شود، مانند:

$$a^2b^3ab^2 \quad \text{به جای } aabbabb \quad \text{و} \quad (cd)^3 \quad \text{به جای } cdc dcd$$

علاوه بر این، رشته تهی با حرف یونانی لاندا Λ نمایش داده می‌شود و اتصال رشته‌های X و Y به صورت $X.Y$ یا فقط XY نمایش داده می‌شود.

الگوریتم اول تطبیق الگو

الگوریتم اول تطبیق الگو، الگوریتم روشنی است که در آن الگوی داده شده P با هر یک از زیررشته‌های T مقایسه می‌شود. عمل مقایسه با حرکت از چپ به راست متن T انجام می‌شود تا به یک تطبیق با P برسیم. به‌طور مشروح این که، فرض کنید:

$$W_K = \text{SUBSTRING}(T, K, \text{LENGTH}(P))$$

باشد. به عبارت دیگر فرض کنید W_K زیررشته‌ای از T با همان طول P و با شروع از K امین کاراکتر T باشد. نخست P را با کاراکتر به کاراکتر با اولین زیررشته W_1 مقایسه می‌کنیم. اگر تمام کاراکترها مساوی باشند در آن صورت $P = W_1$ و در نتیجه P در T ظاهر شده است و $\text{INDEX}(T, P) = 1$. از سوی دیگر، فرض کنید به این نتیجه رسیدیم که یک کاراکتر P همان کاراکتر متناظر در W_1 نیست. در آن صورت $P \neq W_1$ و بلافاصله می‌توانیم به زیررشته بعدی W_2 برویم به عبارت دیگر، در مرحله بعد P را با W_2 مقایسه می‌کنیم. اگر $P = W_2$ ، در آن صورت P را با W_3 مقایسه می‌کنیم و الی آخر. عمل مقایسه متوقف می‌شود:

(الف) هرگاه به یک تطبیق P با زیررشته W_K برسیم و از این رو P در متن T وجود دارد و $\text{INDEX}(T, P)$ $K =$ یا (ب) هرگاه به هیچ تطبیق P با زیررشته W_K نرسیم و از این رو P در متن T وجود نخواهد داشت.

MAX مقدار ماکزیمم اندیس K برابر است با $LENGTH(T) - LENGTH(P) + 1$.

حال به عنوان مثال فرض کنید که P یک رشته 4 کاراکتری و T یک رشته 20 کاراکتری باشد و فرض کنید P و T در حافظه به صورت آرایه‌های خطی نمایش داده شده‌اند که در هر عنصر آرایه یک کاراکتر ذخیره شده است. یعنی

$$T = T[1]T[2]T[3]...T[19]T[20] \quad \text{و} \quad P = P[1]P[2]P[3]P[4]$$

آنگاه P با هر یک از زیررشته‌های 4 کاراکتری بعدی T مقایسه می‌شود:

$$W_1 = T[1]T[2]T[3]T[4], \quad W_2 = T[2]T[3]T[4]T[5], \quad \dots, \quad W_{17} = T[17]T[18]T[19]T[20]$$

توجه داشته باشید که تعداد $MAX = 20 - 4 + 1 = 17$ زیررشته 4 کاراکتری در T وجود دارد. نمایش رسمی این الگوریتم که در آن P یک رشته R کاراکتری و T یک رشته S کاراکتری است در الگوریتم 3.3 نشان داده شده است.

ملاحظه می‌کنید الگوریتم 3.3 شامل دو حلقه است، یکی از حلقه‌ها داخل حلقه دیگر قرار دارد. حلقه خارجی برای هر زیررشته R کاراکتری متوالی

$$W_K = T[K]T[K+1] \dots T[K+R-1]$$

رشته T اجرا می‌شود. حلقه داخلی P را با W_K ، کاراکتر به کاراکتر مقایسه می‌کند. اگر هیچ کاراکتری تطبیق نکند، در آن صورت کنترل به مرحله S داده می‌شود که K را افزایش می‌دهد و پس از آن منتهی به زیررشته بعدی T می‌شود. اگر تمام R کاراکتر P با کاراکترهای W_K تطابق داشته باشد، آنگاه P در T وجود دارد و K اندیس INDEX الگوی P در T است. از سوی دیگر، اگر حلقه خارجی به پایان تمام مراحل خود برسد ولی در T هیچ P ظاهر نشود در آن صورت $INDEX = 0$.

Algorithm 3.3: (Pattern Matching) P and T are strings with lengths R and S, respectively, and are stored as arrays with one character per element. This algorithm finds the INDEX of P in T.

1. [Initialize.] Set $K := 1$ and $MAX := S - R + 1$.
2. Repeat Steps 3 to 5 while $K \leq MAX$:
3. Repeat for $L = 1$ to R : [Tests each character of P.]
If $P[L] \neq T[K + L - 1]$, then: Go to Step 5.
[End of inner loop.]
4. [Success.] Set $INDEX = K$, and Exit.
5. Set $K := K + 1$.
[End of Step 2 outer loop.]
6. [Failure.] Set $INDEX = 0$.
7. Exit.

پیچیدگی این الگوریتم تطبیق متن به وسیله C تعداد مقایسه بین کاراکترهای الگوی P و کاراکترهای متن T اندازه گرفته می‌شود. برای پیدا کردن C ، فرض می‌کنیم N_k نمایش تعداد مقایسه‌هایی باشد که هنگام مقایسه P با W_k در حلقه داخلی اتفاق می‌افتد. در آن صورت

$$C = N_1 + N_2 + \dots + N_L$$

که در آن L ، مکان L در متن T است که در آن P برای اولین بار در T ظاهر می‌شود یا $L = \text{MAX}$ است اگر P در متن T ظاهر نشده باشد.

مثال بعدی C را برای یک P مشخص و T محاسبه می‌کند که در آن $\text{LENGTH}(P) = 4$ و

$$\text{LENGTH}(T) = 20 \text{ و در نتیجه } \text{MAX} = 20 - 4 + 1 = 17$$

مثال ۹-۳

(الف) فرض کنید $T = \text{cdcd} \dots \text{cd} = (\text{cd})^{10}$. واضح است که P در T ظاهر نشده است. علاوه بر این، برای هر 17 بار اجرای حلقه، $N_k = 1$ ، چون اولین کاراکتر P با W_k مطابقت نمی‌کند. از این رو

$$C = 1 + 1 + 1 + \dots + 1 = 17$$

(ب) فرض کنید $P = \text{aaba}$ و $T = \text{ababaaba} \dots$ ملاحظه می‌کنید که P یک زیررشته T است. در واقع $P = W_5$ و در نتیجه $N_5 = 4$. علاوه بر این از مقایسه P با $W_1 = \text{abab}$ نتیجه می‌گیریم که $N_1 = 2$ ، چون اولین حرف این دو رشته با هم مطابقت دارد اما از مقایسه P با $W_2 = \text{baba}$ ، ملاحظه می‌کنید که $N_2 = 1$ چون اولین حرفهای آنها با هم مطابقت ندارد. به طور مشابه، $N_3 = 2$ و $N_4 = 1$. بنابراین

$$C = 2 + 1 + 2 + 1 + 4 = 10$$

(ج) فرض کنید $P = \text{aaab}$ و $T = \text{aa} \dots \text{a} = \text{a}^{20}$. در اینجا P در T ظاهر نشده است. همچنین هر $W_k = \text{aaaa}$ ، از این رو هر $N_k = 4$ ، چون سه حرف اول P با سه حرف اول T مطابقت می‌کند. بنابراین

$$C = 4 + 4 + \dots + 4 = 17, 4 = 68$$

در حالت کلی، هنگامی که P یک رشته r کاراکتری و T یک رشته s کاراکتر است، اندازه داده‌های این الگوریتم برابر است با:

$$n = r + s$$

بدترین حالت وقتی اتفاق می‌افتد که همانند مثال ۹-۳ (ج) تمام کاراکترهای P بجز آخرین کاراکتر با هر زیررشته W_k مطابقت داشته باشد. در این حالت، $C(n) = r(s - r + 1)$ برای مقدار ثابت n داریم

$$s = n - r \text{ طوری که}$$

$$C(n) = r(n - 2r + 1)$$

مقدار ماگزیمم $C(n)$ وقتی اتفاق می‌افتد که $r = (n + 1)/4$ (مسأله ۱۹-۳ را ببینید) باشد. بنابراین با قراردادن این مقدار به جای r در فرمول مربوط به $C(n)$ نتیجه می‌گیریم:

$$C(n) = \frac{(n+1)^2}{8} = O(n^2)$$

پیچیدگی حالت میانگین در هر وضعیت واقعی، بستگی به حالت‌های احتمالی دارد که معمولاً ناشناخته هستند. هرگاه کاراکترهای P و T به تصادف از روی یکی از حروف الفبا انتخاب شوند، تجزیه و تحلیل پیچیدگی حالت میانگین همچنان مشکل است، اما پیچیدگی حالت میانگین همچنان به صورت ضربی از بدترین حالت است. بنابراین، پیچیدگی این الگوریتم را چنین بیان می‌کنیم: پیچیدگی الگوریتم تطبیق الگو برابر $O(n^2)$ است. به بیان دیگر، زمان موردنیاز برای اجرای این الگوریتم متناسب با n^2 است. (این نتیجه را با نتیجه صفحه ۸۹ مقایسه کنید.)

الگوریتم دوم تطبیق الگو

الگوریتم دوم تطبیق الگو، از جدولی استفاده می‌کند که از یک الگوی خاص P مشتق شده است اما مستقل از متن T است. برای روشن شدن مطلب فرض کنید:

$$P = aaba$$

نخست دلیلی برای درایه‌های جدول اقامه می‌کنیم و چگونگی استفاده از آنها را شرح می‌دهیم. فرض کنید $T = T_1 T_2 T_3 \dots$ که در آن T_i کاراکتر i ام T را نمایش می‌دهد و فرض کنید کاراکتر اول T با دو کاراکتر اول P مطابقت می‌کند یعنی فرض کنید $T = aa \dots$. آنگاه T دارای یکی از سه صورت زیر است:

$$(i) \quad T = aab \dots, \quad (ii) \quad T = aaa \dots, \quad (iii) \quad T = aax$$

که در آن x می‌تواند هر کاراکتر دلخواهی به غیر از a یا b باشد. فرض کنید T_3 را خواندیم و دریافتیم که $T_3 = b$. در آن صورت، بدنبال آن T_4 را می‌خوانیم تا ببینیم آیا $T_4 = a$ است یا خیر. P با W_1 تطابق خواهد داشت. از طرف دیگر، فرض کنید $T_3 = a$. در آن صورت، می‌دانیم که $P \neq W_1$ ، اما همچنین می‌دانیم که $W_2 = aa \dots$ یعنی دو کاراکتر اول زیررشته W_2 با دو کاراکتر اول P مطابقت می‌کند. از این رو بعد از آن T_4 را می‌خوانیم تا ببینیم آیا $T_4 = b$ است. بالاخره، فرض کنید $T_3 = x$. در آن صورت می‌دانیم $P \neq W_1$ ، اما همچنین می‌دانیم که $P \neq W_2$ و $P \neq W_3$ ، چون x در P ظاهر نمی‌شود. از این رو بعد از آن، T_4 را می‌خوانیم تا ببینیم آیا $T_4 = a$ ، یا خیر. یعنی ببینیم که آیا کاراکتر اول W_4 با کاراکتر اول P مطابقت می‌کند یا خیر.

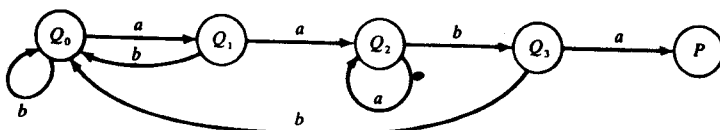
دو نکته قابل توجه و مهم در روش بالا وجود دارد. نخست، هنگام خواندن T_3 ، تنها لازم است T_3 با

آن تعداد از کاراکترها، که در P وجود دارد مقایسه شود. اگر هیچ یک از این کاراکترها مطابقت نداشت، در آن صورت ما در حالت آخری هستیم که کاراکتری مانند x در P وجود ندارد. دوم، پس از خواندن و بررسی T_3 ، T_4 را می‌خوانیم. لازم نیست مجدداً به متن T برگردیم.

شکل ۳-۸ (الف) شامل جدولی است که برای الگوی $P = aaba$ از الگوریتم دوم تطبیق الگو استفاده می‌کند. در هر دو مورد جدول و گراف همراه آن، یعنی الگوی P و زیررشته‌های Q با حروف کج لاتین نمایش داده شده است.

	a	b	x
Q_0	Q_1	Q_0	Q_0
Q_1	Q_2	Q_0	Q_0
Q_2	Q_2	Q_3	Q_0
Q_3	P	Q_0	Q_0

(الف) جدول تطبیق الگو



(ب) گراف تطبیق الگو

شکل ۳-۸

طرز تشکیل جدول به صورت زیر است. قبل از هر کاری، فرض می‌کنیم Q_i نمایش زیررشته اولیه P با طول i باشد. از این رو

$$Q_0 = \Lambda, \quad Q_1 = a, \quad Q_2 = a^2, \quad Q_3 = a^2b, \quad Q_4 = a^2ba = P$$

در اینجا $Q_i = \Lambda$ رشته تهی است. سطرهای این جدول را با زیررشته‌های اولیه P به جزء خود P ، برچسب‌گذاری می‌کنیم. ستونهای این جدول با a ، b ، و x برچسب‌گذاری می‌شوند که در آن x هر کاراکتر دلخواهی می‌تواند باشد که در الگوی P ظاهر نشده است. فرض کنید f تابعی باشد که این جدول معین می‌کند، یعنی فرض کنید تابع

$$f(Q_1, t)$$

درایه سطر Q_1 و ستون t را نمایش دهد که در آن t می‌تواند هر کاراکتر دلخواهی باشد. درایه $f(Q_1, t)$ بنابه تعریف بزرگترین Q ای است که در رشته Q_1 ، یعنی در نتیجه اتصال Q_1 و t به صورت زیررشته نهایی ظاهر می‌شود. برای مثال:

$$a^2 \text{ بزرگترین } Q \text{ ای است که یک زیررشته پایانی } Q_2a = a^3 \text{ است از این رو } Q_2a = a^2$$

$$a \text{ بزرگترین } Q \text{ ای است که یک زیررشته پایانی } Q_1b = ab \text{ است از این رو } Q_1b = a$$

$$a \text{ بزرگترین } Q \text{ ای است که یک زیررشته پایانی } Q_0a = a \text{ است از این رو } Q_0a = a$$

$$a \text{ بزرگترین } Q \text{ ای است که یک زیررشته پایانی } Q_3x = a^2bx \text{ است از این رو } Q_3x = a$$

و الی آخر، اگرچه $Q_1 = a$ زیررشته پایانی $Q_2a = a^3$ است، داریم $f(Q_2, a) = Q_2$ زیرا Q_2 نیز یک زیررشته پایانی $Q_2a = a^3$ است و Q_2 بزرگتر از Q_1 است. توجه دارید که به ازای هر Q ، $f(Q_i, x) = Q_0$ چون x در الگوی P ظاهر نشده است. بنابراین، ستون متناظر با x معمولاً از جدول حذف می‌شود.

جدول را می‌توان با استفاده از گراف جهت‌دار برچسب‌گذاری شده شکل ۸-۳ (ب) رسم کرد. گراف به صورت زیر به دست می‌آید. نخست، متناظر با هر زیررشته اولیه Q_i از P یک گره در گراف وجود دارد. Q ها حالت‌های گراف نامیده می‌شوند و Q حالت اولیه نام دارد. دوم، متناظر با هر درایه در جدول، یک پیکان (یک یال جهت‌دار) در گراف وجود دارد. به‌ویژه این که، اگر

$$f(Q_i, t) = Q_1$$

آنگاه یک پیکان با برچسب t از Q_i به Q_1 وجود دارد. برای مثال، $f(Q_2, b) = Q_3$ از این رو یک پیکان با برچسب b از Q_2 به Q_3 وجود دارد. جهت سهولت در نمادگذاری، تمام پیکان‌های با برچسب x را که اجباراً منتهی به حالت اولیه Q_0 می‌شوند حذف کرده‌ایم. اکنون آماده‌ایم که برای الگوی $P = aaba$ الگوریتم دوم تطبیق الگو را ارائه دهیم. توجه دارید که در بحث زیر، برای نام تمام متغیرهای یک حرفی داخل الگوریتم، از حروف بزرگ استفاده می‌کنیم. فرض کنید $T = T_1T_2T_3...T_N$ نمایش متن رشته n کاراکتری باشد که در آن برای یافتن الگوی P عمل جستجو انجام می‌شود. با شروع از حالت اولیه Q_0 و استفاده از متن T به یک دنباله از حالت‌های S_1, S_2, S_3, \dots به صورت زیر دست می‌یابیم. فرض کنید $S_1 = Q_0$ و اولین کاراکتر T_1 را می‌خوانیم. چه از طریق جدول عمل کنیم و چه از گراف شکل ۸-۳ استفاده کنیم، زوج (S_1, T_1) حالت دوم S_2 را نتیجه می‌دهد یعنی $F(S_1, T_1) = S_2$ ، کاراکتر بعدی T_2 را می‌خوانیم، زوج (S_2, T_2) حالت S_3 را نتیجه می‌دهد و الی آخر. دو حالت ممکن وجود دارد:

(۱) حالت $S_k = P$ ، الگوی موردنظر باشد. در این حالت، P در T وجود دارد و اندیس آن

$K - \text{LENGTH}(P)$ است.

(۲) هیچ حالتی از S_1, S_2, \dots, S_{N+1} برابر P نیست. در این حالت، P در T وجود ندارد. الگوریتم را با استفاده از الگوی $P = aaba$ و دو متن مختلف توضیح می‌دهیم.

مثال ۱۰-۳

(الف) فرض کنید $T = aabcaba$. با شروع از Q_0 و استفاده از کاراکترهای T و گراف (یا جدول) شکل ۳-۸، دنباله حالت‌های زیر به دست می‌آید:

$$Q_0 \xrightarrow{ca} Q_1 \xrightarrow{ca} Q_2 \xrightarrow{cb} Q_3 \xrightarrow{cc} Q_0 \xrightarrow{ca} Q_1 \xrightarrow{cb} Q_0 \xrightarrow{ca} Q_1$$

به حالت P دست نمی‌یابیم، از این رو P در T وجود ندارد.

(ب) فرض کنید $T = abcaabaca$. آنگاه به دنباله حالت‌های زیر دست می‌یابیم:

$$Q_0 \xrightarrow{ca} Q_1 \xrightarrow{cb} Q_0 \xrightarrow{cc} Q_0 \xrightarrow{ca} Q_1 \xrightarrow{ca} Q_2 \xrightarrow{cb} Q_3 \xrightarrow{ca} P$$

در اینجا، در حالت S_8 به الگوی P دست می‌یابیم. از این رو P در T ظاهر شده است و اندیس آن $8 - \text{LENGTH}(P) = 4$ است.

بیان رسمی الگوریتم دوم تطبیق الگو به صورت زیر است:

Algorithm 3.4: (Pattern Matching). The pattern matching table $F(Q_i, T)$ of a pattern P is in memory, and the input is an N -character string $T = T_1T_2 \dots T_N$. This algorithm finds the INDEX of P in T .

1. [Initialize.] Set $K := 1$ and $S_1 = Q_0$.
2. Repeat Steps 3 to 5 while $S_K \neq P$ and $K \leq N$.
 3. Read T_K .
 4. Set $S_{K+1} := F(S_K, T_K)$. [Finds next state.]
 5. Set $K := K + 1$. [Updates counter.]
- [End of Step 2 loop.]
6. [Successful?]
 - If $S_K = P$, then:
 - INDEX = $K - \text{LENGTH}(P)$.
 - Else:
 - INDEX = 0.
 - [End of If structure.]
7. Exit.

زمان اجرای الگوریتم بالا با تعداد دفعات اجرای حلقه مرحله ۲ متناسب است. بدترین حالت وقتی

اتفاق می‌افتد که تمام متن T خوانده شود یعنی هنگامی که حلقه $n = \text{LENGTH}(T)$ بار اجرا شود. بنابراین پیچیدگی الگوریتم بالا را می‌توان به صورت زیر بیان کرد:

پیچیدگی این الگوریتم تطبیق متن برابر $O(n)$ است.

توجه کنید: یک مسأله ترکیباتی را با زمان چندجمله‌ای، حل پذیر گویند اگر به ازای بعضی از مقادیر m یک جواب الگوریتمی با پیچیدگی ای برابر $O(n^m)$ ، وجود داشته باشد و با زمان خطی، حل پذیر گویند اگر یک جواب الگوریتمی با پیچیدگی ای برابر $O(n)$ وجود داشته باشد که در آن n تعداد داده‌ها است. بدین ترتیب حالت دوم دو الگوریتم تطبیق الگو که در این بخش تشریح شده است با زمان خطی حل پذیر هستند. الگوریتم اول تطبیق الگو با زمان چندجمله‌ای حل پذیر است.

مسأله‌های حل شده

اصطلاحات، ذخیره رشته‌ها

مسأله ۱-۳: فرض کنید W رشته $ABCD$ است. (الف) طول W را پیدا کنید. (ب) تمام زیررشته‌های W را بنویسید. (ج) تمام زیررشته‌های اولیه W را بنویسید.

حل: (الف) تعداد کاراکترهای رشته W طول آن است، بنابراین طول W برابر ۴ است.

(ب) هر زیر دنباله‌ای از کاراکترهای W یک زیررشته W است. در W ، ۱۱ زیررشته وجود دارد:

زیررشته‌ها: $ABCD$, ABC , BCD , AB, BC, CD , A, B, C, D , A

طول آنها: 4 3 2 1 0

در اینجا ۸ معرف رشته تهی است.

(ج) زیررشته‌های اولیه عبارتند از $ABCD$ ، ABC ، AB ، A ، یعنی هم رشته تهی و هم زیررشته‌های اولیه با A شروع می‌شوند.

مسأله ۲-۳: فرض کنید یک زبان برنامه‌نویسی حداقل از ۴۸ کاراکتر شامل ۲۶ حرف، ۱۰ رقم و حداقل ۱۲ کاراکتر مخصوص استفاده می‌کند. حداقل تعداد بیتها و تعداد بیتهای متداول برای نمایش یک کاراکتر در حافظه کامپیوتر را به دست آورید.

حل: از آنجا که $2^5 < 48 < 2^6$ ، حداقل یک کد ۶ بیتی برای نمایش این ۴۸ کاراکتر مورد نیاز است. معمولاً یک کامپیوتر از یک کد ۷ بیتی نظیر کد $ASCII$ یا یک کد ۸ بیتی نظیر کد $EBCDIC$ برای نمایش کاراکترها استفاده می‌کند. این کدگذاری‌ها به کامپیوتر اجازه می‌دهند کاراکترهای مخصوص بسیار زیادتری را در

حافظه ایجاد کرده به نمایش و پردازش آنها پردازند.

مسئله ۳-۳: به اختصار سه نوع ساختار مختلف را که برای ذخیره رشته‌ها بکار می‌رود توضیح دهید.

حل: (الف) ساختارهای حافظه با طول ثابت. در این حالت رشته‌هایی که در خانه‌های حافظه ذخیره می‌شود همگی دارای طول مساوی هستند، معمولاً طول حافظه برای رشته‌ها 80 کاراکتر است.

(ب) حافظه با طول متغیر که ماگزیم طول آن ثابت است. در این حالت، رشته‌ها نیز در خانه‌های حافظه ذخیره می‌شوند همگی دارای طول مساوی هستند، بنابراین باید طول واقعی رشته داخل حافظه معلوم باشد.

(ج) حافظه به صورت لیست پیوندی. در اینجا هر خانه حافظه به دو قسمت تقسیم می‌شود، در قسمت اول یک کاراکتر (یا تعداد ثابت کوچکی از کاراکتر) ذخیره می‌شود و قسمت دوم شامل آدرس حافظه کاراکتر بعدی است.

مسئله ۳-۴: رشته ذخیره شده در شکل ۹-۳ را تعیین کنید. فرض می‌شود مقدار پیوند 0 علامت پایان لیست پیوندی است.

START		CHAR LINK	
4	1	OY F	10
	2	ING	7
	3		
	4	A TH	2
	5		
	6	ER.	0
	7	OF B	11
	8	A J	1
	9		
	10	OREV	6
	11	EAUT	12
	12	Y IS	8

شکل ۹-۳

حل: در اینجا رشته در یک ساختمان لیست پیوندی ذخیره می‌شود که هر گره آن شامل 4 کاراکتر است.

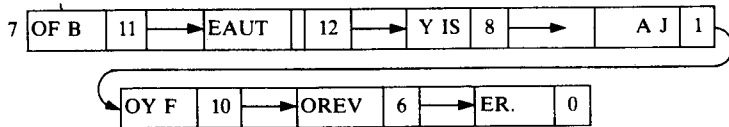
مقدار START، مکان گره اول لیست را به دست می‌دهد:

4	A TH	2
---	------	---

مقدار پیوند در این گره، مکان گره بعدی لیست را به دست می‌دهد:

2	ING	7
---	-----	---

اگر این روش را ادامه بدهیم، دنباله گره‌های زیر به دست می‌آید:



بنابراین رشته ذخیره شده عبارت است از:

A THING OF BEAUTY IS A JOY FOREVER.

مسئله ۵-۳: برخی از (الف) مزایا (ب) معایب استفاده از حافظه پیوندی برای ذخیره رشته‌ها را بیان کنید.

حل: (الف) هنگام استفاده از حافظه پیوندی به راحتی می‌توان عملیات اضافه کردن، حذف کردن، اتصال و جابجایی زیررشته‌ها را انجام داد.

(ب) برای ذخیره پیوندها به حافظه اضافی نیاز است. علاوه براین به کاراکتر وسط لیست مستقیماً نمی‌توان دسترسی پیدا کرد.

مسئله ۶-۳: به اختصار درباره معنی (الف) متغیرهای کاراکتری ایستا (ب) نیمه ایستا (ج) پویا توضیح دهید.

حل: (الف) طول این نوع متغیرها قبل از اجرای برنامه تعریف می‌شود و نمی‌توان طی اجرای برنامه طول آنها را تغییر داد.

(ب) طول این نوع متغیرها می‌تواند طی اجرای برنامه تغییر کند، اما طول متغیر نمی‌تواند از یک مقدار ماکزیممی که قبل از اجرای برنامه تعریف می‌شود بیشتر شود.

(ج) طول این نوع متغیرها می‌تواند طی اجرا برنامه، تغییر کند.

مسئله ۷-۳: فرض کنید MEMBER یک متغیر کاراکتری با طول ثابت 20 است. فرض کنید یک رشته به صورت چیده شده از چپ در خانه حافظه ذخیره می‌شود که فضاهای خالی، طرف راست حافظه را پر

می‌کنند یا سمت راست‌ترین کاراکترها بریده می‌شوند. MEMBER را تحت هر یک از شرایط زیر شرح دهید (الف) اگر 'JOHN PAUL JONES' در MEMBER جایگزین شده باشد (ب) اگر 'ROBERT' 'ANDREW WASHINGTON' در MEMBER جایگزین شده باشد.

حل: داده‌ها به صورت زیر در MEMBER نمایش داده می‌شوند:

J	O	H	N	P	A	U	L		J	O	N	E	S				
---	---	---	---	---	---	---	---	--	---	---	---	---	---	--	--	--	--

(الف)

R	O	B	E	R	T		A	N	D	R	E	W		W	A	S	H	I	N
---	---	---	---	---	---	--	---	---	---	---	---	---	--	---	---	---	---	---	---

(ب)

عملیات بر روی رشته‌ها

در مسأله‌های ۸-۳ تا ۱۱-۳ و ۱۳-۳ فرض کنید S و T متغیرهای کاراکتری باشند، به گونه‌ای که:

S = 'JOHN PAUL JONES'

T = 'A THING OF BEAUTY IS A JOY FOREVER.'

مسأله ۸-۳: یادآور می‌شویم که برای طول یک رشته از LENGTH(string) استفاده می‌کنیم.

(الف) این تابع در زبانهای (الف) PL/I (ii) BASIC ، (iii) UCSD PASCAL ، (iv) SNOBOL و (v)

FORTRAN چگونه نمایش داده می‌شود؟

(ب) مطلوب است تعیین LENGTH(S) و LENGTH(T).

حل: (الف) (i) LENGTH(string) (ii) LEN(string) (iii) LENGTH(string) (iv) SIZE(string)

(v) FORTRAN هیچ تابع طول برای رشته‌ها ندارد. چون این زبان تنها از متغیرهایی با طول ثابت استفاده

می‌کند.

(ب) فرض می‌کنیم بین کلمات تنها یک کاراکتر فضای خالی وجود دارد. از این رو

$$\text{LENGTH}(T) = 35 \text{ و } \text{LENGTH}(S) = 15$$

مسأله ۹-۳: یادآور می‌شویم که برای نمایش زیررشته یک رشته که از مکان معینی شروع شده و دارای

طول مشخص است از SUBSTRING(string, position, length) استفاده می‌کنیم.

مطلوب است تعیین (الف) SUBSTRINGS(S, 4, 8) و (ب) SUBSTRING(T, 10, 5).

حل: (الف) با شروع از کاراکتر چهارم و ثبت ۸ کاراکتر، داریم:

SUBSTRING(S, 4, 8) = 'NPAULJ'

(ب) به طور مشابه: SUBSTRING(T, 10, 5) = 'FBEAU'

مسئله ۱۰-۳: یادآور می‌شویم که برای نمایش مکانی که یک الگو برای نخستین بار در متن T ظاهر می‌شود، از INDEX(TEXT, PATTERN) استفاده می‌کنیم. در این تابع مقدار 0 جایگزین می‌شود اگر الگو در متن ظاهر نشده باشد. مطلوب است تعیین

(الف) INDEX(S, 'JO'), (ب) INDEX(S, 'JOY'), (ج) INDEX(S, 'JO'),
 (د) INDEX(T, 'A'), (ه) INDEX(T, 'A'), (و) INDEX(T, 'THE')
 حل: (الف) INDEX(S, 'JO') = 1, (ب) INDEX(S, 'JOY') = 0, (ج) INDEX(S, 'JO') = 10, (د) INDEX(T, 'A') = 1, (ه) INDEX(T, 'A') = 21, (و) INDEX(T, 'THE') = 0

یادآوری می‌کنیم که □ برای نمایش یک فضای خالی مورد استفاده قرار می‌گیرد.

مسئله ۱۱-۳: یادآور می‌شویم که برای نمایش اتصال دو رشته S₁ و S₂ از S₁ // S₂ استفاده می‌کنیم. (الف) این تابع در زبانهای (i) PL/I (ii) FORTRAN (iii) BASIC (iv) SNOBOL (v) UCSD PASCAL چگونه نمایش داده می‌شود؟

(ب) مطلوب است تعیین (i) 'THE' // 'END' و (ii) 'THE' // 'END' □.

(ج) مطلوب است تعیین (i) SUBSTRING(S, 1, 9) // '□', (ii) SUBSTRING(S, 11, 5) و

(ii) 'GIVEN' // SUBSTRING(T, 28, 3).

حل: (الف) (i) S₁ // S₂, (ii) S₁ // S₂, (iii) S₁ + S₂, (iv) S₁ S₂ (بین S₁ و S₂ یک فضای خالی وجود دارد) (v) CONCAT(S₁, S₂)

(ب) منظور از S₁ // S₂ رشته‌ای است که از کاراکترهای S₁ و بدنبال آن کاراکترهای S₂ تشکیل شده باشد.

از این رو (i) THEEND (ii) THE END.

(ج) (i) JONES, JOHN PAUL (ii) FORGIVEN.

مسئله ۱۲-۳: یادآور می‌شویم که برای نمایش اضافه کردن یک رشته S در یک متن داده شده T با شروع از مکان K از INSERT(text, position, string) استفاده می‌کنیم.

(الف) مطلوب است تعیین (i) INSERT('AAAAA', 1, 'BBB'),

(ii) و INSERT('AAAAA', 3, 'BBB') (iii) INSERT('AAAAA', 6, 'BBB')

(ب) فرض کنید T متن 'THE STUDENT IS ILL' باشد. با استفاده از INSERT، T را طوری تغییر

دهید که (i) The student is very ill (ii) The student is ill today

و (iii) The student is very ill today را بخواند.

حل: (الف) (i) BBBAAAAA, (ii) AABBBAAA, (iii) AAAAABBB.

(ب) دقت کنید در جاهای لازم فضاهای خالی بگنجانید. (i) INSERT(T, 15, '□ VERY')

(ii) INSERT(T, 19, '□ TODAY') (iii) INSERT(INSERT(T, 19, '□ TODAY'), 15, '□ VERY')

. INSERT(INSERT(T, 15, '□ VERY'), 24, '□ TODAY')

مسأله ۱۳-۳: مطلوب است تعیین

DELETE('JOHN PAUL JONES', 6, 5) و DELETE('AAABBB', 2, 2) (الف)

و REPLACE('AAABBB', 'AA', 'BB') (ب)

REPLACE('JOHN PAUL JONES', 'PAUL', 'DAVID')

حل: (الف) DELETE(T, K, L) از متن T زیررشته‌ای را حذف می‌کند که از مکان K شروع شده طول L

دارد. از این‌رو جوابها عبارتند از ABBB و JOHN JONES .

(ب) REPLACE(T, P₁, P₂) در متن T اولین وقوع الگوی P₁ توسط الگوی P₂ جانشین می‌شود. از

این‌رو جوابها عبارتند از BBABBB و JOHN DAVID JONES .

پردازش کلمه

در مسأله‌های ۱۴-۳ تا ۱۷-۳، S یک داستان کوتاه است که در یک آرایه خطی LINE با n عنصر

به گونه‌ای ذخیره شده است که در آن هر LINE[K] یک متغیر کاراکتری ایستا با قدرت ذخیره‌سازی 80

کاراکتر است و یک خط از داستان را نمایش می‌دهد. همچنین LINE[1] یعنی اولین خط داستان تنها

شامل عنوان داستان است و LINE[N] آخرین خط داستان تنها شامل نام نویسنده است. علاوه بر این، هر

پاراگراف با 5 فضای خالی شروع می‌شود و در هیچ کجای داستان بجز احتمالاً در عنوان LINE[1] یا نام

نویسنده LINE[N] هیچ تورفتگی مانند ابتدای پاراگراف وجود ندارد.

مسأله ۱۴-۳: یک زیربرنامه Procedure بنویسید تا NUM تعداد پاراگرافهای داستان کوتاه S را بشمارد.

حل: از خط LINE[2] شروع می‌کنیم و با خط LINE [N - 1] شمارش تعداد خطوط را که با 5 فضای

خالی شروع می‌شود به پایان می‌بریم. زیربرنامه به صورت زیر است:

Procedure P3.14: PAR(LINE, N, NUM)

1. Set NUM := 0 and BLANK := '□□□□□'.
2. [Initialize counter.] Set K := 2.
3. Repeat Steps 4 and 5 while K ≤ N - 1.
4. [Compare first 5 characters of each line with BLANK.]
If SUBSTRING(LINE[K], 1, 5) = BLANK, then:
Set NUM := NUM + 1.
[End of If structure.]
5. Set K := K + 1. [Increments counter.]
[End of Step 3 loop.]
6. Return.

مسئله ۱۵-۳: یک زیربرنامه `procedure` بنویسید تا `NUM` تعداد دفعاتی را که کلمه `the` در این داستان کوتاه `S` ظاهر می‌شود بشمارد. `the` در کلمه `mother` را در شمارش شرکت ندهید و فرض می‌شود که هیچ جمله‌ای با کلمه `the` پایان نمی‌یابد.

حل: توجه دارید که کلمه `the` می‌تواند به صورت `THE` در آغاز یک خط، به صورت `THE` در پایان یک خط یا به صورت `THE` در هر جای دیگری از یک خط می‌تواند ظاهر شود. از این‌رو برای هر خط باید این سه حالت را مورد توجه قرار دهیم. زیربرنامه به صورت زیر است:

Procedure P3.15: COUNT(LINE, N, NUM)

1. Set WORD := 'THE' and NUM := 0.
2. [Prepare for the three cases.]
Set BEG := WORD // '□', END := '□' // WORD and
MID := '□' // WORD // '□'.
3. Repeat Steps 4 through 6 for K = 1 to N:
4. [First case.] If SUBSTRING(LINE[K], 1, 4) = BEG, then:
Set NUM := NUM + 1.
5. [Second case.] If SUBSTRING(LINE[K], 77, 4) = END, then:
Set NUM := NUM + 1.
6. [General case.] Repeat for J = 2 to 76.
If SUBSTRING(LINE[K], J, 5) = MID, then:
Set NUM := NUM + 1.
[End of If structure.]
- [End of Step 6 loop.]
- [End of Step 3 loop.]
7. Return.

مسئله ۱۶-۳: چنانچه بخواهیم تعداد دفعات وقوع کلمه دلخواهی مانند `W` را با طول `r` بشماریم توضیح دهید چه تغییراتی باید در `Procedure P3.15` بدهیم.

حل: لازم است سه نوع تغییر اصلی در این زیربرنامه داده شود.

(الف) واضح است که در مرحله ۱ باید `THE` به `W` تغییر داده شود.

(ب) از آنجا که طول `W` برابر `r` است و نه ۳ از این‌رو باید تغییرات مناسب در مراحل ۳ تا ۶ داده شود.

(ج) علاوه بر این باید این امکان در نظر گرفته شود که بعد از `W` می‌تواند علامت نقطه گذاری نظیر

`W, W; W. W?`

باشد. از این‌رو بیشتر از سه حالت باید مورد بررسی قرار گیرد.

مسئله ۱۷-۳: الگوریتمی را شرح دهید که پاراگرافهای `K` ام و `L` ام داستان کوتاه `S` را جابجا می‌کند.

حل: الگوریتم را به دو زیربرنامه `Procedure` تجزیه می‌کنیم.

زیربرنامه `A`، `Procedure A`: مقادیر آرایه‌های `BEG` و `END` را پیدا می‌کند که در آن

`LINE[END[K]]` و `LINE[BEG[K]]`

به ترتیب شامل اولین و آخرین خط پاراگراف K ی داستان S است.
 زیربرنامه B ، Procedure B : با استفاده از مقادیر END[K] و BEG[K] و مقادیر END[L] و BEG[L]
 بلاک خطوط پاراگراف K با بلاک خطوط پاراگراف L جابجا می‌شود.

تطبیق الگو

مسئله ۱۸-۳: برای هر یک از الگوهای P و متنهای T زیر، C تعداد مقایسه‌هایی را پیدا کنید که با آن INDEX اندیس P در T با استفاده از الگوریتم "آرام"، الگوریتم ۳-۳ به دست می‌آید.

(الف) $P = abc, T = (ab)^5 = ababababab$ (ج) $P = aaa, T = (aabb)^3 = aabb aabb aabb$

(ب) $P = abc, T = (ab)^{2n}$ (د) $P = aaa, T = abaabb aaabbb aaabbbb$

حل: خاطر نشان می‌کنیم که $C = N_1 + N_2 + \dots + N_L$ که در آن N_k تعداد مقایسه‌هایی را نشان می‌دهد که هنگام مقایسه P با W_k در حلقه داخلی انجام می‌شود.

(الف) نخست توجه داشته باشید که تعداد

$$\text{LENGTH}(T) - \text{LENGTH}(P) + 1 = 10 - 3 + 1 = 8$$

زیررشته W_k وجود دارد. داریم:

$$C = 2 + 1 + 2 + 1 + 2 + 1 + 2 + 1 = 4(3) = 12$$

و $\text{INDEX}(T, P) = 0$ چون P در T ظاهر نشده است.

(ب) تعداد $2n - 3 + 1 = 2(n - 1) + 1$ زیرکلمه W_k وجود دارد. داریم:

$$C = 2 + 1 + 2 + 1 + \dots + 2 + 1 = (n + 1)(3) = 3n + 3$$

و $\text{INDEX}(T, P) = 0$

(ج) تعداد $12 - 3 + 1 = 10$ زیرکلمه W_k وجود دارد. داریم:

$$C = 3 + 2 + 1 + 1 + 3 + 2 + 1 + 1 + 3 + 2 = 19$$

و $\text{INDEX}(T, P) = 0$

(د) داریم:

$$C = 2 + 1 + 3 + 2 + 1 + 1 + 3 = 13$$

و $\text{INDEX}(T, P) = 7$

مسئله ۱۹-۳: فرض کنید P یک رشته r کاراکتری و T یک رشته s کاراکتری باشد و فرض کنید هنگامی که الگوریتم ۳-۳ بر P و T اعمال می‌شود C(n) نمایش تعداد مقایسه‌های صورت گرفته باشد. در اینجا

$$. n = r + s$$

(الف) $C(n)$ پیچیدگی بهترین حالت را پیدا کنید.

(ب) ثابت کنید مقدار ماگزیمم $C(n)$ وقتی اتفاق می‌افتد که $r = (n+1) / 4$

حل: (الف) بهترین حالت وقتی اتفاق می‌افتد که P یک زیررشته اولیه T باشد یا به عبارت دیگر وقتی

که $INDEX(T, P) = 1$ در این حالت $C(n) = r$. (فرض می‌کنیم $r \leq s$)

(ب) بنا به بحث بخش ۷-۳،

$$C = C(n) = r(n - 2r + 1) = nr - 2r^2 + r$$

در اینجا n ثابت است از این رو $C = C(n)$ را می‌توان به صورت تابعی از r در نظر گرفت. حساب

دیفرانسیل و انتگرال می‌گوید ماگزیمم مقدار C وقتی اتفاق می‌افتد که $C' = dC/dr = 0$ در اینجا C'

مشتق C نسبت به r است. با استفاده از حساب دیفرانسیل و انتگرال به دست می‌آید:

$$C' = n - 4r + 1$$

با قراردادن $C' = 0$ و حل آن نسبت به r نتیجه مورد نظر به دست می‌آید.

مسئله ۲۰-۳: الگوی $P = aaabb$ را در نظر بگیرید. جدول و گراف جهت‌دار برچسب‌گذاری شده متناظر

با آن را که در الگوریتم "سریع" یا الگوریتم دوم تطبیق الگو مورد استفاده قرار گرفت، رسم کنید.

حل: نخست لیست قطعه‌های اولیه P را می‌نویسیم:

$$Q_0 = \Lambda, \quad Q_1 = a, \quad Q_2 = a^2, \quad Q_3 = a^3, \quad Q_4 = a^3b, \quad Q_5 = a^3b^2$$

برای هر کاراکتر t ، درایه $f(Q_i, t)$ جدول بزرگترین Q ای است که به صورت یک زیررشته انتهایی در

رشته $Q_i t$ ظاهر می‌شود. محاسبه می‌کنیم:

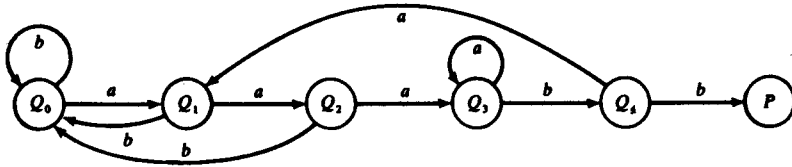
$$\begin{array}{llllll} f(\Lambda, a) = a, & f(a, a) = a^2, & f(a^2, a) = a^3, & f(a^3, a) = a^3, & f(a^3b, a) = a \\ f(\Lambda, b) = \Lambda, & f(a, b) = \Lambda, & f(a^2, b) = \Lambda, & f(a^3, b) = a^3b, & f(a^3b, b) = P \end{array}$$

از این رو جدول مورد نظر در شکل ۱۰-۳ (الف) ارائه شده است.

	a	b
Q_0	Q_1	Q_0
Q_1	Q_2	Q_0
Q_2	Q_3	Q_0
Q_3	Q_3	Q_4
Q_4	Q_4	P

شکل ۱۰-۳ (الف)

گراف متناظر با آن در شکل ۳-۱۰ (ب) رسم شده است که در آن برای هر Q یک گره وجود دارد و پیکان از Q_i و Q_j برای هر درایه $f(Q_i, t) = Q_j$ داخل جدول با کاراکتر t برچسب‌گذاری شده است.



شکل ۳-۱۰ (ب)

مسئله ۳-۲۱: جدول و گراف متناظر با آن را برای الگوریتم دوم تطبیق الگو که در آن $P = ababab$ الگو است رسم کنید.

حل: زیررشته‌های اولیه P عبارتند از:

$$Q_0 = \Lambda, \quad Q_1 = a, \quad Q_2 = ab, \quad Q_3 = aba, \quad Q_4 = abab, \quad Q_5 = ababa, \quad Q_6 = ababab = P$$

تابع f درایه‌های جدول را به صورت زیر به دست می‌دهد:

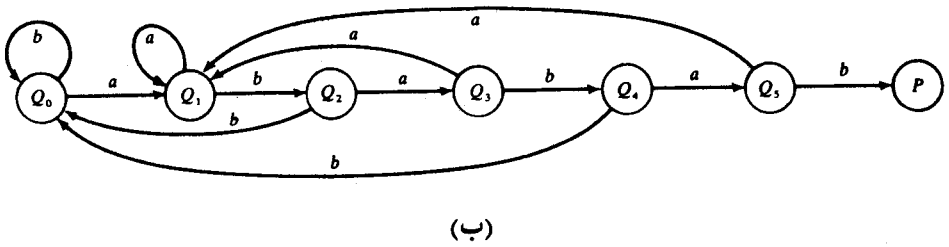
$$\begin{aligned} f(\Lambda, a) &= a \\ f(a, a) &= a \\ f(ab, a) &= aba \\ f(aba, a) &= a \\ f(abab, a) &= ababa \\ f(ababa, a) &= a \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(\Lambda, b) &= \Lambda \\ f(a, b) &= ab \\ f(ab, b) &= \Lambda \\ f(aba, b) &= abab \\ f(abab, b) &= \Lambda \\ f(ababa, b) &= P \end{aligned}$$

جدول در شکل ۳-۱۱ (الف) و گراف متناظر با آن در شکل ۳-۱۱ (ب) آمده است.

	a	b
Q_0	Q_1	Q_0
Q_1	Q_1	Q_2
Q_2	Q_3	Q_0
Q_3	Q_1	Q_4
Q_4	Q_5	Q_0
Q_5	Q_1	P

(الف)



شکل ۳-۱۱

مسئله‌های تکمیلی

رشته‌ها

مسئله ۳-۲۲: رشته ذخیره شده در شکل ۳-۱۲ را به دست آورید.

START	CHAR	LINK
<div style="border: 1px solid black; padding: 2px; display: inline-block;">5</div> <div style="margin-left: 10px;"> ↓ ↓ ↓ ↓ ↓ ↓ ↓ ↓ ↓ ↓ ↓ </div>	1 UNIT	11
	2 HE P	8
	3	
	4 S	0
	5 WE T	2
	6 THE	1
	7	
	8 EQPL	12
	9 TATE	4
	10	
	11 ED S	9
	12 E OF	6

شکل ۳-۱۲

مسئله ۳-۲۳: رشته $W = 'XYZST'$ را در نظر بگیرید. (الف) تمام زیررشته‌های W و

(ب) تمام زیررشته‌های ابتدایی W را بنویسید.

مسئله ۲۴-۳: فرض کنید W یک رشته به طول n است. مطلوب است تعیین تعداد (الف) زیررشته‌های W و (ب) زیررشته‌های ابتدایی W.

مسئله ۲۵-۳: فرض کنید STATE یک متغیر کاراکتری با طول ثابت 12 است. محتوای STATE را پس از جایگزینی‌های زیر توضیح دهید. (الف) STATE := 'NEW YORK' و (ج) STATE := 'PENNSYLVANIA'

(ب) STATE := 'SOUTH CAROLINA' و (ج) STATE := 'PENNSYLVANIA'

عملیات بر روی رشته‌ها

در مسئله‌های ۲۶-۳ تا ۳۱-۳ فرض کنید S و T متغیرهای کاراکتری هستند به طوری که

S = 'WE THE PEOPLE' و T = 'OF THE UNITED STATES'.

مسئله ۲۶-۳: طول S و T را تعیین کنید.

مسئله ۲۷-۳: مطلوب است تعیین (الف) SUBSTRING(S, 4, 8) و (ب) SUBSTRING(T, 10, 5).

مسئله ۲۸-۳: مطلوب است تعیین (الف) INDEX(S, 'P') و (ب) INDEX(S, 'E')

(ج) INDEX(S, 'THE') (د) INDEX(T, 'THE') (ه) INDEX(T, 'THEN') و

(و) INDEX(T, 'TE')

مسئله ۲۹-۳: با استفاده از S₁ // S₂ به عنوان اتصال دو رشته S₁ و S₂، مطلوب است تعیین

(الف) 'NO' // 'EXIT' (ب) 'NO' // 'EXIT' و 'NO' // 'EXIT'

(ج) SUBSTRING(S, 4, 10) // 'ARE' // SUBSTRING(T, 8, 6)

مسئله ۳۰-۳: مطلوب است تعیین (الف) DELETE('AAABBB', 3, 3)

(ب) DELETE('AAABBB', 1, 4) / DELETE(S, 1, 3) و (د) DELETE(T, 1, 7)

مسئله ۳۱-۳: مطلوب است تعیین (الف) REPLACE('ABABAB', 'B', 'BAB')

(ب) REPLACE(S, 'WE', 'ALL') و (ج) REPLACE(T, 'THE', 'THESE')

مسئله ۳۲-۳: مطلوب است تعیین (الف) INSERT('AAA', 2, 'BBB')

(ب) INSERT('ABCDE', 3, 'XYZ') و (ج) INSERT('THE BOY', 5, 'BIG')

مسئله ۳۳-۳: فرض کنید U متن 'MARC STUDIES MATHEMATICS' باشد. با استفاده از INSERT

متن U را طوری تغییر دهید که (الف) MARC STUDIES ONLY MATHEMATICS

(ب) MARC STUDIES MATHEMATICS AND PHYSICS (ج) MARC STUDIES APPLIED

MATHEMATICS را بخواند.

تطبیق الگو

مسئله ۳-۳۴: الگوی $P = abc$ را در نظر بگیرید. با استفاده از الگوریتم تطبیق الگو "آرام" یعنی الگوریتم ۳-۳، تعداد مقایسه‌هایی را پیدا کنید که با آنها INDEX اندیس P در هر یک از متنهای T زیر به دست می‌آید:

(الف) a^{10} ، (ب) $(aba)^{10}$ ، (ج) $(cbab)^{10}$ (د) d^{10} و (ه) d^n که در آن $n > 3$ است.

مسئله ۳-۳۵: الگوی $P = a^5b$ را در نظر بگیرید. مسئله ۳-۳۴ را با هر یک از متنهای T زیر مجدداً حل کنید:

(الف) a^{20} (ب) a^n که در آن $n > 6$ (ج) d^{20} و (د) d^n که در آن $n > 6$ است.

مسئله ۳-۳۶: الگوی $P = a^3ba$ را در نظر بگیرید. جدول و گراف جهت‌دار برجسب‌گذاری شده متناظر با آن را که در الگوریتم تطبیق الگو "سریع" مورد استفاده قرار گرفت رسم کنید.

مسئله ۳-۳۷: مسئله ۳-۳۶ را برای الگوی $P = aba^2b$ مجدداً حل کنید.

برای مسئله‌های زیر برنامه بنویسید

در مسئله‌های ۳-۳۸ تا ۳-۴۰، فرض می‌شود که پیشگفتار این متن در یک آرایه خطی LINE ذخیره شده است به طوری که $LINE[K]$ یک متغیر کاراکتری ایستا با قدرت ذخیره 80 کاراکتر است و یک خط از پیشگفتار را نمایش می‌دهد. فرض کنید هر پاراگراف با 5 فضای خالی شروع می‌شود و در هیچ جای دیگر پیشگفتار تورفتگی وجود ندارد. علاوه بر این فرض می‌شود یک متغیر NUM وجود دارد که تعداد خطوط پیشگفتار را به دست می‌دهد.

مسئله ۳-۳۸: یک برنامه بنویسید که یک آرایه خطی PAR را معین می‌کند به گونه‌ای که $PAR[K]$ حاوی مکان K ام پاراگراف است و علاوه بر این یک متغیر NPAR را معین می‌کند که حاوی تعداد پاراگرافها است.

مسئله ۳-۳۹: یک برنامه بنویسید که یک کلمه WORD داده شده را بخواند و C تعداد دفعاتی را که WORD در LINE ظاهر شده است را بشمارد. برنامه را با استفاده از (الف) $WORD = 'THE'$ و (ب) $WORD = 'HENCE'$ آزمایش کنید.

مسئله ۳-۴۰: یک برنامه بنویسید که پاراگرافهای J ام و K ام را جابجا کند. برنامه را با استفاده از $J = 2$ و $K = 2$ آزمایش کنید.

در مسئله‌های ۳-۴۱ تا ۳-۴۶ فرض می‌شود که پیشگفتار این متن در یک متغیر کاراکتری TEXT ذخیره شده است. فرض کنید 5 فضای خالی مبین یک پاراگراف جدید است.

مسئله ۳-۴۱: یک برنامه بنویسید که یک آرایه خطی PAR را به گونه‌ای ایجاد کند که PAR[K] حاوی مکان پاراگراف K ام در TEXT باشد همچنین مقدار یک متغیر NPAR را پیدا کند که حاوی تعداد پاراگرافها است. این مسئله را با مسئله ۳-۳۸ مقایسه کنید.

مسئله ۳-۴۲: یک برنامه بنویسید که یک کلمه WORD داده شده را بخواند و آنگاه C تعداد دفعاتی را که WORD در TEXT ظاهر شده است را بشمارد. برنامه را با استفاده از (الف) 'THE' = WORD و (ب) 'HENCE' = WORD آزمایش کنید. این مسئله را با مسئله ۳-۳۹ مقایسه کنید.

مسئله ۳-۴۳: یک برنامه بنویسید که پاراگرافهای J ام و K ام متن TEXT را جابجا کند. این برنامه را با استفاده از $J = 2$ و $K = 4$ آزمایش کنید. این مسئله را با مسئله ۳-۴۰ مقایسه کنید.

مسئله ۳-۴۴: یک برنامه بنویسید که کلمه‌های WORD1 و WORD2 را بخوانید و آنگاه هر وقوع WORD1 در TEXT توسط WORD2 جایگزین گردد. برنامه را با استفاده از 'HENCE' = WORD1 و 'THUS' = WORD2 آزمایش کنید.

مسئله ۳-۴۵: یک زیربرنامه INST(TEXT, NEW, K) بنویسید که رشته NEW را در داخل متن TEXT در آغاز [K] TEXT اضافه کند.

مسئله ۳-۴۶: یک زیربرنامه PRINT(TEXT, K) بنویسید که رشته کاراکتری TEXT را در خطوطی با حداکثر K کاراکتر چاپ کند. هیچ کلمه‌ای به دو قسمت تقسیم نشده و در دو خط ظاهر نمی‌شود، از اینرو برخی از خطوط می‌توانند شامل چند فضای خالی در انتهایشان باشند. هر پاراگراف با خط مربوطه‌اش شروع شده و به کمک 5 فضای خالی تورفتگی دارد. برنامه را با استفاده از (الف) $K = 80$ (ب) $K = 70$ و (ج) $K = 60$ آزمایش کنید.

فصل ۴

آرایه‌ها، رکوردها و اشاره‌گرها

۱-۴ مقدمه

ساختمان داده‌ها به دو دسته خطی و غیرخطی تقسیم می‌شود. یک ساختمان داده را خطی گویند، هرگاه عناصر آن تشکیل یک دنباله دهند، به بیان دیگر یک لیست خطی باشد. برای نمایش ساختمان داده خطی در حافظه، دو روش اساسی وجود دارد. یکی از این روشها، عبارت است از داشتن رابطه خطی بین عناصری که به وسیله خانه‌های متوالی حافظه نمایش داده می‌شود. این ساختارهای خطی آرایه‌ها نام دارند که موضوع اصلی این فصل را تشکیل می‌دهد. روش دیگر عبارت است از داشتن رابطه خطی بین عناصری که به وسیله اشاره‌گرها یا پیوندها نمایش داده می‌شود. این ساختارهای خطی لیستهای پیوندی نام دارند که موضوع اصلی مطالب فصل ۵ را تشکیل می‌دهد. ساختارهای غیرخطی نظیر درختها و گرافها در فصل‌های بعد مورد مطالعه قرار می‌گیرد.

عملیاتی که معمولاً بر روی یک ساختار خطی انجام می‌شود خواه این ساختار آرایه باشد یا یک لیست پیوندی، شامل عملیات زیر است :

(الف) پیمایش. پردازش هر عنصر داخل لیست را پیمایش گویند.

(ب) جستجو کردن. پیدا کردن مکان یک عنصر با یک مقدار داده‌شده یا رکورد با یک کلید معین را

جستجو کردن گویند.

(ج) اضافه کردن. افزودن یک عنصر جدید به لیست را اضافه کردن گویند.

(د) حذف کردن. حذف یک عنصر از لیست را حذف کردن گویند.

(ه) مرتب کردن. تجدید آرایش عناصر با یک نظم خاص را مرتب کردن گویند.

(و) ادغام کردن. ترکیب دو لیست در یک لیست را ادغام کردن گویند.

ساختار خطی خاصی که برای یک وضعیت معین انتخاب می‌شود بستگی به تعداد دفعاتی دارد که عملیات مختلف بالا روی ساختار اجرا می‌شود.

این فصل یک ساختار خطی کاملاً متداولی را مورد بررسی قرار می‌دهد که آرایه نام دارد. از آنجا که پیمایش، جستجو و مرتب کردن آرایه معمولاً ساده است از آنها اغلب برای ذخیره مجموعه‌هایی از داده‌های نسبتاً دائمی استفاده می‌شود. از سوی دیگر، اگر اندازه ساختار و داده‌های آن پیوسته در حال تغییر باشد آنگاه آرایه نمی‌تواند به خوبی ساختاری نظیر لیست پیوندی باشد که در فصل ۵ بررسی می‌شود.

۲-۴ آرایه‌های خطی

یک آرایه خطی لیستی از n یا تعداد متناهی عنصر داده‌ای همجنس است (یعنی عناصر داده‌ای از یک نوع هستند) بطوری که:

(الف) به عناصر آرایه به ترتیب به کمک یک مجموعه از اندیس‌ها که شامل n عدد متوالی است رجوع می‌شود.

(ب) عناصر آرایه به ترتیب در خانه‌های متوالی حافظه ذخیره می‌شوند.

n یا تعداد عناصر آرایه طول یا اندازه آرایه نام دارد. اگر به صراحت بیان نشود فرض می‌کنیم که مجموعه اندیس‌ها شامل اعداد صحیح ۱، ۲، ...، n است. در حالت کلی، طول یا تعداد عناصر داده‌ای آرایه را می‌توان از مجموعه اندیس‌ها به کمک فرمول زیر به دست آورد:

$$(۴-۱) \quad \text{طول} = UB - LB + 1$$

که در آن UB بزرگترین اندیس یا کران بالای آرایه و LB کوچکترین اندیس یا کران پائین آرایه است. توجه دارید که وقتی $LB = 1$ باشد طول آرایه برابر UB است.

عناصر یک آرایه A را می‌توان با نماد اندیس‌گذاری

$$A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$$

یا با نماد پرازنگذاری (که در BASIC، PL / I، FORTRAN و بکار می‌رود)

$$A(1), A(2), \dots, A(N)$$

یا با نماد کروشهای (که در PASCAL بکار می‌رود)

$A[1], A[2], A[3], \dots, A[N]$

نمایش داد. ما معمولاً از نماد اندیس‌گذاری یا نماد کروشهای استفاده می‌کنیم. عدد K در $A[K]$ زیرنویس یا اندیس و $A[K]$ یک متغیر اندیس‌دار نام دارد. توجه دارید که اندیس‌ها اجازه می‌دهند به مکان نسبی هر عنصر A دسترسی پیدا کنیم.

مثال ۴-۱

(الف) فرض کنید DATA یک آرایه خطی 6 عنصری از اعداد صحیح باشد به طوری که

$DATA[1] = 247$ $DATA[2] = 56$ $DATA[3] = 429$ $DATA[4] = 135$ $DATA[5] = 87$ $DATA[6] = 156$

گاهی اوقات ما این آرایه را فقط با نوشتن

DATA: 247, 56, 429, 135, 87, 156

نمایش می‌دهیم. آرایه DATA غالباً به صورت شکل ۴-۱ (الف) یا شکل ۴-۱ (ب) نمایش داده می‌شود.

DATA					
247	56	429	135	87	156
1	2	3	4	5	6

(ب)

DATA	
1	247
2	56
3	429
4	135
5	87
6	156

(الف)

شکل ۴-۱

(ب) یک شرکت فروشنده اتومبیل از یک آرایه AUTO برای ثبت تعداد اتومبیل‌های فروخته شده هر سال از 1932 تا 1984 استفاده می‌کند. بجای اینکه مجموعه اندیسها از 1 شروع شود، بهتر است از 1932 شروع شود، طوری که :

$\text{AUTO}[K] = \text{تعداد اتومبیل‌های فروخته‌شده در سال } K$

آنگاه $\text{LB} = 1932$ کران پائین و $\text{UB} = 1984$ کران بالای آرایه AUTO است.

با توجه به فرمول (۱-۴)

$$\text{طول} = \text{UB} - \text{LB} + 1 = 1984 - 1930 + 1 = 55$$

یعنی AUTO شامل 55 عنصر است و مجموعه اندیسی آن شامل تمام اعداد صحیح از 1932 تا 1984 است.

هر زبان برنامه‌نویسی قاعده و روش خاصی برای معرفی آرایه‌ها دارد. هر یک از این روشها، به صورت صریح یا ضمنی، سه نوع اطلاعات را در مورد آرایه‌ها به دست می‌دهند که عبارتند از: (۱) نام آرایه (۲) نوع داده آرایه و (۳) مجموعه اندیسهای آرایه.

مثال ۲-۴

(الف) فرض کنید DATA یک آرایه خطی 6 عنصری از اعداد اعشاری باشد. زبانهای برنامه‌نویسی مختلف زیر این آرایه را به صورت زیر معرفی می‌کنند:

FORTRAN:	REAL DATA(6)
PL/1:	DECLARE DATA(6) FLOAT;
Pascal:	VAR DATA: ARRAY[1..6] OF REAL

ما این آرایه را در صورت نیاز به صورت $\text{DATA}(6)$ معرفی خواهیم کرد. متن مورد بررسی نوع داده را مشخص می‌کند از این رو نوع آرایه به صراحت بیان نمی‌شود.

(ب) آرایه صحیح AUTO را با کران پائین $\text{LB} = 1932$ و کران بالای $\text{UB} = 1984$ در نظر بگیرید. زبانهای برنامه‌نویسی مختلف زیر این آرایه را به صورت زیر معرفی می‌کنند:

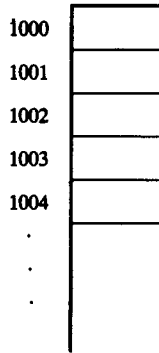
FORTRAN 77	INTEGER AUTO(1932:1984)
PL/1:	DECLARE AUTO(1932:1984) FIXED;
Pascal	VAR AUTO: ARRAY[1932..1984] OF INTEGER

ما این آرایه را به صورت $\text{AUTO}(1932 : 1984)$ معرفی خواهیم کرد.

برخی از زبانهای برنامه‌نویسی مانند **FORTRAN** و **PASCAL** برای آرایه‌ها به صورت ایستا یعنی در زمان کامپایل برنامه حافظه اختصاص می‌دهند. از این رو اندازه آرایه در طول اجرای برنامه ثابت است. از طرف دیگر، برخی از زبانهای برنامه‌نویسی اجازه می‌دهند یک عدد صحیح n خوانده شود و آنگاه آرایه n عنصری را معرفی می‌کنند. در این گونه زبانهای برنامه‌نویسی گفته می‌شود حافظه به صورت پویا به برنامه اختصاص می‌یابد.

۳-۴ نمایش آرایه‌های خطی در حافظه

فرض کنید LA یک آرایه خطی در حافظه کامپیوتر باشد. یادآوری می‌کنیم که حافظه کامپیوتر فقط یک دنباله از مکانهای دارای آدرس است که در شکل ۲-۴ به تصویر کشیده شده است.



شکل ۲-۴ - حافظه کامپیوتر

اجازه دهید از نماد زیر استفاده کنیم:

$$\text{LOC}(\text{LA}[\text{K}]) = \text{آدرس عنصر LA}[\text{K}] \text{ ی آرایه LA}$$

همانگونه که قبلاً متذکر شدیم، عناصر LA در خانه‌های متوالی ذخیره می‌شوند. بنابراین لازم نیست کامپیوتر آدرس هر عنصر LA را داشته باشد بلکه فقط لازم است آدرس اولین عنصر LA را بداند که ما آن را به صورت زیر نمایش می‌دهیم:

$$\text{Base}(\text{LA})$$

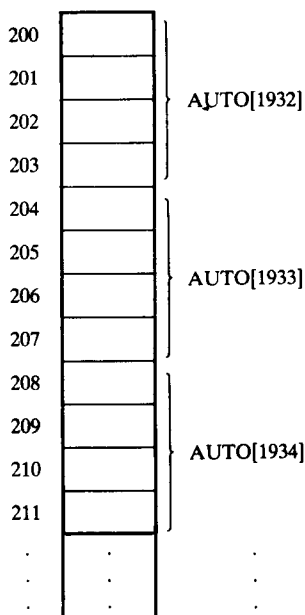
و آن را آدرس پایه یا مبنای LA می‌نامیم. با استفاده از آدرس پایه $\text{Base}(\text{LA})$ ، کامپیوتر آدرس تمام عناصر دیگر آرایه LA را به کمک فرمول زیر محاسبه می‌کند:

$$\text{LOC}(\text{LA}[\text{K}]) = \text{Base}(\text{LA}) + w(\text{K} - \text{lower bound}) \quad (۲-۴)$$

که در آن w تعداد کلمات موجود در خانه حافظه برای آرایه LA است. ملاحظه می‌کنید که زمان موردنیاز برای محاسبه $\text{LOC}(\text{LA}[\text{K}])$ اساساً برابر زمان موردنیاز برای هر مقدار دیگر K است. علاوه بر این با معلوم بودن اندیس K، می‌توان بدون جستجوی هر عنصر دیگر LA مکان $\text{LA}[\text{K}]$ را پیدا کرد و به محتوای آن دسترسی پیدا کرد.

مثال ۳-۴

آرایهٔ AUTO مثال ۱-۴ (ب) را در نظر بگیرید که تعداد اتومبیل‌های فروخته‌شدهٔ هر سال از ۱۹۳۲ تا ۱۹۸۴ را ثبت می‌کند. فرض کنید AUTO در حافظهٔ به صورت شکل ۳-۴ به نمایش درآمده است.



شکل ۳-۴

یعنی $\text{Base}(\text{AUTO}) = 200$ و $w=4$ کلمه در خانهٔ حافظه برای AUTO باشد، آنگاه

$$\text{LOC}(\text{AUTO}[1932]) = 200, \quad \text{LOC}(\text{AUTO}[1933]) = 204, \quad \text{LOC}(\text{AUTO}[1934]) = 208, \dots$$

آدرس هر عنصر آرایه برای سال $K=1965$ را می‌توان با استفاده از رابطهٔ (۲-۴) به دست آورد.

$$\text{LOC}(\text{AUTO}[1965]) = \text{Base}(\text{AUTO}) + w(1965 - \text{lower bound}) = 200 + 4(1965 - 1932) = 332$$

مجدداً تأکید می‌کنیم که محتوای این عنصر را می‌توان بدون جستجوی هر عنصر دیگر آرایهٔ AUTO پیدا کرد.

توجه کنید: مجموعه‌ای از عناصر داده‌ای A را اندیس‌دار گویند هرگاه بتوان هر عنصر دلخواه A را که آن را A_k می‌نامیم در زمانی مستقل از K مکان‌یابی کرد یا مورد پردازش قرار داد. بحث بالا بیان می‌کند که

آرایه‌های خطی را می‌توان اندیس‌دار کرد. این یک خاصیت بسیار مهم آرایه‌های خطی است. درواقع لیستهای پیوندی که موضوع فصل بعد کتاب را تشکیل می‌دهد دارای چنین خاصیتی نیست.

✓ ۴-۴ پیمایش آرایه‌های خطی

فرض کنید A یک مجموعه از عناصر داده‌ای ذخیره شده در حافظه کامپیوتر است. هرگاه بخواهیم محتوای هر عنصر A را چاپ کنیم یا تعداد عناصر A را که دارای یک خاصیت داده شده هستند بشماریم این عمل را می‌توان با پیمایش A یعنی با دسترسی و پردازش هر عنصر A دقیقاً یکبار (که اغلب ملاقات نامیده می‌شود) انجام داد.

الگوریتم زیر یک آرایه خطی LA را پیمایش می‌کند. سادگی این الگوریتم از این واقعیت ناشی می‌شود که LA ساختار خطی دارد. ساختارهای خطی دیگری نظیر لیستهای پیوندی را می‌توان به سادگی پیمایش کرد. از طرف دیگر، پیمایش ساختارهای غیرخطی نظیر درختها و گرافها به میزان قابل توجهی پیچیده و مشکل است.

Algorithm 4.1: (Traversing a Linear Array) Here LA is a linear array with lower bound LB and upper bound UB . This algorithm traverses LA applying an operation $PROCESS$ to each element of LA .

1. [Initialize counter.] Set $K := LB$.
2. Repeat Steps 3 and 4 while $K \leq UB$.
3. [Visit element.] Apply $PROCESS$ to $LA[K]$.
4. [Increase counter.] Set $K := K + 1$.
- [End of Step 2 loop.]
5. Exit.

علاوه بر این در شکل دیگری از این الگوریتم می‌توان از یک حلقه تکرار $Repeat-For$ بجای حلقه $Repeat-While$ استفاده نمود.

Algorithm 4.1': (Traversing a Linear Array) This algorithm traverses a linear array LA with lower bound LB and upper bound UB .

1. Repeat for $K = LB$ to UB :
Apply $PROCESS$ to $LA[K]$.
[End of loop.]
2. Exit.

توجه کنید: ممکن است عمل **PROCESS** در الگوریتم پیمایشی از چند متغیر معین استفاده کند که باید قبل از اعمال **PROCESS** بر هر یک عناصر آرایه مقدار اولیه بگیرد. بنابراین ممکن است الگوریتم نیازمند یک مرحله مقدار اولیه گرفتن باشد.

مثال ۴-۴

آرایه **AUTO** در مثال ۴-۱ (ب) را در نظر بگیرید که تعداد اتومبیل‌های فروخته شده هر سال از ۱۹۳۲ تا ۱۹۸۴ را ثبت می‌کند. هر یک از قطعه برنامه‌های زیر که عمل داده شده را انجام می‌دهند شامل پیمایش **AUTO** است.

(الف) **NUM** تعداد سالهایی را که در طی آن اتومبیل‌های فروخته شده بیش از ۳۰۰ است پیدا کنید.

1. [Initialization step.] Set $NUM := 0$.
2. Repeat for $K = 1932$ to 1984 :
 If $AUTO[K] > 300$, then: Set $NUM := NUM + 1$.
 [End of loop.]
3. Return.

(ب) هر سال و تعداد اتومبیل‌های فروخته شده آن سال را چاپ کنید.

1. Repeat for $K = 1932$ to 1984 :
 Write: $K, AUTO[K]$.
 [End of loop.]
2. Return.

در قسمت (الف) ملاحظه کردید که قبل از پیمایش آرایه **AUTO** نیازمند یک مرحله برای تخصیص مقدار اولیه به متغیر **NUM** هستیم.

۵-۴ اضافه کردن و حذف کردن یک عنصر

فرض کنید **A** یک مجموعه از عناصر داده‌ای در حافظه کامپیوتر باشد. منظور از "اضافه کردن" عبارت است از عمل اضافه کردن یک عنصر جدید به مجموعه **A** و منظور از "حذف کردن" عبارت است از عمل حذف یکی از عناصر **A**. این بخش، عمل اضافه کردن و حذف یک عنصر را در صورت خطی بودن **A** مورد بحث و بررسی قرار می‌دهد.

هرگاه فضای حافظه اختصاص یافته برای یک آرایه خطی به اندازه کافی بزرگ باشد تا بتواند یک عنصر اضافی را در خود جای دهد عمل اضافه کردن یک عنصر در "پایان" آرایه خطی را می‌توان به سادگی انجام داد. از طرف دیگر فرض کنید بخواهیم یک عنصر به وسط آرایه اضافه کنیم. در آن صورت، به طور متوسط باید نصف عناصر به پائین انتقال (شیفت) داده شوند در مکانهای جدید، عناصر جدید

قرار گیرند و نظم عناصر دیگر آرایه نیز حفظ شود.

به‌طور مشابه، حذف عنصری که در "پایان" یک آرایه است مشکل به‌نظر نمی‌آید اما حذف یک عنصر در مکان‌هایی مانند وسط آرایه نیازمند آن است که هر عنصر بعدی به مکان جدیدی در بالای آرایه انتقال داده شوند تا فضای خالی شده بالای آرایه را پر کند.

توجه کنید: از آنجا که آرایه‌های خطی معمولاً به صورت قابل گسترش از پائین، نظیر شکل ۱-۴ رسم می‌شوند منظور از اصطلاح "در پائین آرایه" مکان‌هایی با اندیس‌های بزرگتر و منظور از اصطلاح "در بالای آرایه" مکان‌هایی با اندیس‌های کوچکتر است.

مثال ۵-۴

فرض کنید TEST به صورت یک آرایه ۵ عنصری معرفی شده است اما داده‌ها تنها در خانه‌های TEST[1]، TEST[2] و TEST[3] ذخیره شده است. اگر X مقدار محتوای خانه بعدی TEST باشد، آنگاه تنها با دستور جایگزینی

$$X := \text{TEST}[4]$$

X را به لیست اضافه می‌کنیم. به‌طور مشابه، اگر Y مقدار محتوای خانه بعدی TEST باشد، آنگاه تنها با دستور جایگزینی

$$Y := \text{TEST}[5]$$

Y را به لیست اضافه می‌کنیم. با وجود این دیگر نمی‌توان نمرة جدیدی از آزمون TEST را به لیست اضافه کرد.

مثال ۶-۴

فرض کنید NAME یک آرایه خطی ۸ عنصری باشد و پنج نام در این آرایه، به صورت نشان داده شده در شکل ۴-۴ (الف) ذخیره شده است. ملاحظه می‌شود که این نام‌ها به ترتیب الفبایی در آرایه مرتب شده‌اند و فرض کنید بخواهیم ترتیب الفبایی نام‌های آرایه همواره حفظ شود. فرض کنید Ford به آرایه اضافه شده است. آنگاه هر یک از نام‌های Johnson، Smith و Wagner باید یک خانه به طرف پائین آرایه مانند شکل ۴-۴ (ب) انتقال داده شوند. بعد از آن فرض کنید Taylor به این آرایه اضافه می‌شود. آنگاه Wagner باید مانند شکل ۴-۴ (ج) یک خانه به پائین آرایه انتقال داده شود.

بالاخره فرض کنید Davis از آرایه حذف شده است. آنگاه هر یک از پنج نام Ford، Johnson، Taylor، Smith و Wagner مانند شکل ۴-۴ (ب) باید یک خانه به بالای آرایه انتقال داده شوند. واضح است که اگر در آرایه چند هزار نام وجود داشته باشد این‌گونه انتقال داده‌ها پر هزینه خواهد بود.

NAME	NAME	NAME	NAME
1 Brown	1 Brown	1 Brown	1 Brown
2 Ford	2 Davis	2 Davis	2 Davis
3 Johnson	3 Ford	3 Ford	3 Johnson
4 Smith	4 Johnson	4 Johnson	4 Smith
5 Taylor	5 Smith	5 Smith	5 Wagner
6 Wagner	6 Taylor	6 Wagner	6
7	7 Wagner	7	7
8	8	8	8

(د) (ج) (ب) (الف)

شکل ۴-۴

الگوریتم زیر یک عنصر داده‌ای ITEM را در مکان K ام آرایه خطی LA که دارای N عنصر است اضافه می‌کند. چهار مرحله اول، هر عنصر از مکان K ام به بعد را یک خانه به پائین منتقل می‌کند و در آرایه LA فضای خالی ایجاد می‌کند. تأکید می‌کنیم که این عناصر به ترتیب عکس انتقال می‌یابند یعنی اول $LA[N]$ ، بعد $LA[N-1]$ و ... و بالاخره $LA[K]$ در غیر اینصورت داده‌ها ممکن است پاک شوند. (مسأله ۳-۴ را ببینید). مشروحاً این که، نخست قرار می‌دهیم $J = N$ آنگاه با استفاده از J به عنوان یک شمارنده، با افزایش J هر بار، حلقه اجرا می‌شود تا اینکه J به K برسد. در مرحله بعدی یعنی مرحله 5، ITEM، به داخل آرایه در فضایی که اکنون ایجاد شده است اضافه می‌شود. قبل از پایان (خروج از) الگوریتم، N تعداد عناصر آرایه LA یک واحد افزایش می‌یابد تا عنصر جدید را دربر بگیرد.

Algorithm 4.2: (Inserting into a Linear Array) INSERT(LA, N, K, ITEM)

Here LA is a linear array with N elements and K is a positive integer such that $K \leq N$. This algorithm inserts an element ITEM into the Kth position in LA.

1. [Initialize counter.] Set $J := N$.
 2. Repeat Steps 3 and 4 while $J \geq K$.
 3. [Move Jth element downward.] Set $LA[J+1] := LA[J]$.
 4. [Decrease counter.] Set $J := J - 1$.
- [End of Step 2 loop.]
5. [Insert element.] Set $LA[K] := ITEM$.
 6. [Reset N.] Set $N := N + 1$.
 7. Exit.

الگوریتم زیر عنصر K ام را از آرایه خطی LA حذف می‌کند و آن را در متغیر $ITEM$ جایگزین می‌کند:

Algorithm 4.3: (Deleting from a Linear Array) $DELETE(LA, N, K, ITEM)$
 Here LA is a linear array with N elements and K is a positive integer such that $K \leq N$. This algorithm deletes the K th element from LA .

1. Set $ITEM := LA[K]$.
2. Repeat for $J = K$ to $N - 1$:
 [Move $J + 1$ st element upward.] Set $LA[J] := LA[J + 1]$.
 [End of loop.]
3. [Reset the number N of elements in LA .] Set $N := N - 1$.
4. Exit.

توجه کنید: تأکید می‌کنیم که اگر در یک مجموعه از عناصر داده‌ای، همواره چند عمل حذف و اضافه کردن مورد نیاز باشد، آنگاه آرایه خطی نمی‌تواند کاراترین روش ذخیره داده‌ها باشد.

۴-۶ مرتب‌کردن، مرتب‌کردن حبابی

فرض کنید A یک لیست n عنصری باشد، منظور از مرتب‌کردن A عبارت است از عمل کنار هم قراردادن عناصر A طوری که این عناصر به ترتیب صعودی باشند یعنی طوری که

$$A[1] < A[2] < A[3] < \dots < A[N]$$

برای مثال فرض کنید A در آغاز به صورت لیست زیر باشد.

8, 4, 19, 2, 7, 13, 5, 16

پس از مرتب‌کردن، A به صورت لیست زیر درخواهد آمد:

2, 4, 5, 7, 8, 13, 16, 19

بنظر می‌رسد که مرتب‌کردن کار بدیهی و ساده‌ای باشد. درواقع، مرتب‌کردن با کارایی زیاد می‌تواند خیلی پیچیده باشد. واقعیت این است که الگوریتم‌های متعددی برای مرتب‌کردن وجود دارد. برخی از این الگوریتم‌ها در فصل ۹ بررسی می‌شوند. در اینجا یک الگوریتم بسیار ساده و معروف به نام مرتب‌کردن حبابی را ارائه داده و در مورد آن توضیح می‌دهیم.

توجه کنید: تعریف بالا از مرتب‌کردن عبارت است از قراردادن داده‌های عددی به ترتیب صعودی در کنار هم. این محدودیت فقط برای سهولت در نمادگذاری است. واضح است که به قراردادن داده‌های عددی به ترتیب نزولی در کنار هم یا قراردادن داده‌های غیر عددی به ترتیب الفبایی در کنار هم نیز مرتب کردن می‌گویند. در حقیقت اغلب یک فایل از رکوردها است و منظور از مرتب‌کردن A ، عبارت است از قراردادن رکوردهای A کنار هم به طوری که برحسب مقدارهای یک کلید داده مرتب باشند.

مرتب‌کردن حبابی

فرض کنید لیستی از اعداد $A[1], A[2], \dots, A[N]$ در حافظه است. الگوریتم مرتب‌کردن حبابی به صورت زیر کار می‌کند:

مرحله ۱. $A[1]$ و $A[2]$ را با هم مقایسه کنید و آنها را با ترتیب خواسته شده کنار هم قرار دهید طوری که $A[1] < A[2]$ آنگاه $A[2]$ و $A[3]$ را با هم مقایسه کنید و آنها را طوری کنار هم قرار دهید که $A[2] < A[3]$ آنگاه $A[3]$ و $A[4]$ را با هم مقایسه کنید و آنها را طوری کنار هم قرار دهید که $A[3] < A[4]$ این کار را تا آنجا ادامه دهید که $A[N-1]$ و $A[N]$ با هم مقایسه شده باشند و آنها را طوری کنار هم قرار دهید که $A[N-1] < A[N]$.

ملاحظه می‌کنید که در مرحله ۱، $n-1$ مقایسه انجام می‌شود. طی مرحله ۱، بزرگترین عنصر در مکان n ام در وضعیت صعودی یا در وضعیت نزولی است. پس از کامل شدن مرحله ۱، $A[N]$ شامل بزرگترین عنصر خواهد بود.

مرحله ۲. مرحله ۱ را با یک مقایسه کمتر تکرار کنید. یعنی اکنون پس از مقایسه و احتمالاً قرارگرفتن $A[N-2]$ و $A[N-1]$ کنار هم کار را متوقف می‌کنیم. مرحله ۲ شامل $n-2$ مقایسه است و پس از کامل شدن مرحله ۲، دومین عنصر بزرگ در مکان $A[N-1]$ جای خواهد گرفت.

مرحله ۳. مرحله ۱ را با دو مقایسه کمتر تکرار کنید یعنی پس از مقایسه و احتمالاً قرارگرفتن $A[N-3]$ و $A[N-2]$ کنار هم کار را متوقف می‌کنیم.

.....

مرحله $n-1$. $A[1]$ ، $A[2]$ را با هم مقایسه کنید و آنها را طوری کنار هم قرار دهید که $A[1] < A[2]$. پس از $n-1$ مرحله، لیست به صورت صعودی مرتب خواهد شد.

فرایند متوالی پیمایش تمام یا قسمتی از یک لیست غالباً یک "گذر" یا "مرحله" Pass نامیده می‌شود. از این رو هر یک از مراحل بالا یک گذر نامیده می‌شود. بنابراین الگوریتم مرتب‌کردن حبابی به $n-1$ گذر احتیاج دارد که در آن n تعداد داده‌های ورودی است.

مثال ۷-۴

فرض کنید اعداد زیر در آرایه A ذخیره شده‌اند:

32, 51, 27, 85, 66, 23, 13, 57

مرتب‌کردن حبابی را بر روی آرایه A بکار می‌بندیم و هر گذر را به طور جداگانه مورد بحث و بررسی

قرار می‌دهیم:

گذر ۱. مقایسه‌های زیر را داریم.

(الف) A_1 و A_2 را مقایسه کنید. از آنجا که $51 < 32$ ، لیست تغییر نمی‌کند.

(ب) A_2 و A_3 را مقایسه کنید. از آنجا که $51 > 27$ ، 51 و 27 را به صورت زیر جابجا کنید:

32, (27), (51), 85, 66, 23, 13, 57

(ج) A_3 و A_4 را مقایسه کنید. از آنجا که $51 < 85$ ، لیست تغییر نمی‌کند.

(د) A_4 و A_5 را مقایسه کنید. از آنجا که $85 > 66$ ، 85 و 66 را به صورت زیر جابجا کنید.

32, 27, 51, (66), (85), 23, 13, 57

(ه) A_5 و A_6 را مقایسه کنید. از آنجا که $85 > 23$ ، 85 و 23 را به صورت زیر جابجا کنید:

32, 27, 51, 66, (23), (85), 13, 57

(و) A_6 و A_7 را مقایسه کنید. از آنجا که $85 > 13$ ، با جابجایی 85 و 13 نتیجه می‌شود:

32, 27, 51, 66, 23, (13), (85), 57

(ز) A_7 و A_8 را مقایسه کنید. از آنجا که $85 > 57$ ، با جابجایی 85 و 57 نتیجه می‌شود:

32, 27, 51, 66, 23, 13, (57), (85)

در پایان گذر اول، بزرگترین عدد یعنی 85 به آخرین مکان آرایه انتقال می‌یابد. با وجود این، بقیه

اعداد مرتب‌شده نیستند، حتی اگر جای بعضی از این اعداد تغییر کرده باشد.

در مورد گذرهای باقیمانده ما تنها به نشان دادن جابجایی اکتفا می‌کنیم:

گذر ۲.

(27), (33), 51, 66, 23, 13, 57, 85

27, 33, 51, (23), (66), 13, 57, 85

27, 33, 51, 23, (13), (66), 57, 85

27, 33, 51, 23, 13, (57), (66), 85

در پایان گذر 2، دومین عنصر بزرگ آرایه یعنی 66 به پائین و در همسایگی آخرین عنصر آرایه انتقال

می‌یابد.

گذر 3.

27, 33, (23), (51), 13, 57, 66, 85

27, 33, 23, (13), (51), 57, 66, 85

گذر 4.

27, (23), (33), 13, 51, 57, 66, 85

27, 23, (13), (33), 51, 57, 66, 85

گذر 5.

(23), (27), 13, 33, 51, 57, 66, 85

23, (13), (27), 33, 51, 57, 66, 85

گذر 6.

(13), (23), 27, 33, 51, 57, 66, 85

گذر 6 درحقیقت دارای دو مقایسه A_1 با A_2 و A_2 و A_3 است. مقایسه دوم باعث جابجایی نمی‌شود.

گذر 7. بالاخره A_1 با A_2 مقایسه می‌شود. چون $13 < 23$. جابجایی صورت نمی‌گیرد. از آنجاکه لیست

دارای 8 عنصر است، پس از گذر هفتم به صورت مرتب‌شده درخواهد آمد. ملاحظه می‌کنید که در این

مثال، لیست واقعاً پس از گذر ششم مرتب شده خواهد بود. این وضعیت در پایان بخش بررسی می‌شود.

اکنون به صورت رسمی، الگوریتم مرتب‌کردن حبابی را بیان می‌کنیم.

Algorithm 4.4: (Bubble Sort) BUBBLE(DATA, N)

Here DATA is an array with N elements. This algorithm sorts the elements in DATA.

1. Repeat Steps 2 and 3 for $K = 1$ to $N - 1$.
2. Set $PTR := 1$. [Initializes pass pointer PTR.]
3. Repeat while $PTR \leq N - K$: [Executes pass.]
 - (a) If $DATA[PTR] > DATA[PTR + 1]$, then:

Interchange $DATA[PTR]$ and $DATA[PTR + 1]$.

[End of If structure.]
 - (b) Set $PTR := PTR + 1$.

[End of inner loop.]

[End of Step 1 outer loop.]
4. Exit.

ملاحظه می‌کنید که در الگوریتم یک حلقه داخلی وجود دارد که توسط متغیر PTR کنترل می‌شود و این حلقه در درون یک حلقه خارجی قرار دارد که توسط اندیس K کنترل می‌شود. علاوه بر این مشاهده می‌کنید که PTR به عنوان اندیس آرایه بکار رفته است و یک شمارنده است اما از K به عنوان اندیس آرایه استفاده نشده است.

پیچیدگی الگوریتم مرتب‌کردن حبابی

معمولاً زمان اجرای یک الگوریتم مرتب‌کردن برحسب تعداد مقایسه‌های آن الگوریتم اندازه‌گیری می‌شود. $f(n)$ تعداد مقایسه‌های مرتب‌کردن حبابی به سادگی محاسبه می‌شود. به‌ویژه این که، در گذر اول $n - 1$ مقایسه انجام می‌شود که بزرگترین عنصر را در مکان آخر قرار می‌دهد. در گذر دوم $n - 2$ مقایسه انجام می‌شود که بزرگترین عنصر دوم را در همسایگی مکان آخر (یک خانه مانده به خانه آخر) قرار می‌دهد و الی آخر.

$$f(n) = (n-1) + (n-2) + \dots + 2 + 1 = \frac{n(n-1)}{2} = \frac{n^2}{2} + O(n) = O(n^2)$$

به بیان دیگر، زمان مورد نیاز برای اجرای الگوریتم مرتب‌کردن حبابی متناسب با n^2 است که در آن n تعداد داده‌های ورودی است.

توجه کنید: بعضی از برنامه‌نویسان برای این که اعلام کنند آیا در طی یک گذر جابجایی صورت گرفته است یا نه، از یک متغیر 1 بیتی FLAG یا متغیر منطقی FLAG در الگوریتم مرتب‌کردن حبابی استفاده می‌کنند. اگر پس از هر گذر $FLAG = 0$ باشد آنگاه لیست از قبل مرتب شده است و هیچ نیازی به ادامه کار وجود ندارد. این کار باعث می‌شود تعداد گذرها کم شود. با وجود این هنگام استفاده از چنین علامتی FLAG، بایستی به آن مقدار اولیه داده شود مقدار آن تغییر کند و در طی هر گذر متغیر FLAG مورد آزمایش قرار گیرد که آیا مقدار آن تغییر کرده است یا خیر. از این‌رو استفاده از علامت FLAG تنها زمانی مفید و کارا است که لیست از ابتدا، تقریباً مرتب باشد.

۷-۴ جستجو کردن، جستجوی خطی

فرض کنید DATA مجموعه‌ای از عناصر داده‌ای در حافظه باشد و فرض کنید ITEM اطلاعات معلوم داده شده است. منظور از جستجو کردن عبارت است از عمل پیدا کردن LOC مکان ITEM در DATA یا چاپ پیغامی نظیر ITEM در DATA وجود ندارد. جستجو را موفق گویند اگر ITEM در DATA وجود داشته باشد در غیر این صورت آن را ناموفق گویند.

اغلب ممکن است بخواهیم پس از یک جستجوی ناموفق **ITEM** در **DATA**، عنصر **ITEM** را به **DATA** اضافه کنیم. آنگاه به جای تنها یک الگوریتم جستجو، از الگوریتم جستجو و اضافه کردن استفاده می‌کنیم. الگوریتم‌های جستجو و اضافه کردن در بخش مسایل به‌طور مشروح توضیح داده می‌شود. الگوریتم‌های جستجوی بسیار متفاوتی وجود دارد. معمولاً الگوریتمی که انتخاب می‌شود بستگی به سازماندهی اطلاعات در **DATA** دارد. عمل جستجو به تفصیل در فصل ۹ شرح داده می‌شود. این بخش الگوریتم ساده‌ای را توضیح می‌دهد که **جستجوی خطی** نام دارد و در بخش بعد الگوریتم معروف **جستجوی دودویی** را مورد بحث و بررسی قرار می‌دهیم.

پیچیدگی الگوریتم‌های جستجو برحسب تعداد مقایسه‌های مورد نیاز $f(n)$ برای پیدا کردن **ITEM** در **DATA** اندازه‌گیری می‌شود که در آن **DATA** شامل n عنصر است. نشان خواهیم داد که جستجوی خطی یک الگوریتم دارای زمان خطی است اما جستجوی دودویی، الگوریتمی با کارایی به مراتب بیشتر است و زمان آن متناسب با $\log_2 n$ است. از سوی دیگر معایب اعتماد بیش از حد به الگوریتم جستجوی دودویی را نیز بررسی می‌کنیم.

جستجوی خطی

فرض کنید **DATA** یک آرایه خطی با n عنصر باشد. در مورد **DATA** هیچ اطلاع دیگری داده نشده است. شهودی‌ترین راه برای جستجوی یک **ITEM** داده شده در **DATA** عبارت است از مقایسه **ITEM** با تک تک عناصر **DATA**. به عبارت دیگر نخست باید آزمایش کنیم که آیا $\text{ITEM} = \text{DATA}[1]$ و آنگاه آزمایش می‌کنیم که آیا $\text{ITEM} = \text{DATA}[2]$ و الی آخر. این روش که **DATA** را برای تعیین محل **ITEM**، بطور متوالی پیمایش می‌کند **جستجوی خطی** یا **جستجوی متوالی** نامیده می‌شود. برای بیان ساده مطلب، نخست **ITEM** را در $\text{DATA}[N+1]$ یعنی در مکان بعد از آخرین عنصر **DATA** جایگزین می‌کنیم. آنگاه نتیجه

$$\text{LOC} = N + 1$$

است که در آن **LOC** مکانی را نشان می‌دهد که **ITEM** برای اولین بار در **DATA** ظاهر شده است و مبین ناموفق بودن عمل جستجو است. هدف از این جایگزینی اولیه اجتناب از آزمایش تکراری است که آیا به انتهای آرایه **DATA** رسیده‌ایم یا خیر. با این روش در نهایت باید عمل جستجو "موفق" باشد. نمایش رسمی جستجوی خطی در الگوریتم ۴-۵ نشان داده شده است.

Algorithm 4.5: (Linear Search) LINEAR(DATA, N, ITEM, LOC)

Here DATA is a linear array with N elements, and ITEM is a given item of information. This algorithm finds the location LOC of ITEM in DATA, or sets $LOC := 0$ if the search is unsuccessful.

1. [Insert ITEM at the end of DATA.] Set $DATA[N + 1] := ITEM$.
2. [Initialize counter.] Set $LOC := 1$.
3. [Search for ITEM.]
Repeat while $DATA[LOC] \neq ITEM$:
Set $LOC := LOC + 1$.
[End of loop.]
4. [Successful?] If $LOC = N + 1$, then: Set $LOC := 0$.
5. Exit.

ملاحظه می‌کنید مرحله 1 تضمین می‌کند که باید حلقه مرحله ۳ پایان یابد. بدون مرحله ۱ (الگوریتم ۴-۲ را ببینید) دستور Repeat مرحله ۳ باید با دستور زیر که شامل دو مقایسه است نه یک مقایسه تعویض شود:

$DATA[LOC] \neq ITEM$ و Repeat while $LOC \leq N$

از طرف دیگر، برای استفاده از مرحله ۱، باید تضمین کنیم که در پایان آرایه DATA یک خانه حافظه استفاده نشده وجود دارد، در غیر این صورت باید از الگوریتم جستجوی خطی که در الگوریتم ۴-۲ شرح داده شده، استفاده کنیم.

مثال ۸-۴

آرایه NAME شکل ۴-۵ (الف) را که در آن $n = 6$ است، در نظر بگیرید.

(الف) فرض کنید بخواهیم تحقیق کنیم که آیا Paula در آرایه وجود دارد یا خیر؟ در صورت مثبت بودن جواب، مکان آن را پیدا کنیم. الگوریتم به طور موقت Paula را در پایان آرایه قرار می‌دهد. این وضعیت در شکل ۴-۵ (ب) با قراردادن $NAME[7] = paula$ نشان داده شده است. آنگاه این الگوریتم عمل جستجو در آرایه را از بالا تا پائین انجام می‌دهد. از آنجا که Paula برای نخستین بار در $NAME[N+1]$ ظاهر شده است، Paula در آرایه اصلی وجود ندارد.

(ب) فرض کنید بخواهیم تحقیق کنیم که آیا Susan در آرایه وجود دارد یا خیر؟ در صورت مثبت بودن جواب، مکان آن را پیدا کنیم. الگوریتم به طور موقت Susan را در پایان آرایه قرار می‌دهد. این وضعیت در شکل ۴-۵ (ب) با قراردادن $NAME[7] = Susan$ نشان داده شده است. آنگاه این الگوریتم عمل

جستجو در آرایه را از بالا تا پایین انجام می‌دهد. از آنجا که Susan برای نخستین بار در [4] NAME (که $n \leq 4$ است) ظاهر شده است، می‌فهمیم که Susan در آرایه اصلی وجود دارد.

NAME	NAME	NAME
1 Mary	1 Mary	1 Mary
2 Jane	2 Jane	2 Jane
3 Diane	3 Diane	3 Diane
4 Susan	4 Susan	4 Susan
5 Karen	5 Karen	5 Karen
6 Edith	6 Edith	6 Edith
7 Susan	7 Paula	7
8	8	8

(ج) (ب) (الف)

شکل ۵-۴

پیچیدگی الگوریتم جستجوی خطی

همانگونه که در بالا متذکر شدیم، پیچیدگی الگوریتم جستجو به وسیله تعداد مقایسه‌های مورد نیاز $f(n)$ برای پیدا کردن ITEM در DATA اندازه‌گیری می‌شود که در آن DATA شامل n عنصر است. دو حالت مهم و قابل توجه که مورد بحث و بررسی قرار می‌گیرد حالت میانگین و بدترین حالت است.

واضح است که بدترین حالت وقتی اتفاق می‌افتد که عمل جستجو در تمام آرایه DATA انجام شود و ITEM در DATA ظاهر نشده باشد. در این حالت، الگوریتم نیازمند

$$f(n) = n + 1$$

مقایسه است. بنابراین در بدترین حالت، زمان اجرا متناسب با n است.

زمان اجرای حالت میانگین از مفهوم امید ریاضی در احتمالات استفاده می‌کند. (بخش ۵-۲ را ببینید). فرض کنید P_k احتمال آن باشد که ITEM در $DATA[k]$ ظاهر شده باشد و q احتمال آن باشد که

ITEM در DATA ظاهر نشده باشد. در آن صورت $(P_1 + P_2 + \dots + P_n + q = 1)$. هرگاه ITEM در DATA[K] ظاهر شده باشد چون الگوریتم از K مقایسه استفاده می‌کند، میانگین تعداد مقایسه‌ها به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$f(n) = 1 \cdot p_1 + 2 \cdot p_2 + \dots + n \cdot p_n + (n + 1) \cdot q$$

به‌خصوص این که فرض کنید q خیلی کوچک و ITEM با احتمالی مساوی در هر عنصر DATA ظاهر شده باشد. آنگاه $q \approx 0$ و هر $p_i = 1/n$ بنابراین

$$\begin{aligned} f(n) &= 1 \cdot \frac{1}{n} + 2 \cdot \frac{1}{n} + \dots + n \cdot \frac{1}{n} + (n + 1) \cdot 0 = (1 + 2 + \dots + n) \cdot \frac{1}{n} \\ &= \frac{n(n+1)}{2} \cdot \frac{1}{n} = \frac{n+1}{2} \end{aligned}$$

یعنی در این حالت خاص، میانگین تعداد مقایسه‌های موردنیاز برای یافتن مکان ITEM تقریباً برابر نصف تعداد عناصر در آرایه است.

۸-۴ جستجوی دودویی

فرض کنید DATA یک آرایه است که در آن داده‌های عددی به ترتیب صعودی، یا معادل آن، داده‌های حرفی نیز به ترتیب صعودی ذخیره شده‌اند. آنگاه الگوریتم جستجوی بسیار کارآیی بنام جستجوی دودویی وجود دارد که می‌توان از آن برای پیدا کردن LOC مکان یک ITEM داده شده از اطلاعات در DATA استفاده کرد. این الگوریتم قبلاً به صورت رسمی بیان شده است. ایده کلی این الگوریتم را به کمک یک نمونه واقعی از مثال آشنایی شرح می‌دهیم که در زندگی روزمره با آن سروکار دارید.

فرض کنید بخواهید مکان یک اسم را در راهنمای تلفن پیدا کنید یا بخواهید در یک فرهنگ لغت، یک لغت را پیدا کنید. واضح است که یک جستجوی خطی را انجام نمی‌دهید. به عوض آن، کتابچه راهنما را از وسط باز می‌کنید و دنبال آن نیمه از راهنما می‌گردید که حدس زدید اسم مورد نظر شما در آن نیمه قرار دارد. آنگاه نیمه اخیر را از وسط نصف کرده و در یک چهارم از راهنما می‌گردید که حدس زدید اسم مورد نظر شما در آن یک چهارم قرار دارد. بدنبال آن یک چهارم اخیر را از وسط نصف کرده و در یک هشتم از راهنما می‌گردید که حدس زدید اسم مورد نظر شما در آن یک هشتم قرار دارد. کار را همینطور تا آخر ادامه می‌دهید. با توجه به این که دائماً (خیلی سریع) تعداد مکانهای ممکن، در راهنما کاهش می‌یابد، در نهایت مکان اسم و اسم مورد نظر را پیدا می‌کنید.

هرگاه الگوریتم جستجوی دودویی را بر آرایه DATA اعمال کنید به صورت زیر عمل می‌کند. در هر

مرحله از الگوریتم، جستجوی ITEM در یک قطعه از عناصر DATA کاهش می‌یابد.

$DATA[BEG], DATA[BEG + 1], DATA[BEG + 2], \dots, DATA[END]$

توجه دارید که متغیرهای BEG و END به ترتیب مکانهای اول و آخر قطعه مورد بررسی را نشان می‌دهند. این الگوریتم ITEM را با عنصر وسط آن قطعه یعنی $DATA[MID]$ مقایسه می‌کند که در آن MID از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$MID = \text{INT}((BEG + END)/2)$$

ما برای مقدار صحیح A از تابع کامپیوتری $\text{INT}(A)$ استفاده می‌کنیم. اگر $DATA[MID] = ITEM$ ، آنگاه جستجو موفق است و قرار می‌دهیم $MID := LOC$ در غیراینصورت قطعه جدیدی از $DATA$ را به صورت زیر به دست می‌آوریم:

(الف) اگر $ITEM < DATA[MID]$ آنگاه ITEM می‌تواند تنها در نیمه چپ قطعه ظاهر شود:

$DATA[BEG], DATA[BEG + 1], \dots, DATA[MID - 1]$

بنابراین قرار می‌دهیم $MID - 1 := END$ و عمل جستجو را مجدداً انجام می‌دهیم:

(ب) اگر $ITEM > DATA[MID]$ آنگاه ITEM می‌تواند تنها در نیمه راست قطعه ظاهر شود:

$DATA[MID + 1], DATA[MID + 2], \dots, DATA[END]$

بنابراین قرار می‌دهیم $MID + 1 := BEG$ و عمل جستجو را مجدداً ادامه می‌دهیم:

در آغاز، کار را با تمام آرایه $DATA$ یعنی با $BEG = 1$ و $END = n$ یا با بیان کلی‌تر با $BEG = LB$ و $END = UB$ شروع می‌کنیم.

اگر ITEM در $DATA$ ظاهر نشده باشد آنگاه نهایتاً به

$$END < BEG$$

می‌رسیم که اعلام می‌کند جستجو ناموفق است و در چنین حالتی دستور جایگزینی $LOC := NULL$ را داریم. در اینجا $NULL$ مقداری است که در محدوده مجموعه اندیسهای $DATA$ قرار ندارد. در بیشتر موارد می‌توانیم $NULL$ را برابر صفر اختیار کنیم. ($NULL = 0$)

در اینجا الگوریتم جستجو دودویی را به صورت رسمی زیر بیان می‌کنیم:

توجه کنید: هرگاه ITEM در $DATA$ وجود نداشته باشد نهایتاً الگوریتم به مرحله‌ای می‌رسد که $BEG = END = MID$ آنگاه مرحله بعدی $END < BEG$ را نتیجه می‌دهد و کنترل کار به مرحله پنجم الگوریتم داده می‌شود. این وضعیت در قسمت (ب) مثال بعد اتفاق می‌افتد.

Algorithm 4.6: (Binary Search) BINARY(DATA, LB, UB, ITEM, LOC)

Here DATA is a sorted array with lower bound LB and upper bound UB, and ITEM is a given item of information. The variables BEG, END and MID denote, respectively, the beginning, end and middle locations of a segment of elements of DATA. This algorithm finds the location LOC of ITEM in DATA or sets LOC = NULL.

1. [Initialize segment variables.]
Set BEG := LB, END := UB and MID = INT((BEG + END)/2).
2. Repeat Steps 3 and 4 while BEG ≤ END and DATA[MID] ≠ ITEM.
3. If ITEM < DATA[MID], then:
Set END := MID - 1.
Else:
Set BEG := MID + 1.
[End of If structure.]
4. Set MID := INT((BEG + END)/2).
[End of Step 2 loop.]
5. If DATA[MID] = ITEM, then:
Set LOC := MID.
Else:
Set LOC := NULL.
[End of If structure.]
6. Exit.

مثال ۹-۴

فرض کنید DATA آرایه‌ای متشکل از 13 عنصر به صورت زیر ذخیره شده است:

DATA: 11, 22, 30, 33, 40, 44, 55, 60, 66, 77, 80, 88, 99

برای یافتن مقادیر مختلف ITEM، جستجوی دودویی را در DATA بکار می‌بندیم.

(الف) فرض کنید $ITEM = 40$. جستجو برای ITEM در آرایه DATA در شکل ۶-۴ به تصویر درآمده است که در آن مقادیر DATA[BEG] و DATA[END] در هر مرحله از الگوریتم با دایره و مقدار DATA[MID] با یک مربع نشان داده شده است. به ویژه این که، BEG، END، و MID مقادیر متوالی زیر را دارا هستند:

(۱) در آغاز $BEG = 1$ و $END = 13$ از این رو

$$DATA[MID] = 55 \quad \text{و در نتیجه} \quad MID = \text{INT}[(1 + 13) / 2] = 7$$

(۲) چون $40 < 55$ ، END با مقدار 6 تغییر می‌کند. از این رو

$$DATA[MID] = 30 \quad \text{و در نتیجه} \quad MID = \text{INT}[(1 + 6) / 2] = 3$$

(۳) چون $40 > 30$ ، BEG با مقدار 4 تغییر می‌کند. از این رو

$$\text{DATA}[\text{MID}] = 40 \quad \text{و در نتیجه} \quad \text{MID} = \text{INT}[(4 + 6) / 2] = 5$$

ITEM را در مکان $\text{LOC} = \text{MID} = 5$ پیدا کرده‌ایم.

- (1) (11), 22, 30, 33, 40, 44, 55, 60, 66, 77, 80, 88, (99)
 (2) (11), 22, 30, 33, 40, (44), 55, 60, 66, 77, 80, 88, 99
 (3) 11, 22, 30, (33), 40, (44), 55, 60, 66, 77, 80, 88, 99 [موفق]

شکل ۴-۶. جستجوی دودویی برای $\text{ITEM} = 40$

(ب) فرض کنید $\text{ITEM} = 85$. جستجو برای ITEM در آرایه DATA در شکل ۷-۴ به تصویر درآمده است. در اینجا BEG و END مقادیر متوالی زیر را دارا هستند:

(۱) مجدداً در آغاز $\text{BEG} = 1$, $\text{END} = 13$, $\text{MID} = 7$ و $\text{DATA}[\text{MID}] = 55$

(۲) چون $85 > 55$, BEG با مقدار $\text{BEG} = \text{MID} + 1 = 8$ تغییر می‌کند. از این‌رو

$\text{DATA}[\text{MID}] = 77$ و در نتیجه $\text{MID} = \text{INT}[(8 + 13) / 2] = 10$

(۳) چون $85 > 77$, BEG با مقدار $\text{BEG} = \text{MID} + 1 = 11$ تغییر می‌کند. از این‌رو

$\text{DATA}[\text{MID}] = 88$ و در نتیجه $\text{MID} = \text{INT}[(11 + 13) / 2] = 12$

(۴) چون $85 < 88$, END با مقدار $\text{END} = \text{MID} - 1 = 11$ تغییر می‌کند. از این‌رو

$\text{DATA}[\text{MID}] = 80$ و در نتیجه $\text{MID} = \text{INT}[(11 + 11) / 2] = 11$

ملاحظه می‌کنید که اکنون $\text{BEG} = \text{END} = \text{MID} = 11$

چون $85 > 80$, BEG با مقدار $\text{BEG} = \text{MID} + 1 = 12$ تغییر می‌کند. اما اکنون $\text{BEG} > \text{END}$. از این‌رو ITEM در DATA وجود ندارد.

- (1) (11), 22, 30, 33, 40, 44, 55, 60, 66, 77, 80, 88, (99)
 (2) 11, 22, 30, 33, 40, 44, 55, (60), 66, (77), 80, 88, (99)
 (3) 11, 22, 30, 33, 40, 44, 55, 60, 66, 77, (80), (88), (99)
 (4) 11, 22, 30, 33, 40, 44, 55, 60, 66, 77, (80), 88, 99 [ناموفق]

شکل ۷-۴. جستجوی دودویی برای $\text{ITEM} = 85$

پیچیدگی الگوریتم جستجوی دودویی

پیچیدگی الگوریتم جستجوی دودویی به وسیلهٔ تعداد مقایسه‌های موردنیاز $f(n)$ برای تعیین مکان ITEM در DATA اندازه‌گیری می‌شد که در آن DATA شامل n عنصر است. ملاحظه می‌شود که هر مقایسه اندازهٔ نمونه را نصف می‌کند. از این رو حداکثر $f(n)$ مقایسه لازم است تا مکان ITEM پیدا شود که در آن

$$2^{f(n)} > n \quad \text{یا معادل آن} \quad f(n) = \lfloor \log_2 n \rfloor + 1$$

یعنی زمان اجرای بدترین حالت تقریباً برابر $\log_2 n$ است. همچنین می‌توان نشان داد که زمان اجرای حالت میانگین تقریباً برابر زمان اجرای بدترین حالت است.

مثال ۴-۱۰

فرض کنید DATA شامل 1000 000 عنصر باشد. ملاحظه می‌کنید که:

$$2^{10} = 1024 > 1000 \quad \text{و از این رو} \quad 2^{20} > 1000^2 = 1\,000\,000$$

بنابراین با استفاده از الگوریتم جستجوی دودویی تنها به حدود 20 مقایسه احتیاج است تا مکان یک عنصر ITEM در آرایهٔ DATA با 1000 000 عنصر پیدا شود.

محدودیت‌های الگوریتم جستجوی دودویی

از آنجا که الگوریتم جستجوی دودویی از کارآیی بالایی برخوردار است مثلاً برای یک لیست اولیهٔ 1000 000 عنصری تنها حدوداً به 20 مقایسه احتیاج است، چرا با وجود این، می‌خواهیم از الگوریتم جستجوی دیگری استفاده کنیم؟ ملاحظه کردید که این الگوریتم احتیاج به دو شرط دارد: (۱) لیست بایستی مرتب شده، باشد و (۲) بایستی به عنصر وسط هر زیرلیست، دسترسی مستقیم داشته باشیم. به این معنی که اساساً باید از یک آرایهٔ مرتب شده برای نگهداری داده‌ها استفاده کرد. اما وقتی عملیات اضافه و حذف کردن زیادی در آرایه مورد نیاز باشد، نگهداری داده‌ها در یک آرایهٔ مرتب شده معمولاً پرهزینه است. بنابراین در چنین وضعیتهایی می‌توانیم از ساختمان دادهٔ متفاوتی نظیر لیستهای پیوندی یا درخت جستجوی دودویی استفاده کرده تا داده‌ها را در آنها ذخیره کنیم.

۴-۹ آرایه‌های چندبعدی

آرایه‌های خطی‌ای که تا اینجا مورد بررسی قرار گرفته‌اند آرایه‌های یک‌بعدی نیز نامیده می‌شوند. زیرا به هر عنصر این نوع آرایه‌ها می‌توان به کمک تنها یک اندیس دسترسی پیدا کرد. اکثر زبانهای

برنامه‌نویسی اجازه استفاده از آرایه‌های دوبعدی و سه‌بعدی را به برنامه‌نویس می‌دهند یعنی آرایه‌هایی که به هر عنصر آنها می‌توان به ترتیب به کمک دو یا سه اندیس دسترسی پیدا کرد. شایان ذکر است بعضی از زبانهای برنامه‌نویسی اجازه می‌دهند تعداد بعدهای یک آرایه حتی تا ۷ بعد باشد. در این بخش آرایه‌های چندبعدی مورد بررسی قرار می‌گیرد.

آرایه‌های دوبعدی

یک آرایه دوبعدی $m \times n$ مجموعه‌ای با $m \times n$ عنصر داده‌ای است به گونه‌ای که هر عنصر آن با یک جفت عدد صحیح (مانند J, K) بنام اندیس، مشخص شده باشد و دارای این خاصیت باشد که

$$1 \leq J \leq n \quad \text{و} \quad 1 \leq K \leq m$$

عنصر A با اندیس اول J و اندیس دوم K به صورت زیر نمایش داده می‌شود:

$$A[J, K] \quad \text{یا} \quad A_{J,K}$$

آرایه‌های دوبعدی را در ریاضیات، ماتریس، و در کاربردهای تجاری و بازرگانی جدول می‌نامند. بنابراین به آرایه‌های دوبعدی گاهی اوقات آرایه‌های ماتریسی نیز می‌گویند.

یک روش استاندارد برای نمایش آرایه دوبعدی $m \times n$ ماتریس A وجود دارد که در آن عناصر A تشکیل یک آرایه مستطیلی با m سطر و n ستون را می‌دهد که در آن عنصر $A[J, K]$ در سطر J ام و ستون K ام قرار دارد. به یک لیست افقی از عناصر، سطر و به لیست عمودی از عناصر، ستون می‌گویند. شکل ۸-۴ حالتی را نشان می‌دهد که در آن ماتریس A دارای ۳ سطر و ۴ ستون است.

		Columns			
		1	2	3	4
Rows	1	$A[1, 1]$	$A[1, 2]$	$A[1, 3]$	$A[1, 4]$
	2	$A[2, 1]$	$A[2, 2]$	$A[2, 3]$	$A[2, 4]$
	3	$A[3, 1]$	$A[3, 2]$	$A[3, 3]$	$A[3, 4]$

شکل ۸-۴. آرایه 3×4 دوبعدی A

تأکید می‌کنیم که هر سطر شامل آن دسته از عناصری است که اندیس اول آنها با هم برابر است و هر ستون شامل آن عناصری است که اندیس دوم آنها با هم برابر است.

مثال ۱۱-۴

فرض کنید تمام دانشجویان یک کلاس ۲۵ نفره در ۴ آزمون امتحانی شرکت کرده‌اند. فرض می‌شود

دانشجویان از 1 تا 25 شماره‌گذاری شده‌اند. نمرات آزمون را می‌توان در یک آرایه ماتریسی 25×4 بنام SCORE به صورتی که در شکل ۹-۴ نشان داده شده است جایگزین کرد.

Student	Test 1	Test 2	Test 3	Test 4
1	84	73	88	81
2	95	100	88	96
3	72	66	77	72
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
25	78	82	70	85

شکل ۹-۴. آرایه SCORE

بنابراین $SCORE[K, L]$ حاوی نمره دانشجوی K ام در آزمون L ام است.

$SCORE[2, 1]$, $SCORE[2, 2]$, $SCORE[2, 3]$, $SCORE[2, 4]$

حاوی 4 نمره آزمون دانشجوی دوم است.

فرض کنید A یک آرایه $m \times n$ دوبعدی باشد. اولین بعد A شامل مجموعه اندیسهای 1, ..., m با کران پائین 1 و کران بالای m است و دومین بعد A شامل مجموعه اندیسهای 1, ..., n با کران پائین 1 و کران بالای n است. طول یک بعد، تعداد اعداد صحیح موجود در مجموعه اندیسهای آن است. جفت طول‌های $m \times n$ (بخوانید m در n) اندازه آرایه نامیده می‌شود.

برخی از زبان‌های برنامه‌نویسی به برنامه‌نویس اجازه می‌دهند که آرایه‌های چندبعدی تعریف کنند که در آن کران پائین 1 نیستند نظیر آرایه‌هایی که غالباً بی‌نظم یا نامنظم نامیده می‌شوند. با وجود این، مجموعه اندیسهای هر بعد همچنان متشکل از اعداد صحیح متوالی از کران پائین تا کران بالای بعد است. طول یک بعد معین یعنی تعداد اعداد صحیح موجود در مجموعه اندیسهای آن، از فرمول زیر بدست می‌آید:

$$\text{Length} = \text{upper bound} - \text{lower bound} + 1 \quad (۳-۴)$$

توجه دارید که این فرمول همان فرمول (۱-۴) است که برای آرایه‌های خطی مورد استفاده قرار گرفته است. درحالت کلی همواره فرض می‌کنیم که آرایه‌ها منظم هستند یعنی کران پائین هر بعد آرایه برابر 1 است مگر آن که خلاف آن بیان شود.

هر زبان برنامه‌نویسی دارای قاعده و روش خاصی برای معرفی آرایه‌های چندبعدی است. همانگونه که در مورد آرایه‌های خطی ملاحظه کردید تمام عناصر چنین آرایه‌هایی باید از یک نوع داده باشند. برای

مثال فرض کنید DATA یک آرایه 8×4 دوبعدی با عناصری از نوع اعشاری باشد. FORTRAN، PL/I و PASCAL چنین آرایه‌ای را به صورت زیر معرفی می‌کنند:

FORTRAN: REAL DATA(4, 8)
 PL/I: DECLARE DATA(4, 8) FLOAT;
 Pascal: VAR DATA: ARRAY[1..4, 1..8] OF REAL;

ملاحظه می‌کنید که در پاسکال کرانه‌های پائین حتی اگر این کران 1 باشد هنگام معرفی آرایه ذکر می‌شود. توجه کنید: زبانهای برنامه‌نویسی‌ای که توانایی معرفی آرایه‌های نامنظم را دارند معمولاً برای جداکردن کران پائین از کران بالای هر بُعد از یک کولن و برای جداکردن ابعاد، از هم از یک کاما استفاده می‌کنند. برای مثال در FORTRAN:

INTEGER NUMB(2:5, -3:1)

NUMB را به صورت یک آرایه دوبعدی از نوع صحیح معرفی می‌کند. در اینجا مجموعه اندیسهای بُعدها به ترتیب از اعداد صحیح

2, 3, 4, 5 و 1, 0, -1, -2, -3

تشکیل شده‌اند. بنابه فرمول $(3-4)$ ، طول بعد اول برابر $4 = 2 - 1 + 5$ و طول بعد دوم برابر $5 = 1 + (-3) - 1$ است. بنابراین NUMB دارای $4 \times 5 = 20$ عنصر است.

نمایش آرایه‌های دوبعدی در حافظه

فرض کنید A یک آرایه $m \times n$ دوبعدی باشد. هرچند A به صورت یک آرایه مستطیلی از عناصر با m سطر و n ستون به تصویر کشیده شده است، اما این آرایه در حافظه کامپیوتر توسط یک بلاک با $m \times n$ خانه متوالی حافظه نمایش داده می‌شود. به خصوص این‌که، زبان برنامه‌نویسی آرایه را به دو صورت ۱- ستون به ستون که روش ستونی نیز نامیده می‌شود ۲- سطر به سطر که روش سطری نیز نامیده می‌شود ذخیره می‌کنند. شکل ۱۰-۴ وقتی که A یک آرایه دوبعدی 4×3 است را با این دو روش نشان می‌دهد. تأکید می‌کنیم که انتخاب هر یک از این دو نمایش بستگی به زبان برنامه‌نویسی* دارد نه به کاربر یا برنامه‌نویس.

یادآور می‌شویم که برای یک آرایه خطی A، کامپیوتر آدرس LOC(LA[K]) هر عنصر LA[K] از LA را نگه نمی‌دارد بلکه تنها آدرس Base(LA) یعنی آدرس عنصر اول LA را نگه می‌دارد. کامپیوتر از فرمول

*- زبان FORTRAN آرایه‌ها را به صورت ستونی و زبان‌های Algol-like مانند زبان C و PASCAL، آرایه‌ها را به صورت سطری، در آرایه بک بعدی ذخیره می‌کند. مترجم

$$\text{LOC}(\text{LA}[\text{K}]) = \text{Base}(\text{LA}) + w(\text{K} - 1)$$

A	Subscript
	(1, 1)
	(1, 2)
	(1, 3)
	(1, 4)
	(2, 1)
	(2, 2)
	(2, 3)
	(2, 4)
	(3, 1)
	(3, 2)
	(3, 3)
	(3, 4)

(ب) روش سطری

A	Subscript
	(1, 1)
	(2, 1)
	(3, 1)
	(1, 2)
	(2, 2)
	(3, 2)
	(1, 3)
	(2, 3)
	(3, 3)
	(1, 4)
	(2, 4)
	(3, 4)

(الف) روش ستونی

شکل ۱۰-۴

برای پیدا کردن آدرسی $\text{LA}[\text{K}]$ به موقع و بدون در نظر گرفتن K استفاده می‌کند. در اینجا W تعداد کلمات در حافظه یا طول کلمه برای آرایه LA است و یک، کران پائین مجموعه اندیس LA است. از وضعیتی مشابه وضعیت بالا برای نگهداری هر آرایه دوبعدی که $n \times m$ است استفاده می‌شود. به عبارت دیگر کامپیوتر آدرس پایه $\text{Base}(\text{A})$ آدرس اولین عنصر A یعنی $\text{A}[1, 1]$ را نگه می‌دارد و آدرس $\text{LOC}(\text{A}[\text{J}, \text{K}])$ ی $\text{A}[\text{J}, \text{K}]$ را با استفاده از فرمول

$$\text{LOC}(\text{A}[\text{J}, \text{K}]) = \text{Base}(\text{A}) + w[\text{M}(\text{K} - 1) + (\text{J} - 1)] \quad (۴-۴) \quad (\text{روش ستونی})$$

و فرمول

$$\text{LOC}(\text{A}[\text{J}, \text{K}]) = \text{Base}(\text{A}) + w[\text{N}(\text{J} - 1) + (\text{K} - 1)] \quad (۴-۵) \quad (\text{روش سطری})$$

محاسبه می‌کند. در این جا نیز W تعداد کلمات خانه حافظه یا طول کلمه را برای آرایه A نمایش می‌دهد.

توجه دارید که فرمولها برحسب J و K خطی هستند و می‌توان آدرس $LOC(A[J, K])$ را به‌موقع بدون درنظر گرفتن K به دست آورد.

مثال ۱۲-۴

آرایه ماتریسی SCORE در مثال ۱۱-۴ را که 25×4 است درنظر بگیرید. فرض کنید $Base(SCORE) = 200$ و تعداد $W=4$ کلمه در خانه حافظه وجود داشته باشد. علاوه بر این فرض می‌شود زبان برنامه‌نویسی آرایه‌های دوبعدی را با استفاده از روش سطری ذخیره می‌کند. آنگاه آدرس $SCORE[12, 3]$ یعنی نمرهٔ آزمون سوم دانشجوی دوازدهم، به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$LOC(SCORE[12, 3]) = 200 + 4[4(12 - 1) + (3 - 1)] = 200 + 4[46] = 384$$

ملاحظه می‌شود که در محاسبهٔ آدرس تنها از رابطهٔ (۵-۴) استفاده شده است.

بدیهی است که آرایه‌های چندبعدی تفاوت بین نمایشهای منطقی و فیزیکی داده‌ها را بهتر بیان می‌کنند. شکل ۸-۴ چگونگی نمایش منطقی A آرایهٔ ماتریسی 3×4 را به صورت یک آرایهٔ مستطیلی از داده‌ها که در آن $A[J, K]$ در سطر J و ستون K ظاهر می‌شود نشان می‌دهد. از طرف دیگر، داده‌ها به صورت فیزیکی به وسیلهٔ یک مجموعهٔ خطی از خانه‌های حافظه یا به صورت یک بعدی در حافظهٔ کامپیوتر ذخیره می‌شوند. این وضعیت در سراسر کتاب مورد توجه ماست. مثلاً برخی از ساختمان داده‌ها نظیر درختها یا گرافها را می‌توان به صورت منطقی درنظر گرفت درحالی که از نظر فیزیکی، به صورت خطی در حافظهٔ کامپیوتر ذخیره می‌شوند.

حالت کلی آرایه‌های چندبعدی

آرایه‌های چندبعدی در حالت کلی مانند آرایهٔ دو بعدی تعریف می‌شود. به‌ویژه این که، یک آرایهٔ n بعدی $m_1 \times m_2 \times \dots \times m_n$ بنام B مجموعه‌ای از m_1, m_2, \dots, m_n عنصر داده‌ای است که در آن هر عنصر به وسیلهٔ لیستی از n عدد صحیح نظیر k_1, k_2, \dots, k_n مشخص می‌شود که اندیس نام دارند و دارای این خاصیت است که

$$1 \leq K_1 \leq m_1, \quad 1 \leq K_2 \leq m_2, \quad \dots, \quad 1 \leq K_n \leq m_n$$

عنصر B با اندیسهای k_1, k_2, \dots, k_n به صورت زیر نمایش داده می‌شود:

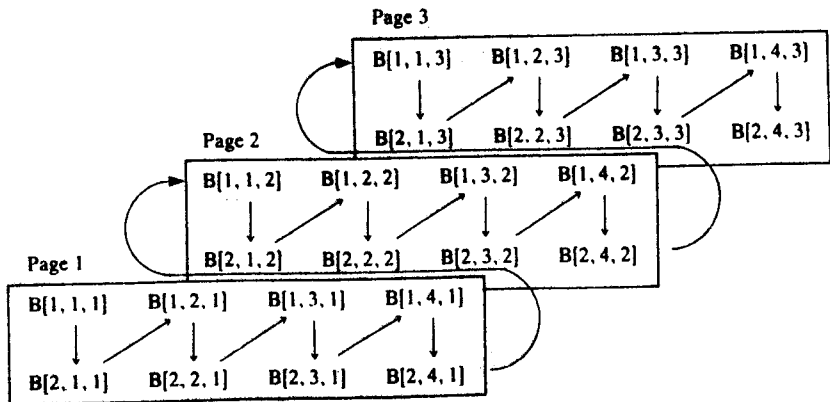
$$B[K_1, K_2, \dots, K_n] \quad \text{یا} \quad B_{K_1, K_2, \dots, K_n}$$

آرایه در حافظه، در دنباله‌ای از خانه‌های حافظه پشت سرهم ذخیره می‌شوند. به‌خصوص اینکه،

زبانهای برنامه‌نویسی آرایه B را به یکی از دو صورت سطری یا ستونی ذخیره می‌کنند. منظور ما از روش سطری آن است که عناصر به صورتی لیست می‌شوند که اندیسها مانند کیلومترشمار اتومبیل تغییر می‌کنند یعنی به گونه‌ای که آخرین اندیس اول تغییر می‌کند (با سرعت خیلی زیاد)، اندیس همسایگی اندیس آخر در مرحله دوم تغییر می‌کند (با سرعت کمتر) و الی آخر. منظور ما از روش ستونی آن است که عناصر به صورتی لیست می‌شوند که اولین اندیس، اول تغییر می‌کند (با سرعت خیلی زیاد)، دومین اندیس در مرحله دوم تغییر می‌کند (با سرعت کمتر) و الی آخر.

مثال ۴-۱۳

فرض کنید B یک آرایه سه بعدی $2 \times 4 \times 3$ باشد. آنگاه B دارای $2 \times 4 \times 3 = 24$ عنصر است. این 24 عنصر B معمولاً به صورت شکل ۴-۱۱ نشان داده می‌شود یعنی به صورت سه لایه که صفحه‌ها نامیده شده ظاهر می‌شوند و در آن هر صفحه شامل آرایه مستطیلی 2×4 از عناصر با اندیس سوم مساوی است. بنابراین سه اندیس یک عنصر در آرایه سه بعدی به ترتیب سطر، ستون و صفحه Page آن عنصر نامیده می‌شود.



شکل ۴-۱۱

دو روش ذخیره B در آرایه یک بعدی شکل ۴-۱۲ نشان داده شده است. ملاحظه می‌کنید که پیکانها در شکل ۴-۱۱ روش ستونی قرار گرفتن عناصر را نمایش می‌دهند.

B	Subscripts
	(1, 1, 1)
	(1, 1, 2)
	(1, 1, 3)
	(1, 2, 1)
	(1, 2, 2)
⋮	⋮
	(2, 4, 2)
	(2, 4, 3)

(ب) روش سطری

B	Subscripts
	(1, 1, 1)
	(2, 1, 1)
	(1, 2, 1)
	(2, 2, 1)
	(1, 3, 1)
⋮	⋮
	(1, 4, 3)
	(2, 4, 3)

(الف) روش ستونی

شکل ۱۲-۴

در حالت کلی تعریف آرایه‌های چندبعدی اجازه می‌دهد که کرانه‌های پائین مخالف 1 باشد. فرض کنید C چنین آرایه n بعدی‌ای باشد. همانند قبل، مجموعه اندیس برای هر بعد C شامل اعداد صحیح متوالی از کران پائین تا کران بالای بعد است. طول L_i بعد i آرایه C برابر تعداد عناصر مجموعه اندیس‌ها است همچنین L_i را می‌توان مانند قبل از فرمول

$$L_i = \text{upper bound} - \text{lower bound} + 1 \quad (۴-۶)$$

برای هر اندیس معین K_i به دست آورد، اندیس مؤثر E_i از L_i برابر تعداد اندیس‌هایی است که قبل از K_i در مجموعه اندیس قرار دارد و E_i را می‌توان با استفاده از فرمول

$$E_i = K_i - \text{lower bound} \quad (۴-۷)$$

بدست آورد. بنابراین اگر C به روش ستونی ذخیره شده باشد آدرس $\text{LOC}(C[K_1, K_2, \dots, K_N])$ یک عنصر دلخواه C را می‌توان با استفاده از فرمول

$$\text{Base}(C) + w[(((E_N L_{N-1} + E_{N-1}) L_{N-2} + \dots + E_3) L_2 + E_2) L_1 + E_1] \quad (۴-۸)$$

و اگر C به روش سطری ذخیره شده باشد، با استفاده از فرمول

$$\text{Base}(C) + w[(((E_1 L_2 + E_2) L_3 + E_3) L_4 + \dots + E_{N-1}) L_N + E_N] \quad (۴-۹)$$

به دست آورد. یکبار دیگر متذکر می‌شویم که $\text{Base}(C)$ آدرس عنصر اول C و W تعداد کلمات در خانه حافظه یا طول کلمه را نشان می‌دهد.

مثال ۴-۱۴

فرض کنید MAZE یک آرایه سه بعدی باشد که به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\text{MAZE}(2:8, -4:1, 6:10)$$

در آن صورت طول سه بعد MAZE به ترتیب عبارتند از:

$$L_1 = 8 - 2 + 1 = 7, \quad L_2 = 1 - (-4) + 1 = 6, \quad L_3 = 10 - 6 + 1 = 5$$

بنابراین MAZE دارای $L_1 \cdot L_2 \cdot L_3 = 7 \cdot 6 \cdot 5 = 210$ عنصر است.

فرض کنید زبان برنامه نویسی، MAZE را به روش سطری در حافظه ذخیره می‌کند، همچنین فرض کنید $\text{Base}(\text{MAZE}) = 200$ و $W=4$ کلمه در خانه حافظه وجود داشته باشد. آدرس یک عنصر MAZE به عنوان مثال $\text{MAZE}[5, -1, 8]$ به صورت زیر محاسبه می‌شود. اندیسهای مؤثر به ترتیب عبارتند از:

$$E_1 = 5 - 2 = 3, \quad E_2 = -1 - (-4) = 3, \quad E_3 = 8 - 6 = 2$$

با استفاده از فرمول (۹-۴) برای روش سطری داریم:

$$E_1 L_2 = 3 \cdot 6 = 18$$

$$E_1 L_2 + E_2 = 18 + 3 = 21$$

$$(E_1 L_2 + E_2) L_3 = 21 \cdot 5 = 105$$

$$(E_1 L_2 + E_2) L_3 + E_3 = 105 + 2 = 107$$

بنابراین:

$$\text{LOC}(\text{MAZE}[5, -1, 8]) = 200 + 4(107) = 200 + 428 = 628$$

۴-۱۰ اشاره‌گرها، آرایه‌های نوع اشاره‌گر

فرض کنید DATA آرایه دلخواهی باشد. متغیر P یک اشاره‌گر نامیده می‌شود هرگاه P به یک عنصر در DATA "اشاره کند" یعنی هرگاه P دارای آدرس یک عنصر DATA باشد. بطور مشابه آن را یک آرایه از نوع اشاره‌گر گویند اگر هر عنصر آرایه PTR یک اشاره‌گر باشد. اشاره‌گرها و آرایه‌های نوع اشاره‌گر برای آسانی پردازش اطلاعات در DATA مورد استفاده قرار می‌گیرند. این بخش، این ابزار مفید را در پوشش یک مثال توضیح می‌دهد.

سازمانی را در نظر بگیرید که لیست اعضایش را به چهار گروه تقسیم می‌کند که در آن هر گروه شامل یک لیست الفبایی از اعضای است که در یک منطقه معین زندگی می‌کنند. شکل ۴-۱۳ یک چنین لیستی را نشان می‌دهد.

Group 1	Group 2	Group 3	Group 4
Evans Harris Lewis Shaw	Conrad Felt Glass Hill King Penn Silver Troy Wagner	Davis Segal	Baker Cooper Ford Gray Jones Reed

شکل ۱۳-۴

ملاحظه می‌کنید که در لیست بالا 21 نفر وجود دارد و هر گروه به ترتیب شامل 4، 9، 2 و 6 نفر است. فرض کنید لیست اعضا با حفظ گروه‌های مختلف در حافظه ذخیره می‌شود. یک راه برای رسیدن به این منظور استفاده از یک آرایه $n \times 4$ ، دوبعدی است که هر سطر شامل یک گروه است یا یک آرایه $n \times 4$ ، دوبعدی است که هر ستون شامل یک گروه است. هرچند این ساختمان داده اجازه دسترسی به تک تک گروه‌ها را می‌دهد ولی هنگامی که اندازه گروه خیلی بزرگ می‌شود بیهوده حافظه زیادی مصرف خواهد شد. به‌ویژه اینکه داده‌های شکل ۱۳-۴ احتیاج به دست‌کم یک آرایه 9×4 یا 4×9 عنصری برای ذخیره 21 نام خواهد داشت که تقریباً دو برابر حافظه مورد نیاز است. شکل ۱۴-۴ نمایش آرایه 4×9 را نشان می‌دهد. در این نمودار ستاره‌ها عناصر داده‌ای و صفرها خانه‌های حافظه بلااستفاده را نشان می‌دهند. آرایه‌هایی که سطرها یا ستون‌هایش با تعداد مختلفی از عناصر داده‌ای شروع می‌شود و با خانه‌های حافظه مصرف نشده پایان می‌یابد آرایه‌های پله‌ای یا دنداندار نام دارند.

$$\begin{pmatrix} * & * & * & * & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & * & * & * & * \\ * & * & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & * & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

شکل ۱۴-۴ آرایه‌های دنداندار (پله‌ای)

راه دیگری که می‌توان لیست اعضا را در حافظه ذخیره کرد در شکل ۱۵-۴ (الف) به تصویر کشیده شده است یعنی یک گروه پس از گروه دیگر لیست، در یک آرایه خطی قرار می‌گیرد.

MEMBER	
1	Evans
2	Harris
3	Lewis
4	Shaw
5	\$\$\$
6	Conrad
7	
14	Wagner
15	\$\$\$
16	Davis
17	Segal
18	\$\$\$
19	Baker
20	
24	Reed
25	\$\$\$

(ب)

MEMBER	
1	Evans
2	Harris
3	Lewis
4	Shaw
5	Conrad
6	
7	
13	Wagner
14	Davis
15	Segal
16	Baker
17	
18	
21	Reed

(الف)

شکل ۴-۱۵

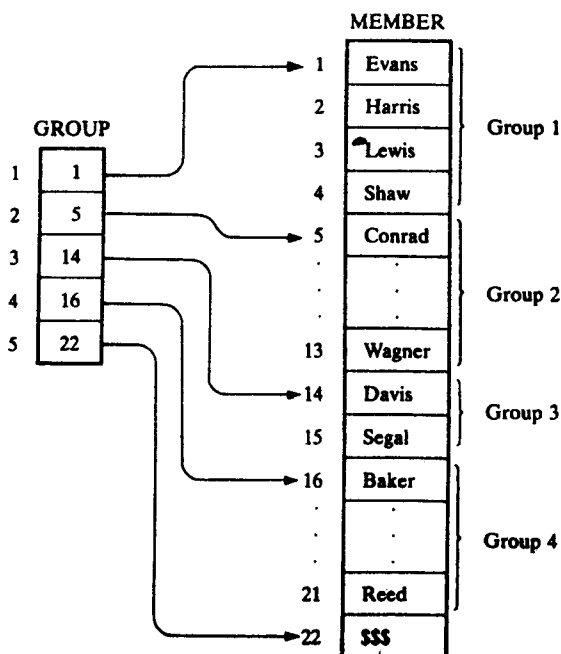
واضح است از نظر حافظه این روش کارا است. همچنین تمام لیست قابل پردازش است به عنوان مثال براحتی می‌توان تمام نام‌های داخل لیست را چاپ کرد. از طرف دیگر، هیچ راهی برای دسترسی به یک گروه خاص وجود ندارد مثلاً هیچ راهی برای پیدا کردن و چاپ نام‌های داخل گروه سوم به تنهایی وجود ندارد.

یک نسخه اصلاح شده روش بالا در شکل ۴-۱۵ (ب) به تصویر درآمده است. به بیان دیگر، نام‌ها گروه به گروه در یک آرایه خطی لیست شده‌اند بجز اینکه اکنون نگیان یا علامتی نظیر سه علامت دلار در اینجا بکار گرفته شده است که مبین پایان یک گروه است، این روش تنها از تعداد اندکی حافظه اضافی (یک حافظه برای هر گروه)، استفاده می‌کند اما اکنون به هر گروه خاص می‌توان دسترسی پیدا کرد. برای

مثال اکنون یک برنامه‌نویس می‌تواند آن دسته از نامهای گروه سوم را که پس از نگهبان دوم یا قبل از نگهبان سوم قرار دارند پیدا کرده چاپ کند. عیب اصلی این نمایش آن است که همچنان از اول لیست باید پیمایش شود تا گروه سوم را شناسایی کند، به بیان دیگر گروههای مختلف با این نمایش مشخص نمی‌شوند.

آرایه‌های نوع اشاره‌گر

دو ساختمان داده شکل ۱۵-۴ که از نظر حافظه کارا می‌باشند را می‌توان به آسانی اصلاح کرد طوری که بتوان تک‌تک گروهها را شماره‌گذاری کرد. این کار با استفاده از یک آرایه نوع اشاره‌گر، در اینجا GROUP انجام می‌شود که شامل مکان گروههای مختلف یا به‌ویژه مکان عناصر اول گروههای مختلف می‌باشد. شکل ۱۶-۴ چگونگی اصلاح شکل ۱۵-۴ (الف) را نشان می‌دهد.



شکل ۱۶-۴

ملاحظه می‌کنید که $GROUP[L]$ و $GROUP[L + 1] - 1$ به ترتیب شامل عناصرهای اول و آخر

گروه L است. دیده می‌شود که $GROUP[5]$ به نگهبان لیست اشاره می‌کند و $1 - GROUP[5]$ مکان عنصر آخر گروه ۴ را به دست می‌دهد.

مثال ۱۵-۴

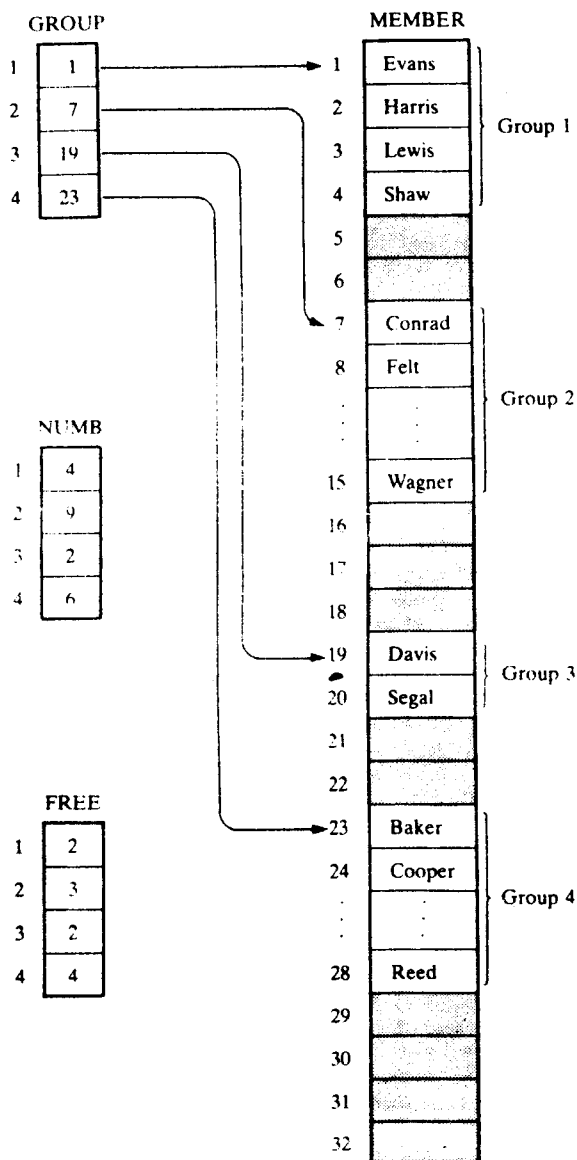
فرض کنید بخواهیم تنها نامهای گروه L ام شکل ۱۶-۴ را چاپ کنیم که مقدار L بخشی از ورودی است. از آنجا که $GROUP[L]$ و $1 - GROUP[L + 1]$ به ترتیب شامل مکانهای نام اول و آخر گروه L است. قطعه برنامه زیر این کار را انجام می‌دهد:

1. Set $FIRST := GROUP[L]$ and $LAST := GROUP[L + 1] - 1$.
2. Repeat for $K = FIRST$ to $LAST$:
Write: $MEMBER[K]$.
[End of loop.]
3. Return.

سادگی این قطعه برنامه از این واقعیت ناشی می‌شود که آرایه نوع اشاره‌گر $GROUP$ گروه L ام را مشخص می‌کند. متغیرهای $FIRST$ و $LAST$ اساساً برای سهولت در نمادگذاری بکار گرفته شده‌اند. ساختمان داده شکل ۱۶-۴ با یک تغییر کوچک در شکل ۱۷-۴ نشان داده شده است که در آن خانه‌های حافظه بلااستفاده با سایه مشخص شده است. ملاحظه می‌کنید که اکنون بین گروه‌ها چند خانه خالی وجود دارد. بنابراین یک عنصر جدید می‌تواند در یک گروه اضافه شود بدون آن که احتیاج به جابجایی عناصر گروه دیگری باشد. با استفاده از این ساختمان داده به یک آرایه $NUMB$ احتیاج است که تعداد عناصر هر گروه را به دست می‌دهد. ملاحظه می‌شود که $GROUP[K + 1] - GROUP[K]$ تعداد کل حافظه موجود برای گروه K است. بنابراین

$$FREE[K] = GROUP[K + 1] - GROUP[K] - NUMB[K]$$

تعداد خانه حافظه خالی بعد از $GROUP K$ است. گاهی اوقات بهتر است به صورت صریح آرایه اضافی $FREE$ را تعریف کنیم.



شکل ۴-۱۷

مثال ۴-۱۶

مجدداً فرض کنید بخواهیم تنها نامهای گروه A را چاپ کنیم که در آن A بخشی از ورودی است اما اکنون به صورت شکل ۴-۱۷ ذخیره می‌شوند. ملاحظه می‌کنید که

GROUP[L] + NUMB[L] - 1 و GROUP[L]

به ترتیب شامل مکان نامهای اول و آخر گروه L است. بنابراین قطعه برنامه زیر، این عمل را انجام می‌دهد.

1. Set FIRST := GROUP[L] and LAST := GROUP[L] + NUMB[L] - 1.
2. Repeat for K = FIRST to LAST:
Write: MEMBER[K].
[End of loop.]
3. Return.

متغیرهای FIRST و LAST اساساً برای سهولت در نمادگذاری بکار رفته‌اند.

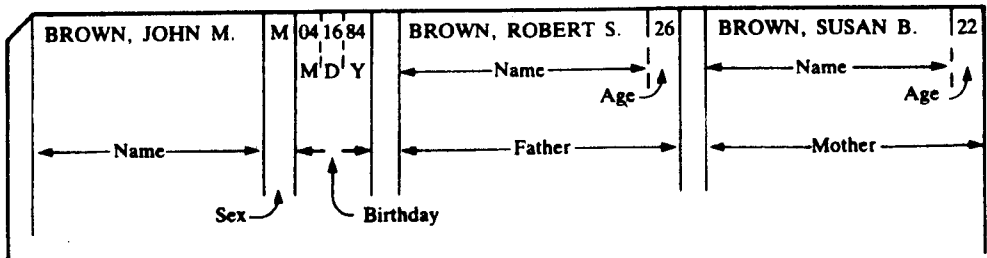
۴-۱۱ رکوردها؛ ساختارهای رکوردی

مجموعه‌هایی از داده‌ها هستند که غالباً به صورت سلسله مراتب فیلد، رکورد و فایل سازماندهی می‌شوند. به‌ویژه این که، یک رکورد مجموعه‌ای از اقلام داده‌ای مرتبط به هم است که هر یک از این اقلام، فیلد یا خصیصه نامیده می‌شوند و یک فایل مجموعه‌ای از رکوردهای مشابه است. هر فیلد می‌تواند متشکل از چند زیرفیلد باشد. آن دسته از فیلدها که غیرقابل تجزیه هستند فیلدهای ابتدایی یا اتمی یا اسکالر نامیده می‌شوند. شناسه نامی است که به اقلام داده‌ای متعدد داده می‌شود. اگرچه یک رکورد مجموعه‌ای از اقلام داده‌ای بنام فیلد است اما بین رکورد و یک آرایه خطی تفاوتی به شرح زیر وجود دارد:

(الف) یک رکورد می‌تواند مجموعه‌ای از داده‌های غیرهمجنس باشد یعنی فیلدهای یک رکورد می‌توانند از نوعهای مختلف باشند اما عناصر یک آرایه همجنس هستند.

(ب) فیلدهای یک رکورد به وسیله نامهای خصیصه‌شان مشخص می‌شوند از این‌رو بین عناصر آنها می‌تواند هیچ ترتیب طبیعی وجود نداشته باشد در صورتی که در آرایه‌ها عناصر برحسب اندیس مرتب هستند.

تحت رابطه تقسیم فیلد به زیرفیلدها، فیلدهای یک رکورد تشکیل ساختار سلسله مراتبی را می‌دهند که می‌تواند به وسیله شماره‌های "سطح" به صورتی که در مثال ۱۷-۴ و ۱۸-۴ داده شده است بیان گردد.



مثال ۱۷-۴

فرض کنید یک بیمارستان مشخصات هر نوزاد تازه تولد یافته را در یک رکورد نگهداری می‌کند که حاوی فیلدهای زیر است: نام **Name**، جنس **Sex**، روز تولد **Birthday**، پدر **Father**، مادر **Mother**. علاوه بر این فرض کنید که روز تولد فیلدهای مرکبی است که دارای فیلدهای ماه **Month**، روز **Day** و سال **Year** است، همچنین پدر و مادر فیلدهای مرکبی هستند که دارای زیرفیلدهای نام **Name** و سن **Age** است. شکل ۱۸-۴ چگونگی بیان چنین رکوردی را نشان می‌دهد.

```

1 Newborn
  2 Name
  2 Sex
  2 Birthday
    3 Month
    3 Day
    3 Year
  2 Father
    3 Name
    3 Age
  2 Mother
    3 Name
    3 Age

```

ساختار رکورد بالا معمولاً به صورت فوق بیان می‌شود. توجه دارید که نام **Name** در این رکورد سه بار و سن **Age** دو بار ظاهر شده است:

عدد سمت چپ هر شناسه شماره سطح نامیده می‌شود. ملاحظه می‌کنید که پس از هر فیلد مرکب، زیرفیلدهای آن نوشته شده است و سطح زیرفیلدها، ۱ واحد بیشتر از سطح فیلدهای مرکب است. علاوه بر این یک فیلد در فیلد مرکب واقع است اگر و فقط اگر بلافاصله با شماره سطح بزرگتر پس از فیلد مرکب باشد.

بعضی از شناسه‌ها در یک ساختار رکوردی می‌توانند به آرایه‌هایی از عناصر مرتبط باشند. درواقع فرض کنید به جای خط اول ساختار بالا

```
1 Newborn(20)
```

را داشته باشیم. این عبارت مبین آن است که فایل از ۲۰ رکورد تشکیل شده است و نمادگذاری اندیسی رایج برای تمایز بین رکوردهای مختلف یک فایل بکار می‌رود. به عبارت دیگر می‌نویسیم:

$Newborn_1, Newborn_2, \dots, newborn_3, \dots$

$Newborn[1], Newborn[2], \dots, newborn[3], \dots$

یا

که رکوردهای مختلف یک فایل را نشان می‌دهد.

مثال ۱۸-۴

رکوردهای دانشجویی یک کلاس به صورت زیر سازماندهی شده است:

```

1 Student(20)
  2 Name
    3 Last
    3 First
    3 MI (Middle Initial)
  2 Test(3)
  2 Final
  2 Grade

```

شناسه Student(20) بیانگر آن است که تعداد دانشجویان 20 نفر است. شناسه Test(3) بیانگر آن است که هر دانشجو در سه آزمون امتحانی شرکت کرده است. ملاحظه می‌کنید که برای هر دانشجو 8 فیلد ابتدایی وجود دارد، چون آزمون Test سه بار حساب می‌شود. روی هم رفته، برای تمام دانشجویان در این ساختار 160 فیلد ابتدایی وجود دارد.

مشخص کردن فیلدهای یک رکورد

فرض کنید بخواهیم به اطلاعات یک فیلد در رکورد دسترسی پیدا کنیم. در برخی از این موارد، به سادگی نمی‌توان نام اطلاعات فیلد را نوشت چون همین نام ممکن است در مکانهای دیگری از رکورد ظاهر شود. برای مثال سن Age در دو مکان رکورد مثال ۱۷-۴ ظاهر شده است، بنابراین برای مشخص کردن یک فیلد خاص بایستی بتوان وضعیت نام فیلد را با استفاده از نام فیلد مرکب مربوطه در ساختار بیان کرد. این بیان وضعیت فیلد با استفاده از نقطه (مانند نقطه اعشار) مشخص می‌شود، که فیلد مرکب را از زیرفیلدهایش جدا می‌کند.

مثال ۱۹-۴

(الف) ساختار رکوردی Newborn را در مثال ۱۷-۴ در نظر بگیرید. جنس Sex و سال Year لازم نیست تعیین وضعیت شوند چون هر یک از این فیلدها به صورت منحصر بفرد در ساختار معرفی شده‌اند. از طرف دیگر، فرض کنید بخواهیم به سن Age پدر Father دسترسی پیدا کنیم. این کار به صورت زیر انجام می‌شود:

Father.Age یا بطور خلاصه Newborn. Father. Age

به رجوع اول بیان وضعیت کامل می‌گویند. گاهی اوقات برای روشن شدن مطلب شناسه‌های بیان وضعیت به فیلدها اضافه می‌شود.

(ب) فرض کنید جای خط اول در ساختار رکوردی مثال ۱۰-۴ را با عبارت زیر عوض کرده‌ایم:

1 Newborn(20)

به عبارت دیگر، Newborn بنابه تعریف یک فایل 20 رکوردی باشد. آنگاه هر فیلد به‌طور اتوماتیک یک آرایه 20 عنصری می‌شود. برخی از زبانهای برنامه‌نویسی اجازه می‌دهند به جنس Sex تازه تولد یافته ششم به صورت زیر دسترسی پیدا کنیم:

Newborn.Sex[6] یا بطور خلاصه Sex[6]

به طور مشابه، به سن Age پدر Father تازه تولد یافته ششم به صورت زیر دسترسی پیدا کنیم:

Newborn.Father.Age[6] یا بطور خلاصه Father.Age[6]

(ج) ساختار رکوردی دانشجویان را در مثال ۱۸-۴ در نظر بگیرید. از آنجا که دانشجو Student یک فایل 20 عنصری است تمام فیلدها به‌طور اتوماتیک آرایه‌های 20 عنصری می‌شوند. علاوه بر این یک Test آرایه دوبعدی می‌شود. به‌خصوص این که، به Test دوم دانشجوی ششم به صورت زیر دسترسی پیدا می‌کنیم:

Student.Test[6,2] یا بطور خلاصه Test[6,2]

ترتیب اندیسها متناظر با ترتیب شناسه‌های بیان وضعیت است. برای مثال

Test[3, 1]

به آزمون سوم دانشجوی اول دسترسی پیدا نمی‌کنیم بلکه به آزمون اول دانشجوی سوم دسترسی داریم. توجه کنید: در بعضی از کتاب‌ها برای بیان وضعیت شناسه‌های رکوردها، به جای نماد نقطه‌گذاری بین فیلدها، از نماد تابعی زیر استفاده می‌شود. برای مثال

Age(Father (Newborn)) را به جای Newborn.Father.Age

First(Name (Student[8])) را به جای Student.Name.First[8]

می‌نویسند.

ملاحظه می‌کنید که ترتیب بیان وضعیت شناسه‌ها در نماد تابعی عکس ترتیب آن در نماد نقطه‌گذاری است.

۱۲-۴ نمایش رکوردها در حافظه، آرایه‌های موازی

از آنجا که رکوردها می‌توانند شامل داده‌های غیرهمجنس باشند، از این‌رو عناصر یک رکورد را

نمی‌توان در یک آرایه ذخیره کرد. برخی از زبانهای برنامه‌نویسی نظیر PL / I ، PASCAL و COBOL دارای ساختار رکوردی تعبیه شده در زبان هستند.

مثال ۲۰-۴

ساختار رکوردی Newborn مثال ۱۷-۴ را در نظر بگیرید. این رکورد را در زبان PL / I با معرفی به صورت زیر، می‌توان ذخیره کرد که مجموعه‌ای از داده‌ها بنام ساختار Structure تعریف می‌کند:

```

DECLARE 1 NEWBORN,
2 NAME CHAR(20),
2 SEX CHAR(1),
2 BIRTHDAY,
3 MONTH FIXED,
3 DAY FIXED,
3 YEAR FIXED,
2 FATHER,
3 NAME CHAR(20),
3 AGE FIXED,
2 MOTHER
3 NAME CHAR(20),
3 AGE FIXED;

```

ملاحظه می‌کنید که متغیرهای جنس SEX و سال YEAR منحصر بفرد هستند، از این رو برای مراجعه به آنها احتیاج به بیان وضعیت نیست. از طرف دیگر AGE منحصر بفرد نیست. بنابراین از نماد

FATHER.AGE یا MOTHER.AGE

بسته به این که بخواهیم به سن پدر مراجعه کنیم یا سن مادر استفاده می‌کنیم.

فرض کنید در یک زبان برنامه‌نویسی ساختارهای سلسله مراتبی که در PL / I ، PASCAL و COBOL موجود است وجود نداشته باشد. با این فرض که رکورد شامل داده‌های غیرهمجنس است رکورد را می‌توان در متغیرهای منفردی ذخیره کرد که برای هر فیلد ابتدایی از یک متغیر استفاده می‌کند. از طرف دیگر، فرض کنید خواسته باشیم تمام رکوردهای فایل را ذخیره کنیم. توجه دارید که تمام عناصر داده‌ای که به یک شناسه تعلق دارند از یک نوع هستند. چنین فایلی را می‌توان به صورت مجموعه‌ای از آرایه‌های موازی در حافظه ذخیره کرد، به عبارت دیگر عناصر آرایه‌های مختلف که دارای یک اندیس هستند به یک رکورد تعلق دارند. این وضعیت در دو مثال بعدی نشان داده شده است.

مثال ۲۱-۴

فرض کنید لیست اعضا شامل نام NAME، سن AGE، جنس SEX و شماره تلفن PHONE هر عضو

است. می‌توان این فایل را در چهار آرایه موازی **NAME**، **AGE**، **SEX** و **PHONE** به صورت نشان داده شده در شکل ۴-۱۹ ذخیره کرد. به عبارت دیگر برای یک اندیس معین **K**، عنصرهای **NAME[K]**، **AGE[K]**، **SEX[K]** و **PHONE[K]** به یک رکورد تعلق دارند.

	NAME	AGE	SEX	PHONE
1	John Brown	28	Male	234-5186
2	Paul Cohen	33	Male	456-7272
3	Mary Davis	24	Female	777-1212
4	Linda Evans	27	Female	876-4478
5	Mark Green	31	Male	255-7654
:	:	:	:	:
:	:	:	:	:

شکل ۴-۱۹

مثال ۴-۲۲

بار دیگر رکورد **Newborn** مثال ۴-۱۷ را در نظر بگیرید. می‌توان فایلی متشکل از این‌گونه رکوردها در **نه آرایه خطی** به صورت زیر ذخیره کرد:

NAME, SEX, MONTH, DAY, YEAR, FATHERNAME, FATHERAGE, MOTHERNAME, MOTHERAGE

که در آن از هر آرایه، برای یک فیلد ابتدایی استفاده می‌کنیم. در اینجا برای نام **NAME** و سن **AGE** پدر و مادر باید از نامهای متغیر متفاوتی استفاده شود که در مثال قبل لزومی به این کار نبود. مجدداً فرض می‌کنیم که آرایه‌ها موازی هستند یعنی برای اندیس ثابت **K**، عناصر زیر به یک رکورد تعلق دارند.

NAME[K], SEX[K], MONTH[K], ..., MOTHERAGE[K]

رکودهایی با طول متغیر

فرض کنید یک مدرسه ابتدایی مشخصات هر دانش‌آموز را که شامل فیلدهای زیراست نگهداری می‌کند. نام **Name**، شماره تلفن **Telephone Number**، پدر **Father**، مادر **Mother**، دیگر افراد خانواده **Siblings**. در اینجا پدر، مادر و دیگر افراد خانواده به ترتیب شامل نام پدر و مادر دانش‌آموز و یا برادر یا خواهرهای وی است که در همان مدرسه درس می‌خوانند. سه نمونه از این رکوردها می‌تواند به صورت

زیر باشد :

Adams, John;	345-6677;	Richard;	Mary;	Jane, William, Donald
Bailey, Susan;	222-1234;	Steven;	Sheila;	XXXX
Clark, Bruce;	567-3344;	XXXX;	Barbara;	David, Lisa

در اینجا XXXX مبین فوت شدن پدر است یا این که با دانش آموز زندگی نمی‌کند یا دانش آموز برادر یا خواهری در مدرسه ندارد.

رکوردهای بالا مثالی از یک رکورد با طول متغیر است، چون عنصر داده‌ای دیگر افراد خانواده می‌تواند شامل هیچ یا چند اسم باشد. یک راه ذخیره فایل در آرایه‌ها در شکل ۲۰-۴ به تصویر درآمده است که در آن

	NAME	PHONE	FATHER	MOTHER	NUMB	PTR		SIBLING
1	Adams, John	345-6677	Richard	Mary	3	5	1	
2	Bailey, Susan	222-1234	Steven	Sheila	0	0	2	David
3	Clark, Bruce	567-3344	XXXX	Barbara	2	2	3	Lisa
							4	
							5	Jane
							6	William
							7	Donald
							8	

شکل ۲۰-۴

NAME, PHONE, FATHER, MOTHER چهار فیلد اول رکورد را نگه می‌دارند آرایه‌های خطی هستند و آرایه‌های **NUMB** و **PTR** به ترتیب تعداد و مکان دیگر افراد خانواده را در آرایه **SIBLING** به دست می‌دهند.

۴-۱۳ ماتریسها

بردارها و ماتریسها اصطلاحات ریاضی هستند که به مجموعه‌هایی از اعداد اشاره می‌کنند و به ترتیب مشابه آرایه‌های خطی و دو بعدی در کامپیوتر هستند. به بیان دیگر:

(الف) یک بردار n عنصری V لیستی از n عدد است که معمولاً به صورت زیر نشان داده می‌شود:

$$V = (V_1, V_2, \dots, V_n)$$

(ب) یک ماتریس $m \times n$ مانند A آرایه‌ای از $m \times n$ عدد است که در m سطر و n ستون به صورت زیر چیده شده باشد:

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{m1} & A_{m2} & \cdots & A_{mn} \end{pmatrix}$$

در مباحث مربوط به بردارها و ماتریسها برای اشاره به تک تک اعداد از اصطلاح اسکالر استفاده می‌شود.

یک ماتریس با یک سطر (ستون) را می‌توان به صورت یک بردار در نظر گرفت و به‌طور مشابه، یک بردار را می‌توان به صورت یک ماتریس که تنها، یک سطر (ستون) دارد در نظر گرفت.

یک ماتریس که n تعداد سطر یا ستون آن برابر باشد یک ماتریس مربعی یا یک ماتریس n مربعی نام دارد. قطر یا قطر اصلی یک ماتریس n مربعی A شامل عنصرهای $A_{11}, A_{22}, \dots, A_{nn}$ است.

در بخش بعد تعدادی از عملیات جبری مربوط به بردارها و ماتریسها مورد بررسی قرار خواهد گرفت. آنگاه بدنبال این بخش راههای کارا و موثر ذخیره‌انواع معین از ماتریسها، موسوم به ماتریسهای **تُنک** یا خلوت **Sparse** بررسی خواهند شد.

جبر ماتریسها

فرض کنید A و B دو ماتریس $m \times n$ هستند. مجموع A و B که به صورت $A + B$ نوشته می‌شود یک ماتریس $m \times n$ است که با جمع عناصر متناظر در A و B به دست می‌آید و حاصلضرب یک اسکالر K و ماتریس A که به صورت KA نوشته می‌شود یک ماتریس $m \times n$ است که از ضرب هر عنصر A در K به دست می‌آید. برای بردارهای n عنصری این عملیات بطور مشابه تعریف می‌شود.

بهتر است ضرب ماتریس رانخست با تعریف ضرب اسکالر دو بردار شرح دهیم.

فرض کنید U و V دو بردار n عنصری باشند. آنگاه حاصلضرب اسکالر U و V که به صورت $U \cdot V$ نوشته می‌شود عددی اسکالر است که از ضرب عنصرهای U در عنصرهای متناظرش در V و آنگاه جمع آنها به دست می‌آید:

$$U \cdot V = U_1V_1 + U_2V_2 + \cdots + U_nV_n = \sum_{k=1}^n U_kV_k$$

تأکید می‌کنیم که $U \cdot V$ یک عدد یا یک اسکالر است نه یک بردار.

اکنون فرض کنید A یک ماتریس $M \times P$ و B یک ماتریس $P \times n$ باشد. حاصلضرب A و B را به صورت AB می‌نویسیم که یک ماتریس $m \times n$ بنام C است که عنصر i ام آن به صورت زیر به دست می‌آید:

$$C_{ij} = A_{i1}B_{1j} + A_{i2}B_{2j} + \dots + A_{ip}B_{pj} = \sum_{k=1}^p A_{ik}B_{kj}$$

به عبارت دیگر، C_{ij} برابر است با حاصلضرب اسکالر سطر i ام A و ستون j ام B .

مثال ۲۳-۴

(الف) فرض کنید

$$B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -6 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{و} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

آنگاه

$$A + B = \begin{pmatrix} 1+3 & -2+0 & 3+(-6) \\ 0+2 & 4+(-3) & 5+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -2 & -3 \\ 2 & 1 & 6 \end{pmatrix}$$

$$3A = \begin{pmatrix} 3 \cdot 1 & 3 \cdot (-2) & 3 \cdot 3 \\ 3 \cdot 0 & 3 \cdot 4 & 3 \cdot 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -6 & 9 \\ 0 & 12 & 15 \end{pmatrix}$$

(ب) فرض کنید $U = (1, -3, 4, 5)$, $V = (2, -3, -6, 0)$ و $W = (3, -5, 2, -1)$ آنگاه:

$$U \cdot V = 1 \cdot 2 + (-3) \cdot (-3) + 4 \cdot (-6) + 5 \cdot 0 = 2 + 9 - 24 + 0 = -13$$

$$U \cdot W = 1 \cdot 3 + (-3) \cdot (-5) + 4 \cdot 2 + 5 \cdot (-1) = 3 + 15 + 8 - 5 = 21$$

(ج) فرض کنید

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -4 \\ 3 & 2 & 6 \end{pmatrix} \quad \text{و} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

ماتریس حاصلضرب AB تعریف می‌شود و یک ماتریس 2×3 است. عناصر سطر اول AB به ترتیب با ضرب سطر اول A در هر یک از ستون‌های B به دست می‌آید:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & -4 \\ 3 & 2 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 2 + 3 \cdot 3 & 1 \cdot 0 + 3 \cdot 2 & 1 \cdot (-4) + 3 \cdot 6 \\ 2 \cdot 2 + 4 \cdot 3 & 2 \cdot 0 + 4 \cdot 2 & 2 \cdot (-4) + 4 \cdot 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & 6 & 14 \\ 16 & 8 & 16 \end{pmatrix}$$

به‌طور مشابه، عناصر سطر دوم AB به ترتیب با ضرب سطر دوم A در هر یک از ستون‌های B بدست می‌آید:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & -4 \\ 3 & 2 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & 6 & 14 \\ 2 \cdot 2 + 4 \cdot 3 & 2 \cdot 0 + 4 \cdot 2 & 2 \cdot (-4) + 4 \cdot 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & 6 & 14 \\ 16 & 8 & 16 \end{pmatrix}$$

به عبارت دیگر:

$$AB = \begin{pmatrix} 11 & 6 & 14 \\ 16 & 8 & 16 \end{pmatrix}$$

الگوریتم زیر، حاصلضرب AB دو ماتریس A و B را پیدا می‌کند که به صورت آرایه‌های دو بعدی ذخیره می‌شوند. الگوریتم‌های جمع و ضرب اسکالر ماتریسها که کاملاً مشابه الگوریتم‌های جمع و ضرب اسکالر بردارها است به عنوان تمرین به دانشجو واگذار می‌شود.

Algorithm 4.7: (Matrix Multiplication) MATMUL(A, B, C, M, P, N)

Let A be an $M \times P$ matrix array, and let B be a $P \times N$ matrix array. This algorithm stores the product of A and B in an $M \times N$ matrix array C.

1. Repeat Steps 2 to 4 for $I = 1$ to M :
2. Repeat Steps 3 and 4 for $J = 1$ to N :
3. Set $C[I, J] := 0$. [Initializes $C[I, J]$.]
4. Repeat for $K = 1$ to P :
 $C[I, J] := C[I, J] + A[I, K] * B[K, J]$
 [End of inner loop.]
 [End of Step 2 middle loop.]
 [End of Step 1 outer loop.]
5. Exit.

پیچیدگی الگوریتم ضرب ماتریسها با شمارش C تعداد عمل ضرب اندازه‌گیری می‌شود. دلیل این که پیچیدگی جمع در چنین الگوریتمهایی محاسبه نمی‌شود آن است که عمل ضرب در کامپیوتر زمان به مراتب بیشتری نسبت به جمع به خود اختصاص می‌دهد. پیچیدگی الگوریتم 4.7 بالا برابر است با:

$$C = m.n.p$$

نتیجه فوق از این واقعیت ناشی می‌شود که چون مرحله 4 فقط شامل یک عمل ضرب است $m.n.p$ بار اجرا می‌شود. تحقیقات گسترده‌ای صورت گرفته است تا الگوریتم‌هایی برای ضرب ماتریسها پیدا کنند تا بتوانند تعداد عملیات ضرب را به حداقل برسانند. مثال بعدی یک نتیجه جالب توجه و شگفت‌آوری را در این زمینه به دست می‌دهد.

مثال ۲۴-۴

فرض کنید A و B دو ماتریس 2×2 باشند. داریم:

$$AB = \begin{pmatrix} ae + bg & af + bh \\ ce + dg & cf + dh \end{pmatrix} \quad \text{و} \quad A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}$$

در الگوریتم 4.7 حاصلضرب ماتریسی AB با استفاده از $C = 2.2.2 = 8$ عمل ضرب بدست می‌آید. از طرف دیگر AB را می‌توان به صورت زیر به دست آورد که در آن تنها از 7 عمل ضرب استفاده می‌شود.

$$AB = \begin{pmatrix} (1+4-5+7) & (3+5) \\ (2+4) & (1+3-2+6) \end{pmatrix}$$

- (1) $(a+d)(e+h)$
- (2) $(c+d)e$
- (3) $a(f-h)$
- (4) $d(g-e)$
- (5) $(a+b)h$
- (6) $(c-a)(e+f)$
- (7) $(b-d)(g+h)$

بعضی از نسخه‌های زبان برنامه‌نویسی BASIC دارای عملیات ماتریسی تعبیه شده در زبان هستند. به‌ویژه اینکه، در زیر چند دستور مجاز زبان BASIC ارائه شده است که در آن A و B آرایه‌های دوبعدی هستند که دارای ابعاد متناسب با هم می‌باشند و K یک اسکالر است:

$$\text{MAT } C = A + B$$

$$\text{MAT } D = (K) * A$$

$$\text{MAT } E = A * B$$

هر دستور با کلمه کلیدی MAT که مبین انجام عملیات ماتریسی است، شروع می‌شود. بدین ترتیب در دستورهای بالا C جمع ماتریسی A و B است و D ضرب اسکالر ماتریس A در اسکالر K و E ضرب ماتریسی A و B خواهد بود.

۱۴-۴ ماتریسهای خلوت

ماتریسهایی که دارای تعداد نسبتاً زیادی درایه صفر باشد ماتریس خلوت یا ماتریس تُتک نام دارد. دو نمونه کلی از ماتریسهای خلوت n مربعی که در اکثر کاربردها ظاهر می‌شوند در شکل ۲۱-۴ نشان داده شده است. گاهی اوقات رسم بر این است که بلاک‌های دارای صفر این‌گونه ماتریسها را مانند شکل ۲۱-۴ حذف می‌کنند.

$$\begin{pmatrix} 5 & -3 & & & & \\ 1 & 4 & 3 & & & \\ & 9 & -3 & 6 & & \\ & & 2 & 4 & -7 & \\ & & & 3 & -1 & 0 \\ & & & & 6 & -5 & 8 \\ & & & & & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

(ب) ماتریس سه قطری

$$\begin{pmatrix} 4 & & & & \\ 3 & -5 & & & \\ 1 & 0 & 6 & & \\ -7 & 8 & -1 & 3 & \\ 5 & -2 & 0 & 2 & -8 \end{pmatrix}$$

(الف) ماتریس مثلثی

شکل ۲۱-۴

اولین نکته تمام درایه‌های بالای قطر اصلی آن صفر است یا به بیان دیگر، درایه‌های غیرصفر آن تنها می‌توانند روی، یا پائین قطر اصلی ظاهر شوند یک ماتریس (پائین) مثلثی نام دارد. ماتریس دوم که درایه‌های غیرصفر آن تنها می‌توانند روی قطر یا عناصر بلافاصله بالا و پائین قطر ظاهر شوند یک ماتریس سه قطری نام دارد.

ممکن است روش طبیعی نمایش ماتریسها در حافظه به صورت آرایه‌های دوبعدی، برای ماتریسهای خلوت مناسب نباشد. یعنی، تنها با ذخیره درایه‌هایی که غیرصفر هستند می‌توان در مصرف حافظه صرفه‌جویی کرد. برای ماتریسهای مثلثی این عمل در مثال زیر نشان داده شده است. حالت‌های دیگر در قسمت مسأله‌های حل شده توضیح داده خواهد شد.

مثال ۲۵-۴

فرض کنید خواسته باشیم آرایه مثلثی A شکل ۲۲-۴ را در حافظه کامپیوتر ذخیره کنیم. واضح است که ذخیره درایه‌های بالای قطر اصلی A کاری بیهوده است چون می‌دانیم تمام این عناصر صفر هستند. از این رو تنها درایه‌های دیگر A را که در شکل ۲۲-۴ با پیکان مشخص شده است در آرایه خطی B ذخیره می‌کنیم، یعنی قرار می‌دهیم:

$$B[1] = a_{11} \quad B[2] = a_{21}, \quad B[3] = a_{22}, \quad B[3] = a_{31}, \quad \dots$$

نخست ملاحظه می‌کنید که B شامل

$$1 + 2 + 3 + 4 + \dots + n = \frac{1}{2} n (n + 1)$$

عنصر است که تقریباً نصف عنصر یک آرایه $n \times n$ دوبعدی است. از آنجا که در برنامه‌های خود به مقدار

a_{JK} احتیاج داریم، از این رو فرمولی را به دست می‌آوریم که عدد صحیح L را برحسب J ، K معین می‌کند که در آن

$$B(L) = a_{JK}$$

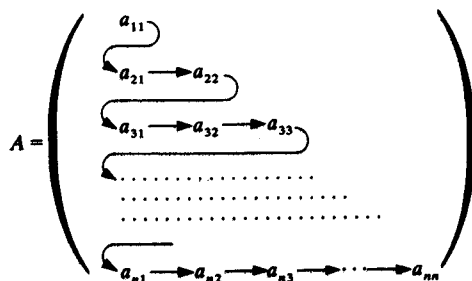
ملاحظه می‌شود که L تعداد عناصر داخل لیست حداکثر تا a_{JK} و خود آن را نمایش می‌دهد. اکنون تعداد

$$1 + 2 + 3 + \dots + (J - 1) = \frac{J(J - 1)}{2}$$

عناصر در سطرهاى بالای a_{JK} وجود دارد و K عنصر در سطر وجود دارد که حداکثر تا a_{JK} و خود a_{JK} را شامل است. بنابراین

$$L = \frac{J(J - 1)}{2} + K$$

اندیسی را می‌دهد که به کمک آن می‌توان به مقدار a_{JK} از آرایه خطی B دسترسی پیدا کرد.



شکل ۲۲-۴

مسأله‌های حل شده

آرایه‌های خطی

مسأله ۱-۴: آرایه‌های خطی $AAA(5:50)$ ، $BBB(-5:10)$ و $CCC(18)$ را در نظر بگیرید:

(الف) تعداد عناصر هر آرایه را پیدا کنید.

(ب) فرض کنید $Base(AAA) = 300$ و $W = 4$ کلمه در خانه‌های حافظه برای AAA باشد. آدرس

$AAA[15]$ ، $AAA[35]$ و $AAA[55]$ را پیدا کنید.

حل: (الف) تعداد عناصر آرایه برابر طول آرایه است. از این رو از فرمول زیر استفاده می‌کنیم:

$$Length = UB - LB + 1$$

بنابراین :

$$\text{Length}(\text{AAA}) = 50 - 5 + 1 = 46$$

$$\text{Length}(\text{BBB}) = 10 - (-5) + 1 = 16$$

$$\text{Length}(\text{CCC}) = 18 - 1 + 1 = 18$$

توجه دارید که $\text{Length}(\text{CCC}) = \text{UB}$ چون $\text{LB} = 1$.

(ب) از فرمول زیر استفاده می‌کنیم :

$$\text{LOC}(\text{AAA}[\text{K}]) = \text{Base}(\text{AAA}) + w(\text{K} - \text{LB})$$

از این‌رو

$$\text{LOC}(\text{AAA}[15]) = 300 + 4(15 - 5) = 340$$

$$\text{LOC}(\text{AAA}[35]) = 300 + 4(35 - 5) = 420$$

$\text{AAA}[55]$ عنصر AAA نیست چون 55 بزرگتر از $\text{UB} = 50$ است.

مسئله ۲-۴: فرض کنید یک شرکت یک آرایه خطی $\text{YEAR}(1920:1970)$ برای مشخصات کارمندان دارد که در آن $\text{YER}[\text{K}]$ شامل تعداد کارمندانی است که در سال K متولد شده‌اند. برای هر یک از کارهای زیر یک قطعه برنامه بنویسید:

(الف) هر سالی را که در آن سال کارمندی متولد نشده، چاپ کند.

(ب) NNN تعداد سالهایی را که در آنها هیچ کارمندی متولد نشده، پیدا کند.

(ج) N50 تعداد کارمندانی را که تا پایان سال حداقل 50 سال سن دارند پیدا کند. فرض می‌شود سال جاری سال 1984 است.

(د) NL تعداد کارمندانی را پیدا کنید که تا پایان سال، حداقل L سال سن دارند فرض می‌شود سال جاری سال 1984 است.

حل: هر قطعه برنامه، آرایه را به صورت زیر پیمایش می‌کند.

(الف)

1. Repeat for $\text{K} = 1920$ to 1970 :
If $\text{YEAR}[\text{K}] = 0$, then: Write: K .
[End of loop.]
2. Return.

(ب)

1. Set $\text{NNN} := 0$.
2. Repeat for $\text{K} = 1920$ to 1970 :
If $\text{YEAR}[\text{K}] = 0$, then: Set $\text{NNN} := \text{NNN} + 1$.
[End of loop.]
3. Return.

(ج) می‌خواهیم تعداد کارمندانی را که در سال 1934 یا قبل از آن متولد شده‌اند به دست آوریم.

We want the number of employees born in 1934 or earlier.

1. Set $N50 := 0$.
2. Repeat for $K = 1920$ to 1934 :
Set $N50 := N50 + \text{YEAR}[K]$.
[End of loop.]
3. Return.

(د) می‌خواهیم تعداد کارمندانی را که در سال $1984 - L$ یا قبل از آن متولد شده‌اند به دست آوریم.

We want the number of employees born in year $1984 - L$ or earlier.

1. Set $NL := 0$ and $LLL := 1984 - L$.
2. Repeat for $K = 1920$ to LLL :
Set $NL := NL + \text{YEAR}[K]$.
[End of loop.]
3. Return.

مسئله ۳-۴: فرض کنید A یک آرایه 10 عنصری با مقادیر a_1, a_2, \dots, a_{10} باشد. مقادیر A را پس از هر حلقه تعیین کنید.

Repeat for $K = 1$ to 9 :
Set $A[K + 1] := A[K]$.
[End of loop.] (الف)

Repeat for $K = 9$ to 1 by -1 :
Set $A[K + 1] := A[9]$.
[End of loop.] (ب)

حل: توجه دارید که در قسمت (الف) اندیس K از ۱ تا ۹ تغییر می‌کند اما در قسمت (ب) به ترتیب عکس از ۹ تا ۱ تغییر می‌کند.

(الف) نخست $A[1] := A[2]$ که $A[2] = a_1$ می‌شود که a_1 مقدار $A[1]$ است.

آنگاه $A[2] := A[3]$ که $A[3] = a_1$ می‌شود که a_1 مقدار فعلی $A[2]$ است.

آنگاه $A[3] := A[4]$ که $A[4] = a_1$ می‌شود که a_1 مقدار فعلی $A[3]$ است.

بدین ترتیب هر عنصر آرایه A دارای مقدار a_1 است که همان مقدار اولیه $A[1]$ است.

(ب) نخست $A[9] := A[10]$ که $A[10] = a_9$ قرار داده می‌شود.

آنگاه $A[8] := A[9]$ که $A[9] = a_8$ قرار داده می‌شود.

آنگاه $A[7] := A[8]$ که $A[8] = a_7$ قرار داده می‌شود، همینطور تا آخر.

بدین ترتیب هر مقدار در A به خانه بعدی منتقل می‌شود. در پایان حلقه همچنان داریم $A[1] = a_1$.

توجه کنید: این مثال توضیحی بر این واقعیت است که در الگوریتم اضافه کردن یعنی الگوریتم ۴-۴،

درست مانند حلقه (ب) در بالا، عناصرها به ترتیب عکس به طرف پائین منتقل می‌شوند.

مسئله ۴-۴: آرایه خطی NAME شکل ۲۳-۴ را که به صورت الفبایی مرتب شده در نظر بگیرید.

(الف) هرگاه بخواهیم Johnson, Brown و Peters را در سه زمان مختلف به NAME اضافه کنیم تعداد عناصری را

که باید جابجا شوند تعیین کنید.

(ب) هرگاه بخواهیم سه نام به یک باره اضافه شود چند عنصر باید جابجا شوند؟

(ج) یک شرکت تلفن عمل اضافه کردن را در دفترچه راهنمای تلفن چگونه انجام می‌دهد؟

حل: (الف) اضافه کردن Brown مستلزم جابجاشدن 13 عنصر است و عمل اضافه کردن Johnson مستلزم جابجاشدن 1 عنصر و عمل اضافه کردن Peters مستلزم جابجایی 4 عنصر است. مجموعاً 24 عنصر باید جابجا شوند.

(ب) هرگاه بخواهیم عناصر را به یک باره اضافه کنیم، آنگاه لازم است 13 عنصر جابجا شوند. با الگوریتم قبلی هر عنصر تنها یکبار جابجا می‌شود.

(ج) شرکت تلفن یک لیست در گردش برای شماره‌های جدید درست می‌کند و آنگاه یکبار در سال دفترچه راهنمای تلفن را بروز درمی‌آورد و تازه! می‌کند.

NAME	
1	Allen
2	Clark
3	Dickens
4	Edwards
5	Goodman
6	Hobbs
7	Irwin
8	Klein
9	Lewis
10	Morgan
11	Richards
12	Scott
13	Tucker
14	Walton

شکل ۲۳-۴

جستجو کردن، مرتب کردن

مسئله ۵-۴: آرایه خطی مرتب‌شده الفبایی NAME شکل ۲۳-۴ را در نظر بگیرید.

(الف) با استفاده از الگوریتم جستجوی خطی، الگوریتم ۵-۴، برای تعیین مکان Morgan, Hobbs و Fisher چند عمل مقایسه C مورد استفاده قرار می‌گیرد؟

(ب) تعیین کنید برای چنین آرایه ذخیره شده‌ای، در الگوریتم چه تغییری ایجاد کنیم تا جستجوی ناموفق از کارایی بیشتری برخوردار شود؟ این تغییر بر روی قسمت (الف) چه تأثیری خواهد داشت؟
حل: (الف) $C(\text{Hobbs}) = 6$ چون Hobbs با تمام نامها مقایسه می‌شود این مقایسه از نام Allen شروع شده تا این که Hobbs در NAME[6] پیدا می‌شود.

$C(\text{Morgan}) = 10$ چون Morgan در NAME[10] ظاهر می‌شود.

$C(\text{Fisher}) = 15$ چون Fisher در آغاز در NAME[15] قرار گرفته است. و آنگاه Fisher با هر نام مقایسه می‌شود تا این که در NAME[15] پیدا می‌شود. از این رو جستجو ناموفق است.

(ب) ملاحظه کنید که NAME به صورت الفبایی مرتب است. بنابراین جستجوی خطی می‌تواند پس از مقایسه یک نام معین XXX با نام YYY متوقف می‌شود طوری که $XXX < YYY$ یعنی به گونه‌ای که از نظر الفبایی XXX قبل از YYY قرار گرفته باشد. به کمک این الگوریتم $C(\text{Fisher}) = 5$ ، چون جستجو می‌تواند پس از مقایسه Fisher با Goodman در NAME[5] متوقف شود.

مسئله ۶-۴: فرض کنید الگوریتم جستجوی دودویی، الگوریتم 4.6، روی آرایه NAME در شکل ۲۳-۴ به کار بسته شده است تا مکان Goodman پیدا شود. BEG و END انتهایی و MID وسط را برای قطعه آزمایشی در هر مرحله از الگوریتم پیدا کنید.

حل: یادآوری می‌کنیم که $MID = \text{INT}((BEG + END) / 2)$ که در آن INT مبین مقدار صحیح است.

مرحله ۱: در اینجا $BEG = 1[\text{Allen}]$ و $END = 14[\text{Walton}]$ و در نتیجه $MID = 7[\text{Irwin}]$.

مرحله ۲: چون $\text{Goodman} < \text{Irwin}$ قرار دهید $END = 6$. از این رو $MID = 3[\text{Dickens}]$.

مرحله ۳: چون $\text{Goodman} > \text{Dickens}$ قرار دهید $BEG = 4$. از این رو $MID = 5[\text{Goodman}]$.

در آرایه مکان Goodman، $LOC = 5$ است. ملاحظه می‌کنید که تعداد $C = 3$ مقایسه انجام شد.

مسئله ۷-۴: الگوریتم جستجوی دودویی، الگوریتم 4.6 را به گونه‌ای اصلاح کنید تا تبدیل به الگوریتم جستجو و اضافه کردن شود.

حل: در چهار مرحله اول الگوریتم به هیچ تغییری نیاز نیست. تنها وقتی ITEM در DATA ظاهر نشود الگوریتم کنترل کار را به مرحله 5 منتقل می‌کند. در چنین حالتی، بسته به این که ITEM قبل یا بعد از $DATA[MID]$ ، اضافه می‌شود. الگوریتم به صورت زیر است:

Algorithm P4.7: (Binary Search and Insertion) DATA is a sorted array with N elements, and ITEM is a given item of information. This algorithm finds the location LOC of ITEM in DATA or inserts ITEM in its proper place in DATA.

Steps 1 through 4. Same as in Algorithm 4.6.

5. If $ITEM < DATA[MID]$, then:

Set $LOC := MID$.

Else:

Set $LOC := MID + 1$.

[End of If structure.]

6. Insert ITEM into DATA[LOC] using Algorithm 4.2.

7. Exit.

مسئله ۸-۴: فرض کنید A یک آرایه مرتب‌شده 200 عنصری باشد، علاوه بر این فرض کنید که عنصر معلوم x با احتمال یکسان در هر مکانی از A وجود دارد. زمان اجرای بدترین حالت $f(n)$ و زمان اجرای حالت میانگین $g(n)$ را برای پیدا کردن x در A با استفاده از الگوریتم جستجوی دودویی به دست آورید. حل: برای هر مقدار K فرض کنید n_k نمایشگر تعداد عناصری در A باشد که برای تعیین مکان آن به K مقایسه نیاز است. آنگاه:

k:	1	2	3	4	5	6	7	8
n_k :	1	2	4	8	16	32	64	73

73 از این واقعیت ناشی می‌شود که $1 + 2 + 4 + \dots + 64 = 127$ بنابراین تنها $200 - 127 = 73$ باقی می‌ماند. زمان اجرای بدترین حالت $f(n) = 8$ است. زمان اجرای حالت میانگین به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\begin{aligned}
 g(n) &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n k \cdot n_k \\
 &= \frac{1 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot 4 + 4 \cdot 8 + 5 \cdot 16 + 6 \cdot 32 + 7 \cdot 64 + 8 \cdot 73}{200} \\
 &= \frac{1353}{200} = 6.765
 \end{aligned}$$

برای جستجوی دودویی ملاحظه می‌کنید که زمانهای اجرای حالت میانگین و بدترین حالت تقریباً برابر است.

مسئله ۹-۴: با استفاده از الگوریتم مرتب‌کردن حبابی، الگوریتم 4.4، C تعداد مقایسه‌ها و D تعداد جابجایی‌ها را پیدا کنید که $n = 6$ حرف کلمه PEOPLE را به صورت حرفی مرتب می‌کند. حل: جفت حرفهایی که در هر یک از $n - 1 = 5$ گذر به ترتیب با هم مقایسه می‌شوند به صورت زیر است: جفت حرفهای مورد مقایسه و جابجا شونده با مربع مشخص شده‌اند و جفت حرفهایی که با هم مقایسه ولی جابجا نمی‌شوند با دایره مشخص شده است.

Pass 1. $\boxed{P}EOPLE$, $E\boxed{P}OPLE$, $EO\boxed{P}PLE$
 $EOP\boxed{P}LE$, $EOPL\boxed{P}E$, $EOPLE\boxed{P}$

Pass 2. $\boxed{E}OPLEP$, $E\boxed{O}PLEP$, $EO\boxed{P}LEP$
 $EOL\boxed{P}EP$, $EOLEPP$

Pass 3. $\boxed{E}\boxed{O}LEPP$, $E\boxed{O}L\boxed{E}PP$, $EL\boxed{O}\boxed{E}PP$
 $ELEOPP$

Pass 4. $\boxed{E}\boxed{L}EOPP$, $E\boxed{L}\boxed{E}OPP$, $EELOPP$

Pass 5. $\boxed{E}\boxed{E}LOPP$, $EELOPP$

از آنجا که $n = 6$ ، تعداد مقایسه‌ها $C = 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 15$ خواهد بود. تعداد جابجایی‌ها D نیز بستگی به نوع داده و همچنین بستگی به تعداد عنصر n دارد.

مسئله ۱۰-۴: اتحاد زیر را که در تجزیه و تحلیل انواع الگوریتم‌های مرتب‌سازی و جستجو مورد استفاده قرار می‌گیرد ثابت کنید.

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

حل: یک بار عمل جمع را از عدد کوچک به بزرگ و بار دیگر از عدد بزرگ به کوچک می‌نویسیم، به دست می‌آید.

$$S = 1 + 2 + 3 + \dots + (n-1) + n$$

$$S = n + (n-1) + (n-2) + \dots + 2 + 1$$

مجموع دو مقدار S جمع بالا به صورت زیر است:

$$2S = (n+1) + (n+1) + (n+1) + \dots + (n+1) + (n+1)$$

چون تعداد جملات جمع طرف دوم تساوی n است از این رو $2S = n(n+1)$ با تقسیم نتیجه اخیر بر 2 جواب مطلوب به دست می‌آید.

آرایه‌های چندبعدی، ماتریسها

مسئله ۱۱-۴: فرض کنید آرایه‌های چندبعدی A و B با استفاده از نمادهای

$$B(1:8, -5:5, -10:5) \quad \text{و} \quad A(-2:2, 2:22)$$

تعریف شده‌اند.

(الف) طول هر بعد و تعداد عناصر A و B را پیدا کنید.

(ب) عنصر $B[3, 3, 3]$ در B را در نظر بگیرید. اندیسهای مؤثر E_1, E_2, E_3 و آدرس این عنصر را با فرض $Base(B) = 400$ و $W = 4$ کلمه در خانه حافظه باشد به دست آورید.

حل: (الف) طول هر بعد با فرمول زیر محاسبه می‌شود:

$$Length = upper\ bound - lower\ bound + 1$$

از این رو طول L_i ابعاد آرایه A عبارت است از

$$L_2 = 22 - 2 + 1 = 21 \quad \text{و} \quad L_1 = 2 - (-2) + 1 = 5$$

بنابراین A دارای $5 \cdot 21 = 105$ عنصر است. طول L_i ابعاد B عبارت است از

$$L_1 = 8 - 1 + 1 = 8 \quad L_2 = 5 - (-5) + 1 = 11 \quad L_3 = 5 - (-10) + 1 = 16$$

بنابراین B دارای $8 \cdot 11 \cdot 16 = 1408$ عنصر است.

(ب) اندیس مؤثر E، از $E_i = K_i - LB$ بدست می‌آید که در آن K_i اندیس معلوم و LB کران پائین است. در نتیجه

$$E_1 = 3 - 1 = 2 \quad E_2 = 3 - (-5) = 8 \quad E_3 = 3 - (-10) = 13$$

آدرس بستگی به آن دارد که آیا زبان برنامه‌نویسی، آرایه B را به روش سطری ذخیره می‌کند یا روش ستونی. فرض می‌کنیم آرایه B به روش ستونی ذخیره شده است. با استفاده از فرمول (۸-۴) داریم:

$$\begin{aligned} E_3 L_2 &= 13 \cdot 11 = 143 & E_3 L_2 + E_2 &= 143 + 8 = 151 \\ (E_3 L_2 + E_2) L_1 &= 151 \cdot 8 = 1208 & (E_3 L_2 + E_2) L_1 + E_1 &= 1208 + 2 = 1210 \end{aligned}$$

بنابراین

$$LOC(B[3, 3, 3]) = 400 + 4(1210) = 400 + 4840 = 5240$$

مسئله ۱۲-۴: فرض کنید A یک آرایه ماتریسی مربعی $n \times n$ باشد. قطعه برنامه‌ای بنویسید که

(الف) NUM تعداد عناصر غیر صفر A را پیدا کنید.

(ب) SUM مجموع عناصر بالای قطر یعنی عناصر $A[I, J]$ که $I < J$ ، را پیدا کنید.

(ج) PROD حاصلضرب عناصر روی قطر یعنی $(a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn})$ را پیدا کنید.

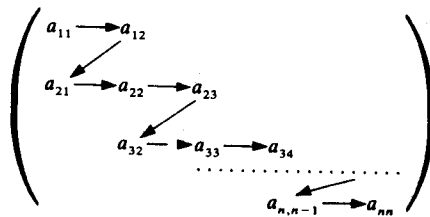
حل: (الف)

1. Set $NUM := 0$.
2. Repeat for $I = 1$ to N :
3. Repeat for $J = 1$ to N :
 - If $A[I, J] \neq 0$, then: Set $NUM := NUM + 1$.
- [End of inner loop.]
- [End of outer loop.]
4. Return.

- (ب)
1. Set $SUM := 0$.
 2. Repeat for $J = 2$ to N :
 3. Repeat for $I = 1$ to $J - 1$:
 Set $SUM := SUM + A[I, J]$.
 [End of inner Step 3 loop.]
 4. Return.

- (ج)
1. Set $PROD := 1$. [This is analogous to setting $SUM = 0$.]
 2. Repeat for $K = 1$ to N :
 Set $PROD := PROD * A[K, K]$.
 [End of loop.]
 3. Return.

مسئله ۱۳-۴: فرض کنید A یک آرایه سه قطری n مربعی به صورتی باشد که در شکل ۲۴-۴ نشان داده شده است.



شکل ۲۴-۴ آرایه سه قطری

توجه دارید که روی قطر A ، n عنصر و در بالا و پائین قطر $n - 1$ عنصر می‌باشد. از این رو A حداکثر $3n - 2$ عنصر غیر صفر دارد. فرض کنید خواسته باشیم A را در یک آرایه خطی B به صورتی که بوسیلهٔ پیکانها در شکل ۲۴-۴ مشخص شده است ذخیره کنیم یعنی فرمولی پیدا کنید که L را بر حسب J و K به

صورتی به دست دهد که $B[L] = A[J, K]$

یعنی $B[1] = a_{11}$, $B[2] = a_{12}$, $B[3] = a_{21}$, $B[4] = a_{22}$, ...

طوری که بتوان به مقدار $A[J, K]$ از طریق آرایهٔ B دسترسی پیدا کرد.

حل: توجه دارید که بالای $A[J, K]$ تعداد $2 + 3(J - 2)$ عنصر و در سمت چپ $A[J, K]$ تعداد $K - J + 1$ عنصر وجود دارد. از این رو

$$L = [3(J - 2) + 2] + [K - J + 1] + 1 = 2J + K - 2$$

مسئله ۱۴-۴: یک آرایهٔ ماتریسی n مربعی A را متقارن گویند اگر به ازای تمام J و K ،

$$A[J, K] = A[K, J]$$

(الف) کدامیک از ماتریسهای زیر متقارن هستند؟

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 & 5 \\ -3 & -2 & 4 \\ 5 & 6 & 8 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 3 & -7 \\ 3 & 6 & -1 \\ -7 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

(ب) یک راه مؤثر و کارا برای ذخیره ماتریس متقارن A در حافظه بیان کنید.

(ج) فرض کنید A و B دو ماتریس متقارن n مربعی هستند، یک راه مؤثر و کارا برای ذخیره A و B در حافظه بیان کنید.

حل: ماتریس اول متقارن نیست چون $a_{23} = 4$ ولی $a_{32} = 6$. ماتریس دوم یک ماتریس مربعی نیست از این رو بنابه تعریف نمی‌تواند متقارن باشد. ماتریس سوم متقارن است.

(ب) چون $A[J, K] = A[K, J]$ ، تنها ذخیره آن دسته از عناصر A موردنیاز است که بر روی یا پائین قطر قرار دارند. این کار را می‌توان با همان روشی که برای ماتریسهای مثلثی در مثال ۲۵-۴ بیان شده است انجام داد.

(ج) نخست توجه دارید که برای یک ماتریس متقارن تنها لازم است عناصر روی قطر و پائین قطر یا عناصر روی قطر یا بالای قطر را ذخیره کنیم. بنابر این A و B را می‌توان در یک آرایه $n \times (n+1)$ بنام C به صورتی که در شکل ۲۵-۴ نشان داده شده است ذخیره کرد که در آن $C[J, K] = A[J, K]$ وقتی $J \geq K$ اما $C[J, K] = B[J, K-1]$ وقتی $J < K$.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & b_{11} & b_{12} & b_{13} & \cdots & b_{1,n-1} & b_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & b_{22} & b_{23} & \cdots & b_{2,n-1} & b_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & b_{33} & \cdots & b_{3,n-1} & b_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & a_{n4} & \cdots & a_{nn} & b_{nn} \end{pmatrix}$$

شکل ۲۵-۴

آرایه‌های نوع اشاره‌گر، ساختارهای رکوردی

مسئله ۱۵-۴: سه وکیل Levine, Davis و Nelson در یک دفتر کار می‌کنند. هر وکیل موکل Client خاص خود را دارد. شکل ۲۶-۴ سه راه سازماندهی داده‌ها را نشان می‌دهد.

(الف) در اینجا آرایه مرتب‌شده الفبایی CLIENT و آرایه LAWYER به‌گونه‌ای وجود دارد که LAWYER[K] وکیل مربوط به CLIENT[K] است.

(ب) در اینجا سه آرایه مجزا LEVINE, DAVIS و NELSON وجود دارد که هر آرایه شامل لیست موکلین است.

حل: بهترین ساختمان داده بستگی به چگونگی سازماندهی دفتر کار و چگونگی رسیدگی به کار موکلین دارد.

فرض کنید تنها یک منشی و یک شماره تلفن وجود دارد و در هر ماه تنها یک لایحه برای هر یک از موکلین تنظیم می‌گردد. علاوه براین فرض کنید تعداد موکلین غالباً از یک وکیل تا وکیل دیگر در تغییر است. آنگاه شکل ۲۶-۴ (الف) احتمالاً مفیدترین ساختمان داده خواهد بود.

فرض کنید وکلا کاملاً مستقل عمل می‌کنند: هر وکیل یک منشی و یک شماره تلفن مخصوص به خود دارد و سیاهه موکلین (دفتر ثبت مشخصات موکلین نزد منشی) مختلف است. آنگاه شکل ۲۶-۴ (ب) احتمالاً مفیدترین ساختمان داده خواهد بود.

فرض کنید که دارالوکاله، کلیه امور موکلین را به‌طور متناوب رسیدگی کرده و هر یک از وکلا موظف است که در این برهه زمانی به پرونده موکلین خود رسیدگی کند. آنگاه شکل ۲۶-۴ (ج) احتمالاً مفیدترین ساختمان داده خواهد بود.

مسئله ۱۶-۴: در زیر لیست فیلدهای یک رکورد دانشجویی با شماره سطح آنها ارائه شده است:

1 Student 2 Number 2 Name 3 Last 3 First 3 MI (Middle Initial) 2 Sex
2 Birthday 3 Day 3 Month 3 Year 2 SAT 3 Math 3 Verbal

(الف) ساختار سلسله مراتبی متناظر با آن را رسم کنید.

(ب) کدامیک از فیلدها، فیلدهای ابتدایی هستند.

حل: (الف) هر چند فیلدها به صورت خطی ارائه شده‌اند با این وجود شماره سطح‌ها رابطه سلسله مراتبی بین فیلدها را نشان می‌دهند، ساختار سلسله مراتبی متناظر با آن به صورت زیر است:

```

1 Student
  2 Number
  2 Name
    3 Last
    3 First
    3 MI
  2 Sex
  2 Birthday
    3 Day
    3 Month
    3 Year
  2 SAT
    3 Math
    3 Verbal

```

(ب) فیلدهای ابتدایی به آن دسته از فیلدها، گفته می‌شود که زیر فیلد ندارند:

Verbal, Number, last, First, MI, Sex, Day, Month, Year, Math. ملاحظه می‌کنید که یک فیلد ابتدایی است فقط اگر بعد از آن فیلد با شماره سطح بالاتر وجود نداشته باشد.

مسئله ۱۷-۴: یک استاد دانشگاه مشخصات داده‌ای هر دانشجو در یک کلاس ۲۰ نفره را به صورت زیر نگه می‌دارد.

Name(Last, First, MI), Three Tests, Final, Grade

در اینجا Grade یک درایه ۲ کاراکتری مثلاً B+ یا C یا A- است. یک ساختار در زبان PL / I برای ذخیره داده‌ها بیان کنید.

حل: یک عنصر در یک ساختار رکوردی، خود می‌تواند یک آرایه باشد. به جای ذخیره جداگانه سه آزمون، آنها را در یک آرایه ذخیره می‌کنیم. چنین ساختاری به صورت زیر است:

```

DECLARE 1 STUDENT(20),
        2 NAME,
          3 LAST CHARACTER(10),
          3 FIRST CHARACTER(10),
          3 MI CHARACTER(1),
        2 TEST(3) FIXED,
        2 FINAL FIXED,
        2 GRADE CHARACTER(2);

```

مسئله ۱۸-۴: یک دانشکده از ساختار زیر برای یک کلاس فارغ‌التحصیل استفاده می‌کند:

```

1 Student(200)
  2 Name
    3 Last
    3 First
    3 Middle Initial
  2 Major
  2 SAT
    3 Verbal
    3 Math
  2 GPA(4)
  2 CUM

```

در اینجا GPA[K] معرّف معدل نمرات سال K ام و CUM معرف معدل کل است.

(الف) در فایل چند فیلد ابتدایی وجود دارد؟

(ب) چگونه می‌توان به (i) رشته major دانشجوی هجدهم و (ii) معدل نمرات GPA ی چهل و پنجمین دانشجوی سال دوم دسترسی پیدا کرد.

(ج) خروجی زیر را پیدا کنید.

- (i) Write: Name[15]
- (ii) Write: CUM
- (iii) Write: GPA[2].
- (iv) Write: GPA[1, 3].

حل : (الف) چون GPA برای هر دانشجو 4 بار محاسبه می‌شود، برای هر دانشجو ۱۱ فیلد مقدماتی وجود دارد از این رو مجموعاً 2200 فیلد مقدماتی وجود دارد.

(ب) (i) Student. Major[8] یا به اختصار MAJOR[8]. (ii) GPA[45, 2]

(ج) (i) در اینجا Name[15] معرف نام دانشجوی پانزدهم است. اما NAME یک فیلد مرکب یا چند قسمتی است. از این رو LAST[15]، First[15] و MI[15] چاپ می‌شوند.

(ii) در اینجا CUM معرف تمام مقادیر CUM است. یعنی

CUM[1], CUM[2], CUM[3], ..., CUM[200]

چاپ می‌شوند.

(iii) GPA[2] معرف آرایه GPA دومین دانشجو است. از این رو

GPA[2, 1], GPA[2, 2], GPA[2, 3], GPA[2, 4]

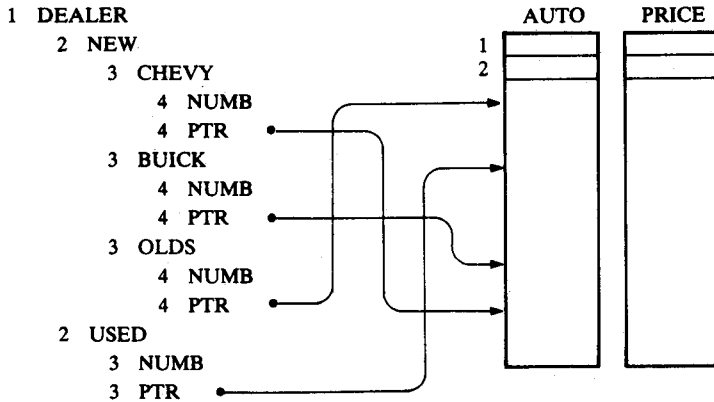
چاپ می‌شوند.

(iv) GPA[1, 3] یک فیلد یعنی GPA سال سوم اولین دانشجو است. یعنی تنها GPA[1, 3] چاپ می‌شود.

مسئله ۱۹-۴: یک بنگاه فروش اتومبیل شماره سریال و قیمت هر یک از اتومبیل‌ها را به ترتیب در آرایه‌های AUTO و PRICE نگهداری می‌کند. علاوه بر این از ساختمان داده شکل ۲۷-۴ نیز استفاده می‌کند که ترکیبی از یک ساختار رکوردی با متغیرهای اشاره‌گر است. Chevy، Buick، نو و Oldsmobile، نو، ماشینهای دست دوم used car با هم در AUTO لیست می‌شوند. متغیرهای NUMB و PTR تحت USED به ترتیب تعداد و مکان لیست اتومبیل‌های دسته دوم را به دست می‌دهد.

(الف) مکان لیست Buick نو در AUTO را چگونه مشخص می‌کنید؟

(ب) یک زیربرنامه procedure برای چاپ شماره‌های سریال تمام Buick های نو که کمتر از \$10000 قیمت دارند بنویسید.



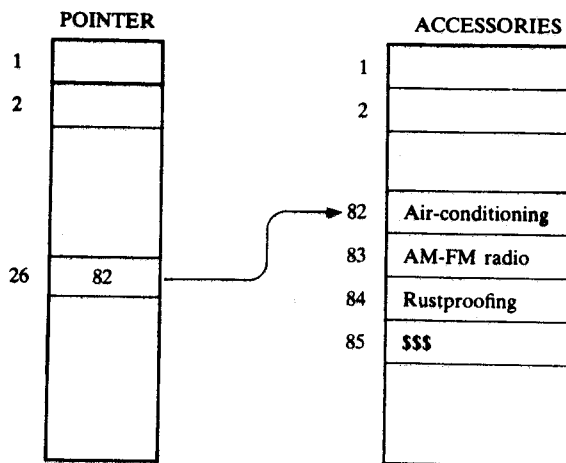
شکل ۴-۲۷

حل: (الف) چون PTR بیش از یکبار در ساختار رکوردی ظاهر می‌شود از این‌رو باید از BUICK.PTR برای مراجعه به مکان لیست Buick نو در AUTO استفاده کنید.

(ب) باید لیست را traverse پیمایش کنید اما تنها آن دسته از Buick ها را چاپ کنید که قیمت آن کمتر از \$10000 است. زیربرنامه Procedure به صورت زیر است:

Procedure P4.19: The data are stored in the structure in Fig. 4-27. This procedure outputs those new Buicks whose price is less than \$10 000.

1. Set FIRST := BUICK.PTR. [Location of first element in Buick list.]
2. Set LAST := FIRST + BUICK.NUMB - 1. [Location of last element in list.]
3. Repeat for K = FIRST to LAST.
 If PRICE[K] < 10 000, then:
 Write: AUTO[K], PRICE[K].
 [End of If structure.]
 [End of loop.]
4. Exit.



شکل ۲۸-۴

مسئله ۲۰-۴: در مسئله ۱۹-۴ فرض کنید بنگاه اتومبیل همچنین می‌خواهد لوازم همراه هر اتومبیل از قبیل کولر، رادیو و کپسول ضدآتش را نگهداری کند. از آنجا که رکورد مشخصات همراه اتومبیل طول متغیر دارد. این کار چگونه انجام می‌شود؟

حل: این کار را می‌توان همانند شکل ۲۸-۴ انجام داد. یعنی علاوه بر **AUTO** و **PRICE** یک آرایه **POINTER** وجود دارد به گونه‌ای که **POINTER[K]** مکان لیست لوازم همراه در آرایه **ACCESSORIES** را (با نگهداری **\$\$\$**) در **AUTO[K]** به دست می‌دهد.

مسئله‌های تکمیلی

آرایه‌ها

مسئله ۲۱-۴: آرایه‌های خطی **XXX(-10:10)**، **YYY(1935:1985)**، **ZZZ(35)** را در نظر بگیرید. (الف) تعداد عناصر هر آرایه را پیدا کنید. (ب) فرض کنید $\text{Base}(\text{YYY}) = 400$ و $W = 4$ کلمه در خانه حافظه برای **YYY** باشد. آدرس **YYY[1942]**، **YYY[1977]** و **YYY(1988)** را پیدا کنید.

مسئله ۲۲-۴: آرایه‌های چندبعدی زیر را در نظر بگیرید:

$$X(-5:5, 3:33)$$

$$Y(3:10, 1:15, 10:20)$$

(الف) طول هر بعد و تعداد عناصر **X** و **Y** را پیدا کنید.

(ب) فرض کنید $\text{Base}(Y) = 400$ و $W = 4$ کلمه در خانه حافظه وجود داشته باشد. اندیسهای مؤثر E_1, E_2, E_3 و آدرس $Y[5, 10, 15]$ را پیدا کنید. با این فرض که $Y(i)$ با روش سطری و $Y(ii)$ با روش ستونی ذخیره شده باشد.

مسئله ۲۳-۴: آرایه A شامل 25 عدد صحیح مثبت است. یک قطعه برنامه بنویسید که:

(الف) تمام جفت عناصری را که مجموع آنها برابر 25 است پیدا کند.

(ب) تعداد EVNUM عناصر A را که زوج هستند و تعداد ODNUM عناصر A را که فرد هستند پیدا کند.

مسئله ۲۴-۴: فرض کنید A یک آرایه خطی با n مقدار عددی باشد. یک زیربرنامه Procedure بنام

$$\text{MEAN}(A, N, \text{AVE})$$

بنویسید که میانگین AVE مقادیر A را پیدا کند. میانگین حسابی یا معدل \bar{x} مقادیر x_1, x_2, \dots, x_n با توجه به تعریف، به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}$$

مسئله ۲۵-۴: هر دانشجوی یک کلاس 30 نفره در 6 آزمون شرکت می‌کند که در آن دامنه نمرات بین 0 و 100 است. فرض کنید نمرات آزمونها در یک آرایه 30×6 بنام TEST ذخیره شده است، یک قطعه برنامه بنویسید که:

(الف) معدل نمرات هر آزمون را پیدا کند.

(ب) نمره نهایی هر دانشجو را پیدا کنید که در آن نمره نهایی، میانگین پنج تا از بالاترین نمره آزمون است.

(ج) تعداد NUM دانشجویانی که نمره قبولی نگرفته‌اند یعنی دانشجویانی که نمره نهایی‌شان کمتر از 60 است را پیدا کنید.

(د) میانگین نمرات نهایی را پیدا کنید.

آرایه‌های نوع اشاره‌گر، ساختارهای رکوردی

مسئله ۲۶-۴: داده‌های شکل ۲۶-۴ (ج) را در نظر بگیرید. یک زیربرنامه Procedure بنویسید که لیست موکلین مربوط به LAWYER[K] را پیدا کند. (ب) فرض کنید CLIENT جا برای 400 موکل دارد. آرایه‌ای بنام FREE تعریف کنید به گونه‌ای که FREE[K] شامل تعداد حافظه‌های خالی بعد از لیست موکلین مربوط به LAWYER[K] باشد.

مسئله ۲۷-۴: در زیرلیست فیلد رکوردهای یک فایل از کارمندان با شماره سطح آنها ارائه شده

است:

1 Employee(200), 2 SSN(Social Security Number), 2 Name,
3 Last, 3 First, 3 MI (Middle Initial), 2 Address, 3 Street,
3 Area, 4 City, 4 State, 4 ZIP, 2 Age, 2 Salary, 2 Dependents

(الف) ساختار سلسله مراتبی متناظر با آن را رسم کنید.

(ب) کدامیک از فیلدها، فیلدهای ابتدایی هستند؟

(ج) یک ساختار رکوردی برای مثال یک ساختار PL / I یا یک رکورد PASCAL برای ذخیره داده‌ها بیان کنید.

مسئله ۲۸-۴: ساختمان داده شکل ۲۷-۴ را در نظر بگیرید. یک زیربرنامه Procedure برای انجام هر یک از عملیات زیر بنویسید:

(الف) تعداد Oldsmobiles نو را که با قیمت کمتر از \$10 000 به فروش می‌رسند پیدا کند.

(ب) تعداد automobiles نو را که با قیمت کمتر از \$10 000 به فروش می‌رسند پیدا کند.

(ج) تعداد automobiles را که با قیمت کمتر از \$10 000 به فروش می‌رسند پیدا کند.

(د) تمام automobiles را که زیر \$10 000 به فروش می‌رسند پیدا کند.

توجه کنید: قسمتهای (ج) و (د) تنها نیازمند AUTO و PRICE همراه با شماره automobiles هستند.

مسئله ۲۹-۴: رکورد دانشجویان یک کلاس به صورت زیر سازماندهی شده است:

1 Student(35), 2 Name, 3 Last, 3 First, 3 MI (Middle Initial), 2 Major
2 Test(4), 2 Final, 2 Grade

(الف) چند فیلد ابتدایی در آن وجود دارد؟

(ب) یک ساختار رکوردی برای مثال یک ساختار PL / I یا یک رکورد PASCAL برای ذخیره داده‌ها بیان کنید.

(ج) خروجی هر یک از دستورهای Write زیر را شرح دهید.

• Write: Test[4] (iii) Write: Name[15] (ii) Write: Final[15] (i)

مسئله ۳۰-۴: ساختمان داده مسئله ۱۸-۴ را در نظر بگیرید. یک زیربرنامه Procedure بنویسید که:

(الف) معدل نمرات GPA دانشجوی سال دوم را پیدا کند.

(ب) تعداد دانشجویان رشته زیست‌شناسی را پیدا کند.

(ج) تعداد نمرات CUM بزرگتر از K را پیدا کند.

برای مسأله‌های زیر برنامه بنویسید

آرایه‌ها

فرض کنید داده‌های جدول ۴-۱ در آرایه‌های خطی **YEAR** و **SSN, LAST, GIVEN, CUM** (یا فضایی برای 25 دانشجو) ذخیره شده‌اند و متغیر **NUM** به صورتی تعریف می‌شود که حاوی تعداد واقعی دانشجویان است.

مسأله ۴-۳۱: برای هر یک از موارد زیر یک برنامه بنویسید:

(الف) لیست تمام دانشجویانی را که **CUM** آنها برابر **K** یا بیشتر از **K** است چاپ کند. برنامه را با استفاده از $K = 3.00$ آزمایش کنید.

(ب) لیست تمام دانشجویانی را که سال **L** ام هستند چاپ کند. برنامه را با استفاده از $L = 2$ یا سال اول آزمایش کنید.

مسأله ۴-۳۲: الگوریتم جستجوی خطی را به صورت یک زیربرنامه **LINEAR(ARRAY, LB, UB, ITEM, LOC)** بنویسید که یا مکان **LOC** را پیدا کند که در آن **ITEM** در **ARRAY** ظاهر می‌شود یا $LOC = 0$ را برگرداند.

مسأله ۴-۳۳: الگوریتم جستجوی دودویی و اضافه کردن را به صورت یک زیربرنامه **BINARY(ARRAY, LB, UB, ITEM, LOC)** بنویسید که یا مکان **LOC** را پیدا کند که در آن **ITEM** در **ARRAY** ظاهر می‌شود یا مکان **LOC** را پیدا کند که **ITEM** باید به **ARRAY** اضافه شود.

مسأله ۴-۳۴: یک برنامه بنویسید که شماره تأمین اجتماعی **SOC** یک دانشجو را بخواند و با استفاده از **LINEAR** رکورد دانشجو را پیدا کرده چاپ کند. برنامه را با استفاده از (الف) 0732 - 58 - 174 (ب) 5554 - 55 - 172 و (ج) 6382 - 63 - 126 آزمایش کنید.

مسأله ۴-۳۵: یک برنامه بنویسید که **NAME** (آخر) یک دانشجو را بخواند و با استفاده از **BINARY** رکورد دانشجو را پیدا کرده چاپ کند. برنامه را با استفاده از (الف) **Rogers** (ب) **Johnson** و (ج) **Bailey** آزمایش کنید.

مسأله ۴-۳۶: یک برنامه بنویسید که رکورد یک دانشجو را به صورت زیر بخواند:

SSNST, LASTST, GVNST, YEARST

و با استفاده از **BINARY** رکورد را در لیست اضافه کند. برنامه را با استفاده از:

(الف) 168-48-2255, Quinn, Michael, 2.15, 3

(ب) 177-58-0772, Jones, Amy, 2.75, 2

آزمایش کنید.

جدول ۴-۱

Social Security Number	Last Name	Given Name	CUM	Year
211-58-1329	Adams	Bruce	2.55	2
169-38-4248	Bailey	Irene L.	3.25	4
166-48-5842	Cheng	Kim	3.40	1
187-52-4076	Davis	John C.	2.85	2
126-63-6382	Edwards	Steven	1.75	3
135-58-9565	Fox	Kenneth	2.80	2
172-48-1849	Green	Gerald S.	2.35	2
192-60-3157	Hopkins	Gary	2.70	2
160-60-1826	Klein	Deborah M.	3.05	1
166-52-4147	Lee	John	2.60	3
186-58-0490	Murphy	William	2.30	2
187-58-1123	Newman	Ronald P.	3.90	4
174-58-0732	Osborn	Paul	2.05	3
183-52-3865	Parker	David	1.55	2
135-48-1397	Rogers	Mary J.	1.85	1
182-52-6712	Schwab	Joanna	2.95	2
184-48-8539	Thompson	David E.	3.15	3
187-48-2377	White	Adam	2.50	2

مسئله ۳۷-۴: یک برنامه بنویسید که NAME (آخر) یک دانشجو را بخواند و با استفاده از BINARY رکورد دانشجو را از لیست حذف کند. برنامه را با استفاده از (الف) Parker و (ب) Fox آزمایش کنید.

مسئله ۳۸-۴: برای هر یک از حالت‌های زیر یک برنامه بنویسید:
(الف) با استفاده از آرایه SSN آرایه‌های NUMBER و PTR را به گونه‌ای تعریف کنید که NUMBER آرایه مرتب‌شده‌ای از عناصر SSN باشد و PTR[K] شامل مکان NUMBER[K] در SSN باشد.

(ب) شماره تأمین اجتماعی SOC یک دانشجو را بخواند و با استفاده از BINARY و آرایه NUMBER رکورد دانشجو را پیدا کرده چاپ کند. برنامه را با استفاده از (i) 174 - 58 - 0732 (ii) 554 - 55 - 172 و (iii) 6382 - 63 - 126 آزمایش کنید. این مسئله را با مسئله ۳۴-۴ مقایسه کنید.

آرایه‌های نوع اشاره‌گر

فرض کنید داده‌های داخل جدول ۴-۲ در یک آرایه خطی CLASS (با فضایی برای 50 نام) ذخیره شده‌اند. علاوه بر این فرض کنید بین بخش Section ها، 2 فضای خالی وجود دارد و آرایه خطی NUMB، PTR و FREE طوری تعریف شده‌اند که NUMB[K] حاوی تعداد عناصر در بخش K است و

K, **PTR[K]** مکان اولین نام بخش **K** در **CLASS** را بدست می‌دهد و **FREE[K]** تعداد فضاهای خالی داخل **CLASS** بعد از بخش **K** است.

جدول ۲-۴

Section 1	Section 2	Section 3	Section 4
Brown Davis Jones Samuels	Abrams Collins Forman Hughes Klein Lee Moore Quinn Rosen Scott Taylor Weaver	Allen Conroy Damario Harris Rich Sweeney	Burns Cohen Evans Gilbert Harlan Lopez Meth Ryan Williams

مسئله ۳۹-۴: یک برنامه بنویسید که یک عدد صحیح **K** را بخواند و نامهای بخش **K** را چاپ کند. برنامه را با استفاده از (الف) $K = 2$ و (ب) $K = 3$ آزمایش کنید.

مسئله ۴۰-۴: یک برنامه بنویسید که نام **NAME** یک دانشجو را بخواند و مکان و شماره بخش **Section** دانشجو را پیدا کرده چاپ کند. برنامه را با استفاده از (الف) **Harris** (ب) **Rivers** و (ج) **Lopez** آزمایش کنید.

مسئله ۴۱-۴: یک برنامه بنویسید که نام‌ها را به صورت ستونی، به صورتی که در جدول ۲-۴ داده شده است چاپ کند.

مسئله ۴۲-۴: یک برنامه بنویسید که نام **NAME** و شماره بخش **SECN** یک دانشجو را بخواند و دانشجو را در **CLASS** اضافه کند. برنامه را با استفاده از (الف) **Eden, 3** (ب) **Novak, 4** (ج) **Parker, 2** (د) **Vaughn, 3** و (ه) **Bennett, 3** آزمایش کند. برنامه باید حالت‌های سرریز **Overflow** را مورد توجه قرار دهد.

مسئله ۴۳-۴: یک برنامه بنویسید که نام **NAME** یک دانشجو را بخواند و دانشجو را از **CLASS** حذف کند. برنامه را با استفاده از (الف) **Klein** (ب) **Daniels** (ج) **Meth** و (د) **Harris** آزمایش کنید.

مسئله‌های گوناگون

مسئله ۴-۴۴: فرض کنید A و B دو آرایه برداری n عنصری در حافظه هستند و X و Y اسکالر هستند. یک برنامه بنویسید که (الف) $XA + YB$ و (ب) $A \cdot B$ را پیدا کند. برنامه را با استفاده از $A = (16, -6, 7)$ و $B = (4, 2, -3)$ و $Y = -5$ و $X = 2$ آزمایش کنید.

مسئله ۴-۴۵: الگوریتم ضرب دو ماتریس، یعنی الگوریتم 4.7 را به صورت یک زیربرنامه

$\text{MATMUL}(A, B, C, M, P, N)$

بنویسید که C حاصلضرب ماتریس $A, m \times p$ و ماتریس $B, p \times n$ را پیدا کند. برنامه را با استفاده از آزمایش کنید.

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -3 & 5 \\ 6 & 1 & -2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -7 & -3 \\ 5 & -1 & 6 & 2 \\ 0 & 3 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

مسئله ۴-۴۶: چند جمله‌ای

$$f(x) = a_1 x^n + a_2 x^{n-1} + \dots + a_n x + a_{n+1}$$

را در نظر بگیرید. محاسبه مقدار این چندجمله‌ای با روش معمولی مستلزم

$$n + (n-1) + \dots + 1 = \frac{n(n+1)}{2}$$

عمل ضرب و n عمل جمع است. با وجود این، می‌توان این چندجمله‌ای را با فاکتورگیری متوالی از x به صورت زیر نوشت:

$$f(x) = (((\dots((a_1 x + a_2)x + a_3)x + \dots)x + a_n)x + a_{n+1})$$

در این روش تنها از n عمل ضرب و n عمل جمع استفاده می‌شود. روش دوم اخیر برای محاسبه مقدار یک چندجمله‌ای روش هورنر نام دارد.

(الف) چندجمله‌ای $f(x) = 5x^4 - 6x^3 + 7x^2 + 8x - 9$ را به گونه‌ای بنویسید تا با استفاده از روش هورنر قابل ارزیابی باشد.

(ب) فرض کنید ضریبهای یک چندجمله‌ای در یک آرایه خطی $A(N+1)$ در حافظه هستند، یعنی $A[1]$ ضرب x^n ، $A[2]$ ضریب x^{n-1} و \dots و x^{n-1} و $A[N+1]$ مقدار ثابت چندجمله‌ای است. یک زیربرنامه $\text{Procedure HORNER}(A, N+1, X, Y)$ بنویسید که مقدار چندجمله‌ای $Y = F(X)$ را به ازای یک مقدار معلوم X با استفاده از روش هورنر محاسبه کند. برنامه را با استفاده از $X = 2$ و $f(X)$ از قسمت (الف) آزمایش کنید.

فصل ۵

لیستهای پیوندی

۱-۵ مقدمه

استفاده از اصطلاح "لیست" در زندگی روزمره به یک مجموعه خطی از اقلام داده‌ای، مربوط می‌شود. شکل ۱-۵ (الف) لیست خرید از یک فروشگاه را نشان می‌دهد. این لیست دارای عنصر اول، عنصر دوم، ... و عنصر آخر است. اغلب از ما خواسته می‌شود یک عنصر را به لیست اضافه کنیم یا آن را از لیست حذف کنیم. شکل ۱-۵ (ب) لیست خرید از فروشگاه را پس از اضافه کردن سه عنصر در آخر لیست و حذف دو عنصر از لیست نشان می‌دهد که روی آنها خط کشیده‌ایم.

داده‌پردازی اغلب شامل ذخیره و پردازش داده‌هایی است که در لیستها سازماندهی می‌شوند. استفاده از آرایه‌ها یک روش ذخیره‌چنین داده‌هایی است که در فصل ۴ مورد بحث و بررسی کامل قرار گرفت. یادآوری می‌کنیم که رابطه خطی بین عناصر داده‌ای یک آرایه به وسیله رابطه فیزیکی داده‌ها در حافظه منعکس می‌شود نه به وسیله اطلاعات خود عناصر داده‌ای. از طرف دیگر، آرایه‌ها نیز دارای معایبی هستند به عنوان مثال اضافه کردن و حذف عناصر در آرایه‌ها نسبتاً پرهزینه است. علاوه بر این، از آنجا که هر آرایه معمولاً یک بلاک از فضای حافظه را اشغال می‌کند از این‌رو هنگام نیاز به حافظه اضافی به راحتی نمی‌توان اندازه یک آرایه را دوبرابر یا سه برابر کرد. به همین خاطر به آرایه‌ها، لیستهای فشرده یا متراکم نیز می‌گویند. علاوه بر این به آرایه‌ها، ساختمان داده ایستا نیز گفته می‌شود.

milk	milk
eggs	eggs
butter	butter
tomatoes	tomatoes
apples	apples
oranges	oranges
bread	bread
chicken	
corn	
lettuce	

(ب)

(الف)

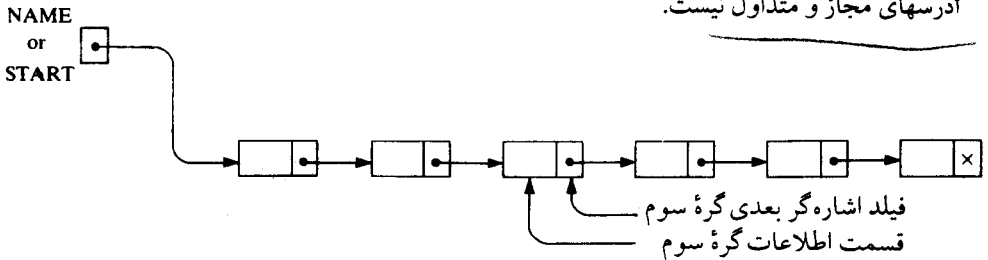
شکل ۵-۱

راه دیگر ذخیره یک لیست در حافظه آن است که هر عنصر را در یک لیست، که شامل یک فیلد و آدرس عنصر بعدی در لیست است و پیوند یا اشاره گر نامیده می شود قرار می دهیم. بدین ترتیب لازم نیست عناصر متوالی داخل لیست فضای مجاور در حافظه را اشغال کنند. این کار باعث می شود اضافه کردن و حذف عناصر لیست براحتی انجام شود. بنابراین، اگر اساساً علاقمند باشیم جستجویی را در داده‌ها برای اضافه و حذف عنصر مثلاً در پردازش کلمه انجام دهیم نباید داده‌ها را در یک آرایه ذخیره کنیم بلکه بهتر است آنها را در یک آرایه به کمک اشاره گر ذخیره کنیم. ساختمان داده نوع اخیر یک لیست پیوندی نام دارد که موضوع اصلی مطالب این فصل را تشکیل می دهد. علاوه بر این لیستهای چرخشی یا حلقوی و لیستهای دو طرفه را که تعمیم طبیعی لیستهای پیوندی است بررسی می کنیم مزایا و معایب آنها شرح داده می شود.

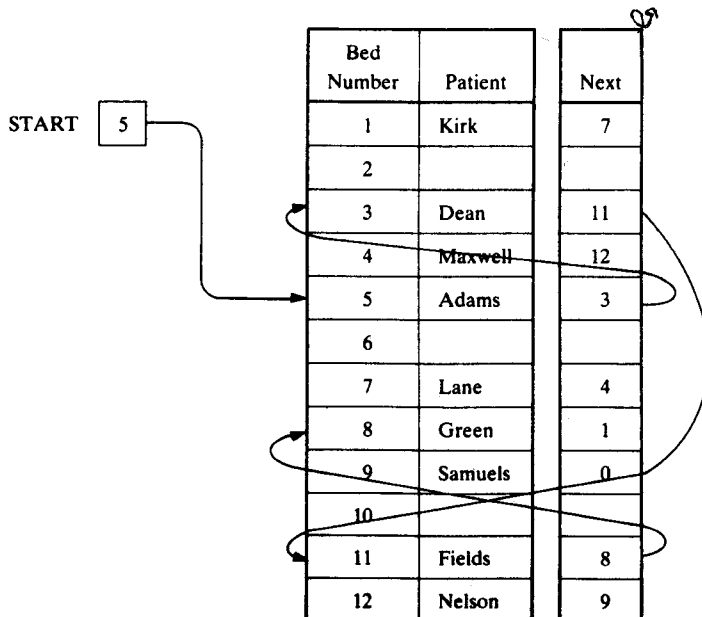
۵-۲ لیستهای پیوندی

یک لیست پیوندی یا یک لیست یکطرفه مجموعه‌ای خطی از عناصر داده‌ای بنام گره‌ها است که در آن ترتیب خطی توسط اشاره گرها داده می شود. به عبارت دیگر هر گره به دو قسمت تقسیم می شود. قسمت اول شامل اطلاعات عنصر است و قسمت دوم که فیلد پیوند یا فیلد اشاره گر بعدی نام دارد شامل آدرس گره بعدی در لیست است.

شکل ۲-۵ یک نمودار از یک لیست پیوندی با ۶ گره را نشان می‌دهد که هر گره با دو قسمت به تصویر کشیده شده است. قسمت چپ، قسمت اطلاعات گره را نشان می‌دهد که می‌تواند حاوی تمام رکورد عنصر داده‌ای مانند (NAME, ADDRESS, ...) باشد. قسمت راست، فیلد اشاره‌گر بعدی گره را نمایش می‌دهد و یک پیکان از آن تا گره بعدی لیست رسم شده است. این کار به پیروی از روش متداول رسم پیکان از یک فیلد به یک گره صورت گرفته است هنگامی که آدرس گره در فیلد داده شده قرار دارد. اشاره‌گر آخرین گره شامل یک مقدار خاص است که اشاره‌گر پوچ یا NULL نام دارد که هیچیک از آدرسهای مجاز و متداول نیست.



شکل ۲-۵ لیست پیوندی با ۶ گره



شکل ۳-۵

در عمل 0 یا یک عدد منفی برای اشاره‌گر پوچ یا NULL مورد استفاده قرار می‌گیرد. اشاره‌گر پوچ که در نمودار با X نمایش داده شده است علامت پایان لیست است. علاوه بر این لیست پیوندی دارای یک متغیر اشاره‌گر لیست بنام START یا NAME است که محتوای آن آدرس گره اول لیست است. از این‌رو یک پیکان از START به گره اول رسم شده است. واضح است که برای پیمودن طول لیست تنها نیازمند این آدرس در START هستیم. حالت خاصی وجود دارد که لیست، هیچ گره‌ای ندارد. به چنین لیستی لیست پوچ NULL یا لیست تهی یا خالی می‌گویند و با اشاره‌گر NULL در متغیر START نمایش داده می‌شود.

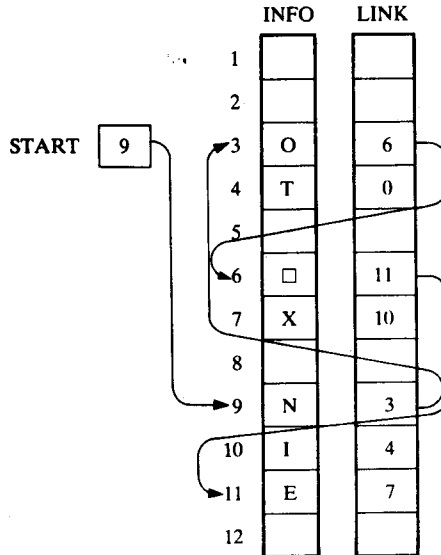
مثال ۱-۵

اطاق یک بیمارستان دارای ۱۲ تخت است که از میان آنها ۹ تخت به صورتی که در شکل ۳-۵ نشان داده شده است اشغال شده است. فرض کنید می‌خواهیم یک لیست الفبایی از بیماران در اختیار داشته باشیم. این لیست ممکن است به وسیله فیلد اشاره‌گر که در نمودار Next نام‌گذاری شده است داده شود. از متغیر START برای اشاره به بیمار اول استفاده می‌کنیم. از این‌رو START شامل 5 است چون بیمار اول Adams تخت شماره 5 را اشغال کرده است. اشاره‌گر Adams برابر 3 است چون Dean، بیمار بعدی تخت شماره 3 را اشغال کرده است. اشاره‌گر Dean برابر 11 است چون Fields بیمار بعدی تخت شماره 11 را اشغال کرده است و الی آخر. ورودی مربوط به بیمار آخر (Samuels) شامل اشاره‌گر پوچ است که آن را با 0 نمایش می‌دهد. در نمودار فقط برای بیان لیست چند بیمار اول پیکان رسم شده است.

۳-۵ نمایش لیستهای پیوندی در حافظه

فرض کنید LIST یک لیست پیوندی باشد. آنگاه LIST به صورت زیر در حافظه ذخیره می‌شود مگر آن که خلاف آن به صورت صریح یا ضمنی بیان گردد. قبل از هرچیز، LIST مستلزم دو آرایه خطی است که ما آنها را در اینجا INFO و LINK می‌نامیم. نظیر INFO[K] و LINK[K] که به ترتیب شامل قسمت اطلاعات و فیلد اشاره‌گر بعدی یک گره از LIST است. همانگونه که در بالا متذکر شدیم LIST نیز نیازمند یک نام متغیر نظیر START است که شامل مکان ابتدای لیست است و نگهبان اشاره‌گر بعدی که با NULL نمایش داده می‌شود مبین انتهای لیست است. از آنجا که اندیسهای آرایه‌های INFO و LINK معمولاً مثبت هستند ما 0 = NULL را اختیار می‌کنیم، مگر آن که خلاف آن را بیان کنیم.

مثالهای زیر از لیستهای پیوندی بیانگر آن است که لزومی ندارد گره‌های یک لیست عناصر مجاور در آرایه‌های INFO و LINK را اشغال کنند و بیش از یک لیست می‌تواند در همین آرایه‌های خطی INFO و LINK نگهداری شوند. با وجود این، هر لیست باید متغیر اشاره‌گر مربوط به خود را دارا باشد که مکان گره اولش را به دست می‌دهد.



شکل ۵-۴

مثال ۵-۲

شکل ۵-۴ تصویر یک لیست پیوندی را در حافظه نشان می‌دهد که در آن هر گره لیست شامل یک کاراکتر است. می‌توانیم لیست واقعی کاراکترها، یا به بیان دیگر رشته را به صورت زیر به دست آوریم.

$START = 9$ از این رو $INFO[9] = N$ اولین کاراکتر است.

$LINK[9] = 3$ از این رو $INFO[3] = O$ دومین کاراکتر است.

$LINK[3] = 6$ از این رو $INFO[6] = \square$ فضای خالی سومین کاراکتر است.

$LINK[6] = 11$ از این رو $INFO[11] = E$ چهارمین کاراکتر است.

$LINK[11] = 7$ از این رو $INFO[7] = X$ پنجمین کاراکتر است.

$LINK[7] = 10$ از این رو $INFO[10] = I$ ششمین کاراکتر است.

$LINK[10] = 4$ از این رو $INFO[4] = T$ هفتمین کاراکتر است.

$LINK[4] = 0$ یعنی مقدار آن NULL است، از این رو لیست پایان یافته است.

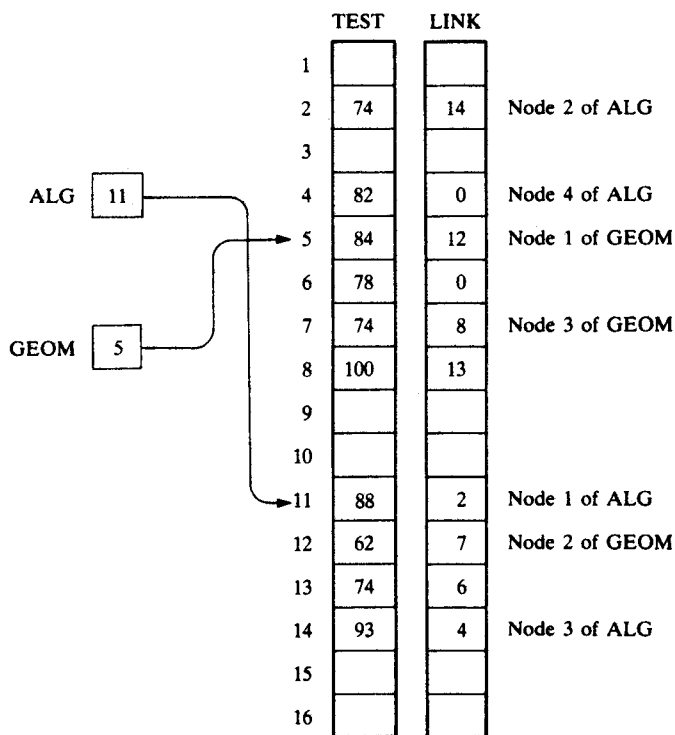
به عبارت دیگر، رشته کاراکتری موردنظر است.

مثال ۵-۳

شکل ۵-۵ چگونگی نگهداری دو لیست از نمرات آزمون، یعنی ALG و $GEOM$ را در حافظه نشان می‌دهد که در آن گره‌های هر دو لیست در آرایه‌های خطی $TEST$ و $LINK$ ذخیره می‌شوند. ملاحظه

می‌کنید که از نام این لیستها به عنوان متغیرهای اشاره‌گر لیست نیز استفاده می‌کنیم. در اینجا ALG حاوی 11، مکان اولین گره آن و GEOM حاوی 5، مکان اولین گره آن است. با تعقیب اشاره‌گرها ملاحظه می‌کنید که ALG شامل نمرات آزمون زیر است:

88, 74, 93, 82



شکل ۵-۵

و GEOM شامل نمرات آزمون

84, 62, 74, 100, 74, 78

است. گره‌های ALG و برخی از گره‌های GEOM در نمودار به صورت صریح با شماره مشخص شده‌اند.

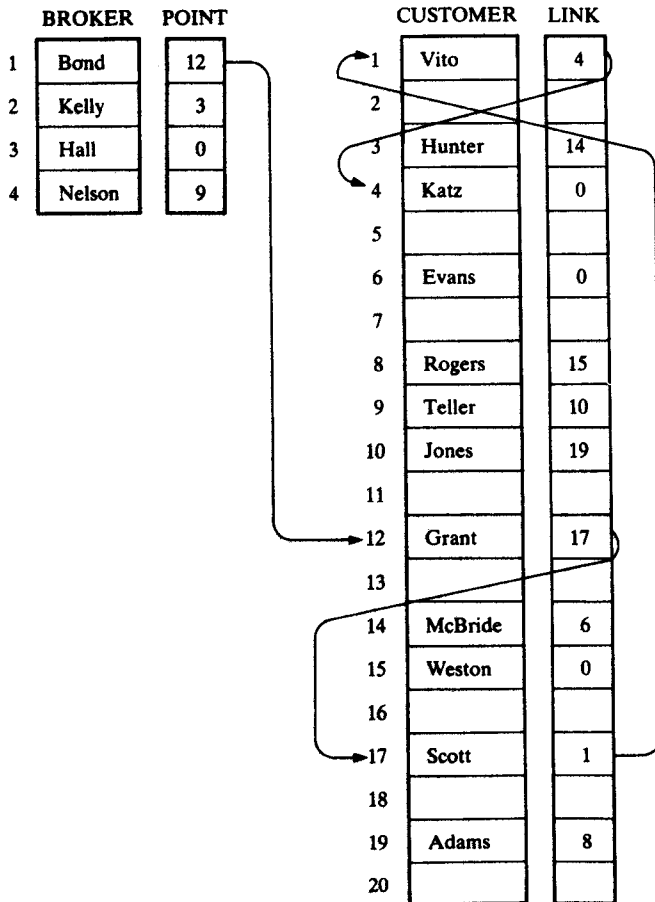
مثال ۴-۵

یک شرکت فروش کامپیوتر را در نظر بگیرید که دارای چهار مأمور فروش است و هر مأمور فروش لیستی از مشتری‌های خود را در اختیار دارد. چنین داده‌ای را می‌توان مانند شکل ۶-۵ سازماندهی کرد،

یعنی تمام مشتری‌های چهار لیست، در یک آرایه **CUSTOMER** قرار داده می‌شوند و آرایه **LINK** شامل فیلدهای اشاره گر بعدیِ گره‌های لیست است. همچنین آرایه مأمور فروش **BROKER** وجود دارد که شامل لیست مأموران فروش است و آرایه نوع اشاره گر **POINT** به گونه‌ای است که **POINT[K]** به ابتدای لیست مشتری‌های **BROKER[K]** اشاره می‌کند.

بنابراین لیست مشتری‌های **Bond** که با پیکان مشخص شده است شامل

Grant, Scott, Vito, Katz



شکل ۶-۵

به‌طور مشابه، لیست **Kelly** شامل

Hunter, McBride, Evans

و لیست Nelson شامل

Teller, Jones, Adams, Rogers, Weston

و لیست Hall یک لیست خالی است، چون اشاره گر NULL یا 0 در POINT[3] ظاهر شده است. به بیان کلی، قسمت اطلاعات یک گره می‌تواند یک رکورد بایش از یک عنصر داده‌ای باشد. در چنین مواردی، داده‌ها بایستی در نوعی از ساختار رکوردی یا در یک مجموعه از آرایه‌های موازی مانند آنچه که در مثال زیر بیان شده است ذخیره شوند.

مثال ۵-۵

فایل پرسنلی یک شرکت کوچک را در نظر بگیرید که دارای داده‌های زیر برای نه کارمند است:

Name, Social Security Number, Sex, Monthly Salary

معمولاً چهار آرایه موازی مانند NAME, SSN, SEX, SALARY برای ذخیره داده‌ها به صورتی که در بخش ۱۲-۴ مورد بررسی قرار گرفت مورد نیاز است. شکل ۷-۵ چگونگی ذخیره داده‌ها را به صورت یک لیست پیوندی مرتب شده (الفبایی) نشان می‌دهد که در آن تنها از یک آرایه اضافی LINK برای فیلد اشاره گر بعدی لیست استفاده شده است و متغیر START به اولین رکورد لیست اشاره می‌کند. ملاحظه می‌کنید که 0 به عنوان اشاره گر پوچ NULL مورد استفاده قرار گرفته است.

	NAME	SSN	SEX	SALARY	LINK
1					
2	Davis	192-38-7282	Female	22 800	12
3	Kelly	165-64-3351	Male	19 000	7
4	Green	175-56-2251	Male	27 200	14
5					
6	Brown	178-52-1065	Female	14 700	9
7	Lewis	131-58-9939	Female	16 400	10
8					
9	Cohen	177-44-4557	Male	19 000	2
10	Rubin	135-46-6262	Female	15 500	0
11					
12	Evans	168-56-8113	Male	34 200	4
13					
14	Harris	208-56-1654	Female	22 800	3

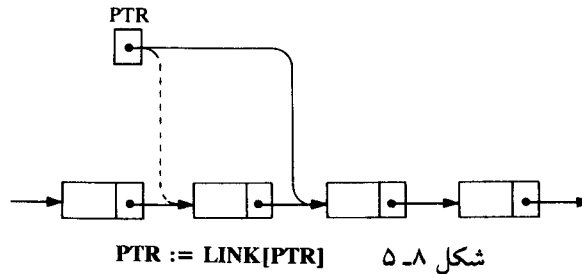
۴-۵ پیمایش یک لیست پیوندی

فرض کنید **LIST** یک لیست پیوندی در حافظه باشد و در آرایه‌های خطی **INFO** و **LINK** ذخیره شده است که **START** به عنصر اول اشاره می‌کند و **NULL** پایان لیست را نشان می‌دهد. فرض کنید خواسته باشیم برای پردازش هر گره دقیقاً یکبار **LIST** را پیمایش کنیم. این بخش الگوریتمی را ارائه می‌دهد که این عمل را انجام می‌دهد و آنگاه از این الگوریتم در برخی از کاربردها استفاده می‌کنیم.

الگوریتم پیمایش از متغیر اشاره گر **PTR** که به گره در حال پردازش اشاره دارد استفاده می‌کند. بنابراین **LINK[PTR]** به گره بعدی اشاره می‌کند که قرار است پردازش شود. بنابراین دستور جایگزینی

$$PTR := LINK[PTR]$$

اشاره گر را به گره بعدی در لیست، به صورتی که در نمودار ۸-۵ نشان داده شده است، انتقال می‌دهد.



جزئیات این الگوریتم به صورت زیر است: به **PTR** یا **START** مقدار اولیه می‌دهیم. آنگاه **INFO[PTR]** یا اطلاعات گره اول را پردازش می‌کنیم. **PTR** را با دستور جایگزینی، $PTR := LINK[PTR]$ تازه می‌کنیم. از این رو **PTR** به گره دوم اشاره می‌کند. آنگاه **INFO[PTR]** یعنی اطلاعات گره دوم را پردازش می‌کنیم. مجدداً **PTR** را با دستور جایگزینی $PTR := LINK[PTR]$ تازه می‌کنیم. آنگاه **INFO[PTR]** یعنی اطلاعات گره سوم را پردازش می‌کنیم. همینطور تا آخر، تا زمانی که $PTR = NULL$ نشده است کار را ادامه می‌دهیم که خود علامت پایان لیست است.

نمایش رسمی این الگوریتم به صورت زیر است:

Algorithm 5.1: (Traversing a Linked List) Let **LIST** be a linked list in memory. This algorithm traverses **LIST**, applying an operation **PROCESS** to each element of **LIST**. The variable **PTR** points to the node currently being processed.

1. Set $PTR := START$. [Initializes pointer **PTR**.]
2. Repeat Steps 3 and 4 while $PTR \neq NULL$.
3. Apply **PROCESS** to **INFO[PTR]**.
4. Set $PTR := LINK[PTR]$. [**PTR** now points to the next node.]
- [End of Step 2 loop.]
5. Exit.

به شباهت بین الگوریتم 5.1 و الگوریتم 4.1 توجه کنید که یک آرایه خطی را پیمایش می‌کند. شباهت این دو الگوریتم متأثر از این واقعیت است که هر دو الگوریتم دارای ساختارهای خطی هستند که شامل یک ترتیب خطی طبیعی از عناصر است.

مواظب باشید : همانند آرایه‌های خطی، عمل **PROCESS** در الگوریتم 5.1 ممکن است از چند متغیر استفاده کند که باید قبل از اعمال **PROCESS** بر هر یک از عناصر داخل **LIST**، مقدار اولیه بگیرد. در نتیجه، ممکن است الگوریتم با مرحله مقدار اولیه دادن دنبال شود.

مثال ۵-۶

زیر برنامه **PROCEDURE** زیر، اطلاعات هر گره لیست پیوندی را چاپ می‌کند. از آنجا که زیر برنامه باید لیست را پیمایش کند، از این رو شباهت زیادی با الگوریتم 5.1 خواهد داشت.

Procedure: PRINT(INFO, LINK, START)

This procedure prints the information at each node of the list.

1. Set PTR := START.
2. Repeat Steps 3 and 4 while PTR ≠ NULL:
3. Write: INFO[PTR].
4. Set PTR := LINK[PTR]. [Updates pointer.]
- [End of Step 2 loop.]
5. Return.

به بیان دیگر، زیر برنامه **PROCEDURE** می‌تواند تنها با جانشانی دستور

Write: INFO[PTR]

برای مرحله پردازش در الگوریتم 5.1 به دست آید.

مثال ۵-۷

زیر برنامه **PROCEDURE** زیر **NUM** تعداد عناصر یک لیست پیوندی را پیدا می‌کند.

Procedure: COUNT(INFO, LINK, START, NUM)

1. Set NUM := 0. [Initializes counter.]
2. Set PTR := START. [Initializes pointer.]
3. Repeat Steps 4 and 5 while PTR ≠ NULL.
4. Set NUM := NUM + 1. [Increases NUM by 1.]
5. Set PTR := LINK[PTR]. [Updates pointer.]
- [End of Step 3 loop.]
6. Return.

ملاحظه می‌کنید که این زیر برنامه لیست پیوندی را برای شمارش تعداد عناصر آن پیمایش می‌کند. از

این رو، این زیربرنامه خیلی به الگوریتم پیمایش بالا یعنی الگوریتم 5.1 شبیه است. با وجود این در اینجا قبل از پیمایش لیست لازم است به متغیر NUM در یک مرحله مقدار اولیه داده شود. به بیان دیگر، زیربرنامه را می توان به صورت زیر نوشت :

Procedure: COUNT(INFO, LINK, START, NUM)

1. Set NUM := 0. [Initializes counter.]
2. Call Algorithm 5.1, replacing the processing step by:
Set NUM := NUM + 1.
3. Return.

اکثر برنامه هایی که پردازش لیستها را انجام می دهد به این صورت هستند. مسأله ۳-۵ را ببینید.

۵-۵ جستجو در یک لیست پیوندی

فرض کنید یک لیست پیوندی LIST به صورت نشان داده شده در بخشهای ۳-۵ و ۴-۵، در حافظه ذخیره شده است. فرض کنید عنصر مشخص ITEM داده شده است. این بخش دو الگوریتم جستجو برای تعیین مکان LOC گره ای را که در آن ITEM برای اولین بار در LIST ظاهر شده است مورد بحث و بررسی قرار می دهد. در الگوریتم اول فرض می شود که داده ها در LIST مرتب شده، نیستند در حالی که در الگوریتم دوم فرض می شود LIST مرتب شده است.

اگر ITEM در واقع یک مقدار کلیدی باشد و بخواهیم در یک فایل رکوردی را جستجوی کنیم که شامل ITEM است، آنگاه ITEM می تواند تنها یک بار در LIST ظاهر شود.

لیست LIST مرتب شده نیست

فرض کنید داده ها در لیست LIST لزوماً مرتب شده نباشد. آنگاه عمل جستجوی ITEM در لیست LIST را با پیمایش لیست با استفاده از متغیر اشاره گر PTR و مقایسه ITEM با محتوای INFO[PTR] هر گره لیست LIST یک گره به یک گره انجام می دهیم. قبل از آن که اشاره گر PTR را با دستور

PTR := LINK[PTR]

تازه کنیم، لازم است دو آزمایش زیر را انجام دهیم. نخست باید تحقیق کنیم که آیا به انتهای لیست رسیده ایم یا خیر؟ یعنی نخست باید تعیین کنیم که آیا

PTR = NULL

یا خیر. در صورت منفی بودن جواب، باید تحقیق کنیم که آیا

INFO[PTR] = ITEM

یا خیر. این دو آزمایش را نمی‌توان در یک زمان انجام داد چون وقتی $PTR = NULL$ باشد $INFO[PTR]$ معنی ندارد و تعریف نشده است. بنابراین برای کنترل اجرای حلقه از آزمایش اول استفاده می‌کنیم و آزمایش دوم را در درون حلقه انجام می‌دهیم. الگوریتم به صورت زیر است:

Algorithm 5.2 SEARCH(INFO, LINK, START, ITEM, LOC)

LIST is a linked list in memory. This algorithm finds the location LOC of the node where ITEM first appears in LIST, or sets $LOC = NULL$.

1. Set $PTR := START$.
2. Repeat Step 3 while $PTR \neq NULL$:
3. If $ITEM = INFO[PTR]$, then:
Set $LOC := PTR$, and Exit.
Else:
Set $PTR := LINK[PTR]$. [PTR now points to the next node.]
[End of If structure.]
[End of Step 2 loop.]
4. [Search is unsuccessful.] Set $LOC := NULL$.
5. Exit.

پیچیدگی این الگوریتم همان پیچیدگی الگوریتم جستجوی خطی برای آرایه‌های خطی است که در بخش ۷-۴ بررسی شد. به بیان دیگر، زمان اجرای بدترین حالت، متناسب با n تعداد عناصر لیست LIST است و زمان اجرای حالت میانگین تقریباً با $n/2$ متناسب است. با این شرط که ITEM در لیست LIST یکبار ظاهر شده است که در هر گره لیست LIST احتمال مساوی دارد.

مثال ۸-۵

فایل پرسنلی شکل ۷-۵ را در نظر بگیرید. قطعه برنامه زیر شماره تأمین اجتماعی NNN یک کارمند را می‌خواند و آنگاه حقوق کارمند را ۵ درصد افزایش می‌دهد.

1. Read: NNN.
2. Call SEARCH(SSN, LINK, START, NNN, LOC).
3. If $LOC \neq NULL$, then:
Set $SALARY[LOC] := SALARY[LOC] + 0.05 * SALARY[LOC]$,
Else:
Write: NNN is not in file.
[End of If structure.]
4. Return.

این قطعه برنامه حالت بروز خطا در وارد کردن شماره تأمین اجتماعی NNN را در نظر می‌گیرد.

لیست LIST مرتب شده است

فرض کنید داده‌ها در لیست LIST مرتب شده باشند. مجدداً عمل جستجوی ITEM در لیست LIST را با پیمایش لیست با استفاده از متغیر اشاره گر PTR و مقایسه ITEM با محتوای INFO[PTR] هر گره لیست LIST یک گره به یک گره انجام می‌دهیم. با وجود این اکنون هرگاه ITEM بزرگتر از INFO[PTR] شود کار را متوقف می‌کنیم. الگوریتم به صورت زیر است:

Algorithm 5.3: SRCHSL(INFO, LINK, START, ITEM, LOC)

LIST is a sorted list in memory. This algorithm finds the location LOC of the node where ITEM first appears in LIST, or sets LOC = NULL.

1. Set PTR := START.
2. Repeat Step 3 while PTR ≠ NULL:
3. If ITEM < INFO[PTR], then:
Set PTR := LINK[PTR]. [PTR now points to next node.]
Else if ITEM = INFO[PTR], then:
Set LOC := PTR, and Exit. [Search is successful.]
Else:
Set LOC := NULL, and Exit. [ITEM now exceeds INFO[PTR].]
[End of If structure.]
[End of Step 2 loop.]
4. Set LOC := NULL.
5. Exit.

پیچیدگی این الگوریتم نیز برابر دیگر الگوریتم‌های جستجوی خطی است یعنی زمان اجرای بدترین حالت متناسب با n تعداد عناصر لیست LIST است و زمان اجرای حالت میانگین تقریباً با $n/2$ متناسب است.

یادآور می‌شویم که با یک آرایه خطی مرتب شده می‌توان یک جستجوی خطی را که زمان اجرای آن متناسب با $\log_2 n$ است داشته باشیم. از طرف دیگر، از آنجا که هیچ راهی برای مشخص کردن عنصر وسط لیست پیوندی وجود ندارد یک الگوریتم جستجوی دودویی را نمی‌توان بر یک لیست پیوندی مرتب شده بکار بست. این خاصیت یکی از عیب‌های اصلی استفاده از لیست پیوندی به عنوان یک ساختمان داده است.

مثال ۹-۵

بار دیگر فایل پرسنلی شکل ۵-۷ را در نظر بگیرید. قطعه برنامه زیر نام EMP یک کارمند را می‌خواند و حقوق کارمند را ۵ درصد افزایش می‌دهد. این مثال را با مثال ۸-۵ مقایسه کنید.

1. Read: EMPNAME.
2. Call SRCHSL(NAME, LINK, START, EMPNAME, LOC).
3. If LOC \neq NULL, then:
 Set SALARY[LOC] := SALARY[LOC] + 0.05 * SALARY[LOC].
 Else:
 Write: EMPNAME is not in list.
 [End of If structure.]
4. Return.

ملاحظه می‌کنید که اکنون می‌توانیم الگوریتم دوم جستجو، یعنی الگوریتم 5.3 را مورد استفاده قرار دهیم چون لیست به صورت الفبایی مرتب شده است.

۵-۶ تخصیص حافظه، جمع‌آوری حافظه بلااستفاده

از جمله موارد تعمیر و نگهداری لیستهای پیوندی در حافظه امکان اضافه کردن گره‌های جدید در لیست است و این امر مستلزم مکانیسمی است که حافظه بلااستفاده را به گره‌های جدید اختصاص دهد. به‌طور مشابه، به مکانیسمی مورد نیاز است که به‌وسیله آن حافظه گره‌های حذف‌شده برای استفاده آتی در دسترس باشد. این مباحث در این بخش بررسی می‌شود، حال آن که بحث کلی اضافه کردن و حذف گره‌ها تا بخشهای بعد به تعویق می‌افتد.

به همراه لیستهای پیوندی، لیست خاصی در حافظه نگهداری می‌شود که از خانه‌های حافظه بلااستفاده تشکیل می‌شود. خانه‌های حافظه بلااستفاده دارای اشاره‌گر مخصوص به خود است که لیست حافظه موجود یا لیست حافظه آزاد یا مخزن حافظه آزاد نامیده می‌شود.

فرض کنید لیستهای پیوندی به‌وسیله آرایه‌های موازی به صورتی که در بخشهای قبل بیان شد پیاده‌سازی شده است و بخواهیم عملیات اضافه کردن و حذف را بر روی لیستهای پیوندی انجام دهیم. آنگاه حافظه‌های بلااستفاده در آرایه‌ها نیز با هم پیوند داده می‌شوند و با استفاده از AVAIL به عنوان متغیر اشاره‌گر لیست، تشکیل یک لیست پیوندی را می‌دهد. از این رو به لیست حافظه آزاد لیست AVAIL نیز می‌گویند. چنین ساختمان داده‌ای را اغلب به صورت

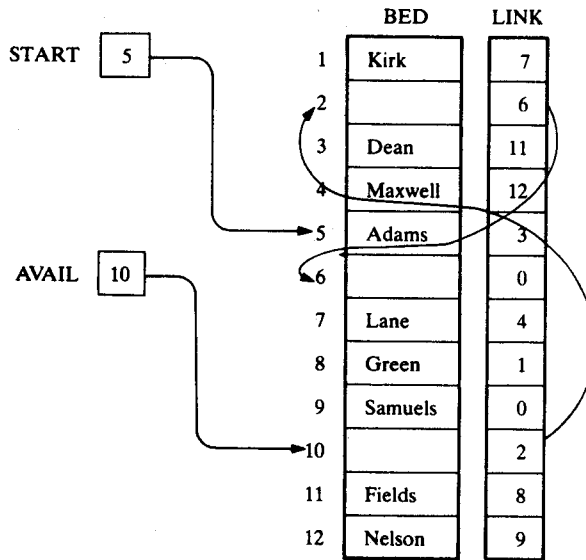
LIST(INFO, LINK, START, AVAIL)

نمایش می‌دهند.

مثال ۱۰-۵

فرض کنید لیست بیماران مثال ۵-۱ در آرایه‌های خطی BED و LINK ذخیره شده است طوری که بیمار تخت K ام در BED[K] جایگزین می‌شود. در آن صورت فضای موجود در آرایه خطی BED را می‌توان مانند شکل ۵-۹ پیوند داد. ملاحظه می‌کنید که BED[10] اولین تخت در دسترس، و BED[2]

تخت در دسترس بعدی و **BED[6]** آخرین تخت در دسترس است، بنابراین **BED[6]** اشاره گر پوچ فیلد اشاره گر بعدی اش را داراست یعنی $LINK[6] = 0$.



شکل ۵-۹

مثال ۵-۱۱

(الف) فضای در دسترس آرایه خطی **TEST** در شکل ۵-۵ را می توان مانند شکل ۵-۱۰ به هم پیوند داد. ملاحظه می کنید که هر یک از لیستهای **AIG** و **GEOM** می توانند از لیست **AVAIL** استفاده کنند. توجه دارید که $AVAIL = 9$ از این رو **TEST[9]** اولین گره آزاد در لیست **AVAIL** است چون $TEST[10], LINK[AVAIL] = LINK[9] = 10$ دومین گره آزاد در لیست **AVAIL** است و الی آخر.

(ب) فایل پرسنلی در شکل ۵-۷ را در نظر بگیرید. فضای در دسترس در آرایه خطی **NAME** را می توان مانند شکل ۵-۱۱ به هم پیوند داد. ملاحظه می کنید که لیست حافظه آزاد در **NAME** از **NAME[1], NAME[8], NAME[11], NAME[13], NAME[5]** تشکیل شده است. علاوه بر این ملاحظه می کنید که مقادارها در **LINK** به صورت همزمان فضای حافظه آزاد را برای آرایه های خطی **SSN, SEX** و **SALARY** لیست می کند.

(ج) فضای در دسترس در آرایه **CUSTOMER** شکل ۵-۶ را می توان مانند شکل ۵-۱۳ به هم پیوند

داد. تأکید می‌کنیم که هر یک از چهار لیست، می‌تواند از لیست AVAIL برای مشتری جدید استفاده کند.

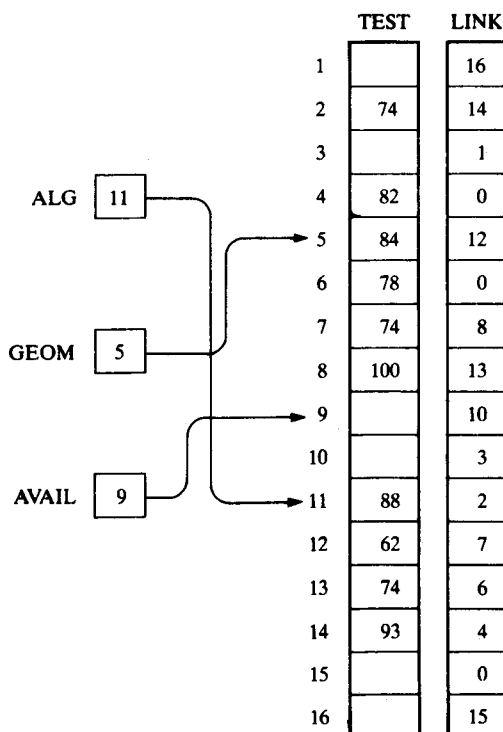
مثال ۱۲-۵

فرض کنید $LIST(INFO, LINK, START, AVAIL)$ برای $n = 10$ نگره فضای حافظه دارد. علاوه بر این فرض کنید LIST از ابتدا خالی است، شکل ۱۲-۵ مقادارهای LINK را به گونه‌ای نشان می‌دهد که لیست AVAIL از دنباله‌های

INFO[1], INFO[2], ..., INFO[10]

تشکیل شده است به عبارت دیگر لیست AVAIL از عناصر INFO با ترتیب معمول تشکیل شده است.

ملاحظه می‌کنید که چون لیست خالی است $START = NULL$.



شکل ۱۰-۵

	NAME	SSN	SEX	SALARY	LINK
1					0
2	Davis	192-38-7282	Female	22 800	12
3	Kelly	165-64-3351	Male	19 000	7
4	Green	175-56-2251	Male	27 200	14
5					1
6	Brown	178-52-1065	Female	14 700	9
7	Lewis	181-58-9939	Female	16 400	10
8					11
9	Cohen	177-44-4557	Male	19 000	2
10	Rubin	135-46-6262	Female	15 500	0
11					13
12	Evans	168-56-8113	Male	34 200	4
13					5
14	Harris	208-56-1654	Female	22 800	3

START 6

AVAIL 8

شکل ۵-۱۱

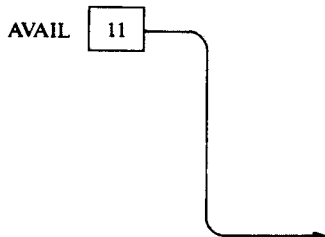
	INFO	LINK
1		2
2		3
3		4
4		5
5		6
6		7
7		8
8		9
9		10
10		0

START 0

AVAIL 1

شکل ۵-۱۲

BROKER		POINT	CUSTOMER		LINK
1	Bond	12	1	Vito	4
2	Kelly	3	2		16
3	Hall	0	3	Hunter	14
4	Nelson	9	4	Katz	0
			5		20
			6	Evans	0
			7		13
			8	Rogers	15
			9	Teller	10
			10	Jones	19
			11		18
			12	Grant	17
			13		0
			14	McBride	6
			15	Weston	0
			16		5
			17	Scott	1
			18		5
			19	Adams	8
			20		7



شکل ۱۳-۵

جمع‌آوری حافظه‌های بلااستفاده

فرض کنید بخاطر حذف یک گره از یک لیست یا حذف تمام لیست از یک برنامه می‌توان از فضای حافظه آن مجدداً استفاده کرد. واضح است که می‌خواهیم از فضای حافظه در کار بعدی استفاده کنیم. یک راه برای رسیدن به این منظور آن است که این فضا را بی‌درنگ در لیست حافظه آزاد اضافه کنیم. این همان کاری است که ما هنگام پیاده‌سازی لیستهای پیوندی به وسیله آرایه‌های خطی انجام می‌دهیم. با وجود این، این روش برای سیستم‌عامل یک کامپیوتر بسیار وقت‌گیر است که برای این منظور از روش دیگری نظیر روش زیر استفاده می‌شود.

سیستم عامل یک کامپیوتر می تواند به طور متناوب تمام فضای حاصل از حذف یک یا چند گره یا تمام لیست را درون لیست حافظه آزاد جمع آوری کند. هر روشی که این جمع آوری را انجام می دهد جمع آوری حافظه بلا استفاده یا جمع آوری زائده های کامپیوتری نام دارد. جمع آوری حافظه بلا استفاده معمولاً در دو مرحله انجام می شود. نخست کامپیوتر تمام لیست را پیمایش می کند خانه هایی از حافظه را که در حال حاضر مورد استفاده می باشند علامت می زند، آنگاه حافظه را پیمایش می کند و تمام فضای حافظه درون لیست حافظه آزاد را که برچسب نخورده اند علامت می زند. جمع آوری حافظه بلا استفاده می تواند زمانی انجام شود که تنها مقدار بسیار اندکی از حافظه آزاد موجود باشد یا هیچ حافظه ای در لیست حافظه آزاد باقی نمانده باشد یا وقتی که CPU بالاتکلیف (بیکار) است و وقت برای جمع آوری حافظه بلا استفاده در اختیار دارد. به بیان کلی تر، جمع آوری حافظه بلا استفاده از دید برنامه نویس پنهان است. بحث بیشتر درباره حافظه بلا استفاده خارج از حدود مطالب این کتاب است.

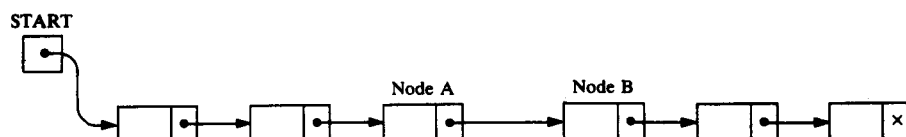
سرریزی Overflow و زیرریزی UnderFlow

گاهی اوقات نیاز است که اطلاعات جدید در یک ساختمان داده اضافه شود اما هیچ فضای آزاد در اختیار نداریم. یعنی لیست حافظه آزاد خالی است معمولاً به این وضعیت سرریزی می گویند. برنامه نویس می تواند با چاپ پیغام OVERFLOW با مسأله سرریزی برخورد کند. در چنین مواردی، برنامه نویس می تواند با افزودن حافظه به آرایه های مورد بررسی برنامه را اصلاح کند. ملاحظه می کنید که سرریزی در لیستهای پیوندی وقتی اتفاق می افتد که $AVAIL = NULL$ و خواسته باشیم یک عنصر جدید به لیست اضافه کنیم.

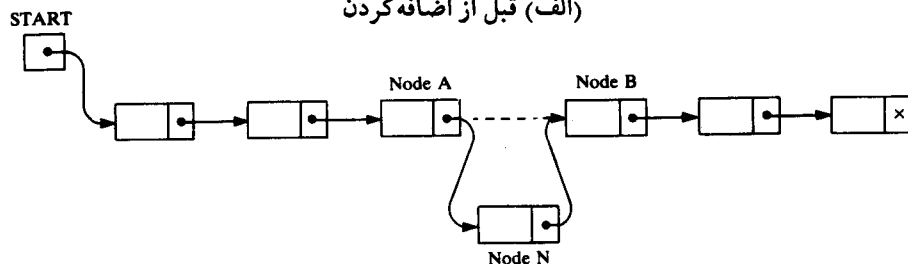
به طور مشابه، اصطلاح زیرریزی مربوط به وضعیتی است که خواسته باشیم اطلاعاتی را از یک ساختمان داده خالی حذف کنیم. برنامه نویس می تواند با چاپ پیغام $START = NULL$ مسأله زیرریزی را مورد توجه قرار دهد. ملاحظه می کنید که زیرریزی در لیستهای پیوندی وقتی اتفاق می افتد که $START = NULL$ و خواسته باشیم یک عنصر را از لیست حذف کنیم.

۵-۷ اضافه کردن گره در یک لیست پیوندی

فرض کنید LIST یک لیست پیوندی باشد که دارای گره های متوالی A و B به صورت نشان داده شده در شکل ۵-۱۴ (الف) است. فرض کنید گره N قرار است به این لیست اضافه شود و بین گره های A و B قرار گیرد. نمودار اضافه کردن این گره در شکل ۵-۱۴ (ب) نشان داده شده است.



(الف) قبل از اضافه کردن



(ب) بعد از اضافه کردن

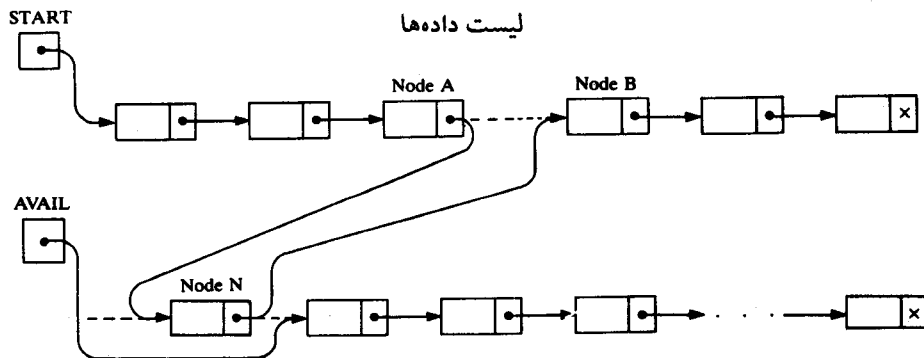
شکل ۵-۱۴

به بیان دیگر گره A اکنون به گره جدید N اشاره می‌کند و گره N به گره B اشاره می‌کند که A پیش از این به آن اشاره می‌کرد.

فرض کنید لیست پیوندی ما به صورت زیر در حافظه نگهداری می‌شود:

LIST(INFO, LINK, START, AVAIL)

شکل ۵-۱۴ در نظر نمی‌گیرد که فضای حافظه برای گره جدید N از لیست AVAIL گرفته می‌شود. بخصوص این که، جهت سهولت در پردازش، گره اول لیست AVAIL برای گره جدید N بکار گرفته می‌شود. بدین ترتیب نمودار دقیقتر چنین اضافه‌کردنی در شکل ۵-۱۵ ارائه شده است.



لیست حافظه آزاد

شکل ۵-۱۵

ملاحظه می‌کنید که سه فیلد اشاره‌گر به صورت زیر تغییر می‌کنند:

- (۱) فیلد اشاره‌گر بعدی گره A اکنون به گره جدید N اشاره می‌کند که قبلاً AVAIL به آن اشاره می‌کرد.
- (۲) AVAIL اکنون به گره دوم در مخزن حافظه آزاد اشاره می‌کند که قبلاً N به آن اشاره می‌کرد.
- (۳) فیلد اشاره‌گر بعدی گره N اکنون به گره B اشاره می‌کند که قبلاً A به آن اشاره می‌کرد. دو حالت خاص نیز وجود دارد. اگر گره جدید N اولین گره لیست باشد، آنگاه START به N اشاره خواهد کرد و اگر گره جدید N آخرین گره لیست باشد، آنگاه N شامل اشاره‌گر پوچ NULL POINTER خواهد بود.

مثال ۱۳-۵

(الف) شکل ۹-۵ یعنی، لیست الفبایی بیماران یک اتاق بیمارستان را در نظر بگیرید. فرض کنید Hughes بیمار پذیرفته شده در این اتاق باشد. ملاحظه می‌کنید که Hughes (i) روی تخت 10 خوابانده می‌شود که اولین تخت آزاد است. Hughes (ii) در لیست بین Green و Kirk اضافه می‌شود. سه تغییر در فیلدهای اشاره‌گر به صورت زیر است:

- ۱- $LINK[8] = 10$ اکنون Green به Hughes اشاره می‌کند.
- ۲- $LINK[10] = 1$ اکنون Hughes به Kirk اشاره می‌کند.
- ۳- $AVAIL = 2$ اکنون AVAIL به تخت آزاد بعدی اشاره می‌کند.

(ب) شکل ۱۳-۵ یعنی لیست مأموران فروش و مشتری‌های آنها را در نظر بگیرید. از آنجا که لیستهای مشتری‌ها مرتب شده نیستند، فرض می‌کنیم که هر مشتری جدید به آغاز آن لیست اضافه می‌شود.

فرض کنید Gordan یک مشتری جدید Kelly باشد. ملاحظه می‌کنید که

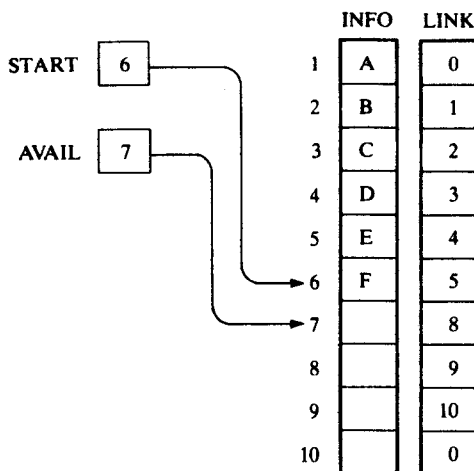
- (i) Gordan در $CUSTOMER[11]$ جایگزین می‌شود که اولین گره آزاد است.
- (ii) Gordan قبل از Hunter اضافه می‌شود که اولین مشتری قبلی Kelly است.

سه تغییر در فیلدهای اشاره‌گر به صورت زیر است:

- ۱- $POINT[2] = 11$ اکنون لیست به Gordan شروع می‌شود.
- ۲- $LINK[11] = 3$ اکنون Gordan به Hunter اشاره می‌کند.
- ۳- $AVAIL = 18$ اکنون AVAIL به گره آزاد بعدی اشاره می‌کند.

(ج) فرض کنید عناصر داده‌ای A, B, C, D, E و F در لیست خالی شکل ۱۲-۵ یکی پس از دیگری اضافه می‌شوند. مجدداً فرض کنید هر گره جدید در ابتدای لیست اضافه می‌شود. بنابراین پس از شش اضافه کردن، A به F، E به E، D به C، C به B، B به A اشاره می‌کند همچنین A حاوی اشاره‌گر پوچ یا صفر است، علاوه بر این $AVAIL = 7$ اولین گره در دسترس پس از شش

اضافه کردن و $START = 6$ مکان اولین گره یعنی F است. شکل ۵-۱۶ لیست جدید (که در آن $n = 10$) را نشان می‌دهد.



شکل ۵-۱۶

الگوریتم‌های اضافه کردن گره

الگوریتم‌هایی که گره‌ها را به درون لیست پیوندی اضافه می‌کنند در وضعیت‌ها و شرایط متعدد می‌توانند مطرح شوند. ما در اینجا سه الگوریتم از این نوع را مورد بحث و بررسی قرار می‌دهیم. در الگوریتم اول یک گره به ابتدای لیست اضافه می‌شود، الگوریتم دوم گره را پس از گره‌ای که در مکان معینی قرار دارد اضافه می‌کند و الگوریتم سوم یک گره را به لیست مرتب شده اضافه می‌کند. در تمام این الگوریتم‌ها فرض می‌شود لیست پیوندی به صورت $LIST(INFO, LINK, START, AVAIL)$ در حافظه ذخیره شده است و متغیر $ITEM$ شامل اطلاعات جدیدی است که قرار است به لیست اضافه شود. از آنجا که این الگوریتم‌ها از یک گره لیست $AVAIL$ استفاده می‌کنند، از این‌رو تمام الگوریتم‌ها حاوی مراحل زیر است:

- (الف) تحقیق می‌کند که آیا فضای آزاد در لیست $AVAIL$ وجود دارد یا خیر. اگر جواب منفی است یعنی اگر $AVAIL = NULL$ آنگاه الگوریتم پیام $OVERFLOW$ را چاپ می‌کند.
- (ب) گره اول را از لیست $AVAIL$ حذف می‌کند. با استفاده از متغیر NEW مکان گره جدید را نگه می‌دارد.

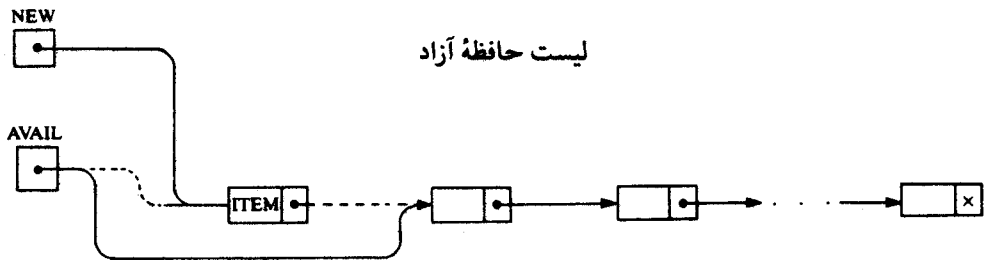
این مرحله را می توان با جفت دستور جایگزینی زیر پیاده سازی کرد:

$NEW := AVAIL, \quad AVAIL := LINK[AVAIL]$

(ج) اطلاعات جدید را در گره جدید کپی می کند. به بیان دیگر:

$INFO[NEW] := ITEM$

در شکل ۵-۱۷ نمودار دو مرحله آخر رسم شده است:



شکل ۵-۱۷

اضافه کردن یک گره به ابتدای لیست

فرض کنید لیست پیوندی ما الزاماً مرتب شده نیست و دلیلی وجود ندارد که یک گره جدید در محل خاصی از لیست اضافه شود. آنگاه بهترین محل برای اضافه کردن گره، ابتدای لیست است. الگوریتمی که این کار را انجام می دهد به شرح زیر است:

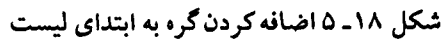
Algorithm 5.4: **INSFIRST**(INFO, LINK, START, AVAIL, ITEM)

This algorithm inserts ITEM as the first node in the list.

1. [OVERFLOW?] If $AVAIL = \text{NULL}$, then: Write: OVERFLOW, and Exit.
2. [Remove first node from AVAIL list.]
Set $NEW := AVAIL$ and $AVAIL := LINK[AVAIL]$.
3. Set $INFO[NEW] := ITEM$. [Copies new data into new node.]
4. Set $LINK[NEW] := START$. [New node now points to original first node.]
5. Set $START := NEW$. [Changes START so it points to the new node.]
6. Exit.

مرحله ۱ تا ۳ قبلاً بررسی شده است و نمودار مرحله های ۲ و ۳ در شکل ۵-۱۷ رسم شده است.

نمودار مرحله های ۴ و ۵ در شکل ۵-۱۸ ارائه شده است.



لیست آزمونهای شکل ۱۰-۵ را در نظر بگیرید. فرض کنید قرار است نمرهٔ آزمون 75 را به ابتدای لیست هندسه GEOM اضافه کنیم. الگوریتم 5.4 را شبیه‌سازی می‌کنیم. ملاحظه کنید که

شکل ۱۹-۵ این ساختمان داده را پس از اضافه کردن 75 به لیست هندسه GEOM نشان می دهد. ملاحظه می کنید که تنها سه اشاره گر GEOM، AVAIL و [9]LINK تغییر کرده اند.

1. Since $AVAIL \neq NULL$, control is transferred to Step 2.
2. $NEW = 9$, then $AVAIL = LINK[9] = 10$.
3. $TEST[9] = 75$.
4. $LINK[9] = 5$.
5. $GEOM = 9$.
6. Exit.

شکل ۱۹-۵

اضافه کردن یک گره پس از یک گره معلوم

فرض کنید مقدار LOC داده شده است که در آن LOC یا مکان LIST گره A در لیست پیوندی است یا $LOC = NULL$. در زیرالگوریتمی ارائه شده است که ITEM را به درون لیست LIST به صورتی اضافه می کند که ITEM بعد از گره A قرار می گیرد یا وقتی که $LOC = NULL$ ، ITEM گره اول باشد. فرض کنید N نمایش گره جدید باشد که مکان آن NEW است. اگر $LOC = NULL$ آنگاه N به عنوان گره اول مانند الگوریتم 5.4 به لیست LIST اضافه می شود. در غیر این صورت، همانگونه که در شکل ۱۵-۵ رسم شده است، با دستور جایگزینی

$$LINK[NEW] := LINK[LOC]$$

گره N را به گره B اشاره می دهیم. که در آغاز بعد از گره A است. اکنون با دستور جایگزینی

$$LINK[LOC] := NEW$$

گره A به گره جدید N اشاره می کند.

بیان رسمی این الگوریتم به صورت زیر است :

Algorithm 5.5: INSLOC(INFO, LINK, START, AVAIL, LOC, ITEM)

This algorithm inserts ITEM so that ITEM follows the node with location LOC or inserts ITEM as the first node when $LOC = NULL$.

1. [OVERFLOW?] If $AVAIL = NULL$, then: Write: OVERFLOW, and Exit.
2. [Remove first node from AVAIL list.]
Set $NEW := AVAIL$ and $AVAIL := LINK[AVAIL]$.
3. Set $INFO[NEW] := ITEM$. [Copies new data into new node.]
4. If $LOC = NULL$, then: [Insert as first node.]
Set $LINK[NEW] := START$ and $START := NEW$.
Else: [Insert after node with location LOC.]
Set $LINK[NEW] := LINK[LOC]$ and $LINK[LOC] := NEW$.
[End of If structure.]
5. Exit.

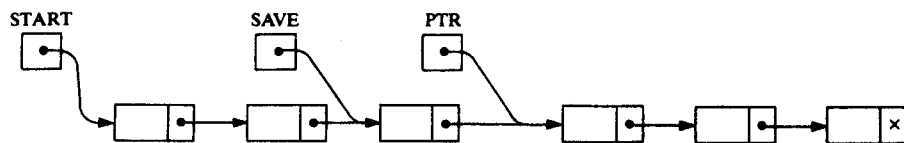
اضافه کردن گره در یک لیست پیوندی مرتب شده

فرض کنید خواسته باشیم ITEM را به لیست پیوندی مرتب شده LIST اضافه کنیم. آنگاه ITEM باید بین گره های A و B اضافه شود به گونه ای که

$$INFO(A) < ITEM \leq INFO(B)$$

در زیر، زیربرنامه Procedure ای ارائه شده است که مکان LOC گره A را پیدا می کند یعنی مکان LOC

آخرین گره لیست LIST را پیدا می‌کند که مقدار آن کوچکتر از ITEM است. با استفاده از متغیر اشاره گر PTR لیست را پیمایش کنید و ITEM را با INFO[PTR] هر گره مقایسه کنید. هنگام پیمایش مکان گره قبلی را با استفاده از متغیر اشاره گر SAVE به صورتی که در شکل ۲۰-۵ آمده است نگهدارید.



شکل ۲۰-۵

بنابراین PTR و SAVE با دستورهای جایگزینی

$SAVE := PTR$ و $PTR := LINK[PTR]$

تازه می‌شوند. عمل پیمایش تا زمانی که $INFO[PTR] > ITEM$ ادامه می‌یابد. به بیان دیگر به محض اینکه $ITEM \leq INFO[PTR]$ ، پیمایش متوقف می‌شود. آنگاه PTR به گره B اشاره می‌کند، از این رو SAVE حاوی مکان گره A خواهد بود.

بیان رسمی این Procedure در زیر ارائه شده است. در حالتی که لیست خالی است یا $ITEM < INFO[START]$ ، در نتیجه $LOC = NULL$ ، مستقلاً بررسی می‌شوند، چون از متغیر SAVE استفاده نمی‌کند.

Procedure 5.6: FINDA(INFO, LINK, START, ITEM, LOC)

This procedure finds the location LOC of the last node in a sorted list such that $INFO[LOC] < ITEM$, or sets $LOC = NULL$.

1. [List empty?] If $START = NULL$, then: Set $LOC := NULL$, and Return.
2. [Special case?] If $ITEM < INFO[START]$, then: Set $LOC := NULL$, and Return.
3. Set $SAVE := START$ and $PTR := LINK[START]$. [Initializes pointers.]
4. Repeat Steps 5 and 6 while $PTR \neq NULL$.
5. If $ITEM < INFO[PTR]$, then:
Set $LOC := SAVE$, and Return.
[End of If structure.]
6. Set $SAVE := PTR$ and $PTR := LINK[PTR]$. [Updates pointers.]
[End of Step 4 loop.]
7. Set $LOC := SAVE$.
8. Return.

اکنون تمام مؤلفه‌های مورد نیاز را برای ارائه یک الگوریتم جهت اضافه کردن ITEM در لیست

پیوندی در اختیار داریم. سادگی این الگوریتم از این واقعیت ناشی می شود که در آن از دو زیربرنامه Procedure قبلی استفاده شده است.

Algorithm 5.7: INSSRT(INFO, LINK, START, AVAIL, ITEM)

This algorithm inserts ITEM into a sorted linked list.

1. [Use Procedure 5.6 to find the location of the node preceding ITEM.]
Call FINDA(INFO, LINK, START, ITEM, LOC).
2. [Use Algorithm 5.5 to insert ITEM after the node with location LOC.]
Call INSLOC(INFO, LINK, START, AVAIL, LOC, ITEM).
3. Exit.

مثال ۵-۱۵

لیست الفبایی بیماران شکل ۹-۵ را در نظر بگیرید. فرض کنید Jones قرار است به لیست بیماران اضافه شود. الگوریتم 5.7 را شبیه سازی می کنیم یا به بیان خصوصی تر زیر برنامه 5.6 Procedure و آنگاه الگوریتم 5.5 را شبیه سازی می کنیم. ملاحظه می کنید که $INFO = BED$ و $ITEM = Jones$.

FINDA(BED, LINK, START, ITEM, LOC)

(الف)

1. Since $START \neq NULL$, control is transferred to Step 2.
2. Since $BED[5] = Adams < Jones$, control is transferred to Step 3.
3. $SAVE = 5$ and $PTR = LINK[5] = 3$.
4. Steps 5 and 6 are repeated as follows:
 - (a) $BED[3] = Dean < Jones$, so $SAVE = 3$ and $PTR = LINK[3] = 11$.
 - (b) $BED[11] = Fields < Jones$, so $SAVE = 11$ and $PTR = LINK[11] = 8$.
 - (c) $BED[8] = Green < Jones$, so $SAVE = 8$ and $PTR = LINK[8] = 1$.
 - (d) Since $BED[1] = Kirk > Jones$, we have:
 $LOC = SAVE = 8$ and Return.

INSLOC(BED, LINK, START, AVAIL, LOC, ITEM) [Here $LOC = 8$.]

(ب)

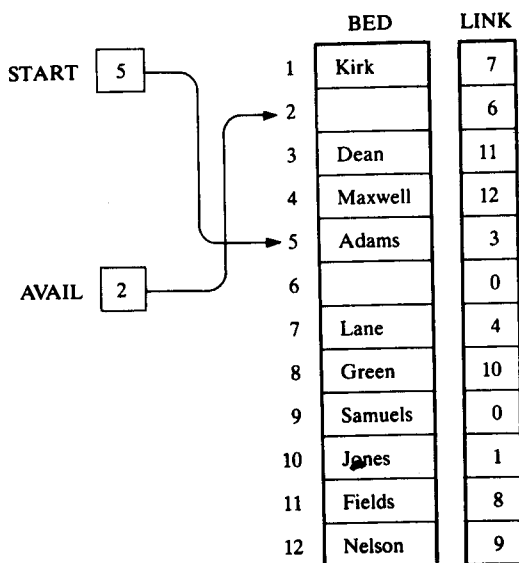
1. Since $AVAIL \neq NULL$, control is transferred to Step 2.
2. $NEW = 10$ and $AVAIL = LINK[10] = 2$.
3. $BED[10] = Jones$.
4. Since $LOC \neq NULL$ we have:
 $LINK[10] = LINK[8] = 1$ and $LINK[8] = NEW = 10$.
5. Exit.

شکل ۲۱-۵ این ساختمان داده را پس از اضافه شدن Jones به لیست بیماران نشان می دهد. تأکید می کنیم که تنها سه اشاره گر $AVAIL$, $LINK[10]$ و $LINK[8]$ تغییر کرده اند.

کپی کردن

فرض کنید خواسته باشیم تمام یا قسمت هایی از یک لیست معلوم را در لیست دیگری کپی کنیم یا لیست جدیدی ایجاد کنیم که از اتصال دو لیست داده شده بوجود آید. این کار را می توان با تعریف یک

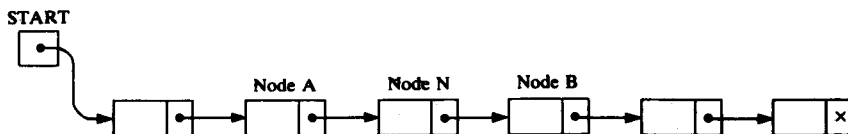
لیست خالی و آنگاه اضافه کردن یک به یک عناصر موردنظر به لیست، به کمک الگوریتمهای متعدد اضافه کردن انجام داد. یک لیست خالی تنها با انتخاب یک نام متغیر یا اشاره گر برای لیست نظیر NAME تعریف می شود و آنگاه قرار می دهیم $NAME := NULL$. این الگوریتمها در بخش مسائل ارائه شده است.



شکل ۵-۲۱

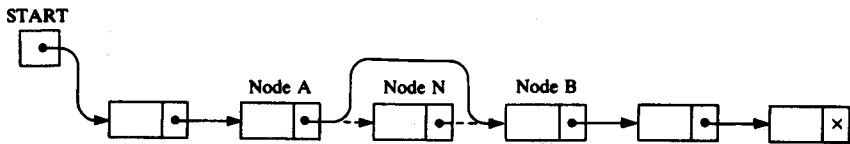
۸-۵ حذف گره از یک لیست پیوندی

فرض کنید لیست LIST یک لیست پیوندی باشد که همانند شکل ۵-۲۲ (الف) گره N آن بین دو گره A و B است.



شکل ۵-۲۲ (الف)

فرض کنید گره N را می خواهیم از لیست پیوندی حذف کنیم. نمودار چنین عمل حذفی، در شکل ۵-۲۲ (ب) آمده است.



شکل ۵-۲۲ (ب)

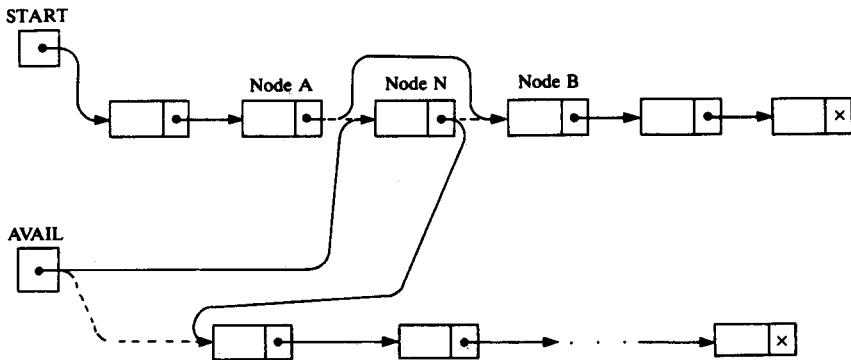
عمل حذف زمانی انجام می‌شود که فیلد اشاره‌گر بعدی گره A به گونه‌ای تغییر کند که به گره B اشاره کند. بنابراین هنگام انجام عمل حذف، باید آدرس گره‌ای را که گره حذف شده به آن اشاره می‌کرد در جایی نگهداریم.

فرض کنید لیست پیوندی به صورت زیر در حافظه نگهداری شده است:

LIST(INFO, LINK, START, AVAIL)

شکل ۵-۲۲ این واقعیت را که حذف گره N از لیست، حافظه آن را بی‌درنگ به لیست AVAIL برمی‌گرداند در نظر نمی‌گیرد. به‌ویژه این که، برای پردازش ساده‌تر، به ابتدای لیست AVAIL برگردانده می‌شود. بنابراین نمودار دقیق‌تر چنین عمل حذفی در شکل ۵-۲۳ آمده است.

لیست داده‌ها



لیست حافظه آزاد

شکل ۵-۲۳

ملاحظه می‌کنید که سه فیلد اشاره‌گر به صورت زیر تغییر کرده‌اند:

(۱) فیلد اشاره‌گر بعدی گره A اکنون به گره B اشاره می‌کند که قبلاً به گره N اشاره می‌کرد.

(۲) فیلد اشاره‌گر بعدی گره N اکنون به اولین گره اصلی مخزن حافظه اشاره می‌کند که قبلاً به گره

AVAIL اشاره می‌کرد.

(۳) AVAIL اکنون به گره حذف شده N اشاره می‌کند.

همچنین دو حالت خاص وجود دارد. اگر گره حذف شده N اولین گره لیست باشد، آنگاه START به گره B اشاره می‌کند و اگر گره حذف شده N آخرین گره لیست باشد. آنگاه گره A حاوی اشاره گر NULL خواهد بود.

مثال ۱۶-۵

(الف) شکل ۲۱-۵، لیست بیماران در اتاق بیمارستان را در نظر بگیرید. فرض کنید بیمار Green از بیمارستان مرخص شده است از این رو تخت [8]BED اکنون خالی است، آنگاه برای نگهداری لیست پیوندی، باید سه تغییر زیر در فیلد اشاره گر داده شود:

$$\text{LINK}[11] = 10 \quad \text{LINK}[8] = 2 \quad \text{AVAIL} = 8$$

با تغییر اول، Fields که در آغاز قبل از Green بود اکنون به Jones اشاره می‌کند که در آغاز بعد از Green قرار داشت. تغییر دوم و سوم تخت خالی جدید را به لیست AVAIL اضافه می‌کند. تأکید می‌کنیم که قبل از عمل حذف باید گره [11]BED را پیدا کنیم که در آغاز به گره حذف شده [8]BED اشاره می‌کرد. (ب) شکل ۱۳-۵ را در نظر بگیرید که لیست مأموران فروش و مشتری آنها را ارائه می‌دهد. فرض کنید Teller اولین مشتری Nelson، از لیست مشتری‌ها حذف شده است. آنگاه برای نگهداری لیستهای پیوندی باید سه تغییر زیر در فیلد اشاره گرها داده شود:

$$\text{POINT}[4] = 10 \quad \text{LINK}[9] = 11 \quad \text{AVAIL} = 9$$

با تغییر اول، Nelson اکنون به دومین مشتری او یعنی Jones اشاره می‌کند. تغییر دوم و سوم گره خالی جدید را به لیست AVAIL اضافه می‌کند. (ج) فرض کنید عناصر داده‌ای B، E و C یکی پس از دیگری از لیست شکل ۱۶-۵ حذف شده‌اند. لیست جدید در شکل ۲۴-۵ رسم شده است.

ملاحظه می‌کنید که اکنون سه گره در دسترس اول به قرار زیرند:

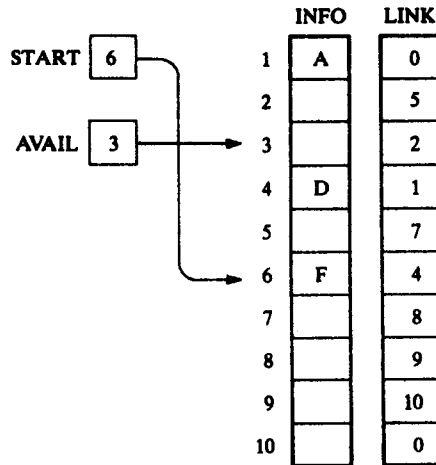
INFO[3] که در آغاز حاوی C است.

INFO[2] که در آغاز حاوی B است.

INFO[5] که در آغاز حاوی E است.

ملاحظه می‌کنید که ترتیب گره‌ها در لیست AVAIL عکس ترتیبی است که در آن گره‌ها از لیست

حذف شده‌اند.



شکل ۵-۲۴

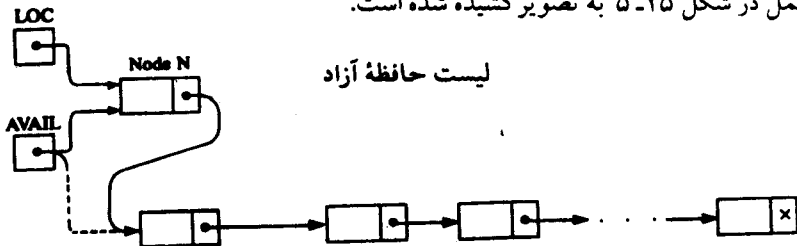
الگوریتمهای حذف گره‌ها

الگوریتم‌هایی که گره‌هایی را از لیستهای پیوندی حذف می‌کنند در وضعیت‌ها و شرایط مختلف می‌توانند مطرح شوند. الگوریتم اول، گره بعد از یک گره داده شده را حذف می‌کند. الگوریتم دوم، گره‌ای با اطلاعات معلوم **ITEM** را حذف می‌کند. تمام این الگوریتمها فرض می‌کنند که لیست پیوندی به صورت **LIST(INFO, LINK, START, AVAIL)** در حافظه است.

تمام الگوریتم‌های حذف گره‌ها فضای حافظه گره حذف‌شده **N** را به ابتدای لیست **AVAIL** برمی‌گرداند. بنابراین، تمام این الگوریتم‌ها شامل جفت دستور جایگزینی زیر هستند که در آنها **LOC** مکان گره حذف‌شده **N** است:

LINK[LOC] := AVAIL و **AVAIL := LOC**

این دو عمل در شکل ۵-۲۵ به تصویر کشیده شده است.



شکل ۵-۲۵ **LINK[LOC] := AVAIL** و **AVAIL := LOC**

در بعضی از این الگوریتم‌ها می‌خواهیم گره اول یا گره آخر از لیست حذف شود. الگوریتمی که این کار را انجام می‌دهد باید تحقیق کند که آیا در لیست گره‌ای وجود دارد یا خیر. در صورت منفی بودن جواب، اگر $START = NULL$ آنگاه الگوریتم پیغام UNDERFLOW را چاپ خواهد کرد.

حذف گره‌ای که بعد از یک گره معلوم قرار دارد

فرض کنید $LIST$ یک لیست پیوندی در حافظه باشد. فرض کنید LOC مکان گره N در $LIST$ داده شده است. علاوه بر این فرض کنید مکان $LOCP$ گره قبل از N یا وقتی N گره اول است $LOCP = NULL$ داده شده است. الگوریتم زیر N را از لیست حذف می‌کند.

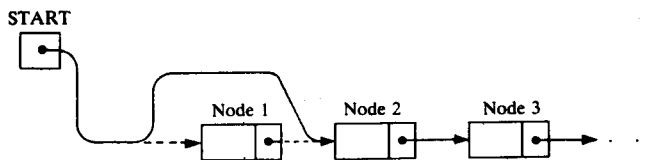
Algorithm 5.8: DEL(INFO, LINK, START, AVAIL, LOC, LOCP)
 This algorithm deletes the node N with location LOC . $LOCP$ is the location of the node which precedes N or, when N is the first node, $LOCP = NULL$.

1. If $LOCP = NULL$, then:
 Set $START := LINK[START]$. [Deletes first node.]
 Else:
 Set $LINK[LOCP] := LINK[LOC]$. [Deletes node N .]
 [End of If structure.]
2. [Return deleted node to the AVAIL list.]
 Set $LINK[LOC] := AVAIL$ and $AVAIL := LOC$.
3. Exit.

شکل ۲۶-۵ نمودار جایگزینی

$START := LINK[START]$

را نشان می‌دهد که به صورت مؤثری اولین گره را از لیست حذف می‌کند.



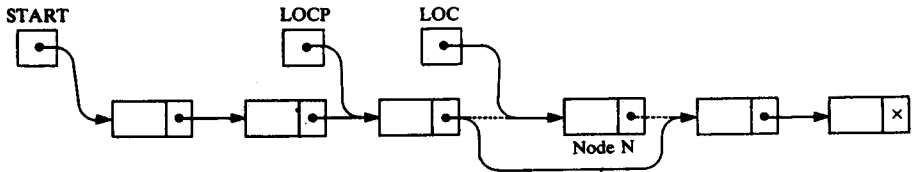
شکل ۲۶-۵ $START := LINK[START]$

این نمودار شامل حالتی است که N گره اول است.

شکل ۲۷-۵ نمودار جایگزینی

$LINK[LOCP] := LINK[LOC]$

را نشان می‌دهد که به صورت مؤثری گره N را در حالتی که گره اول نیست حذف می‌کند.



شکل ۲۷-۵ LINK[LOCP] := LINK[LOC]

سادگی این الگوریتم از این واقعیت ناشی می شود که پیشتر **LOCP**، مکان گره ای که قبل از گره **N** است داده شده است. در بسیاری از کاربردها، نخست باید **LOCP** را پیدا کنیم.

حذف یک گره با اطلاعات معلوم ITEM

فرض کنید **LIST** یک لیست پیوندی در حافظه باشد. فرض کنید اطلاعات **ITEM** داده شده است و می خواهیم **N** اولین گره **LIST** را حذف کنیم که حاوی اطلاعات **ITEM** است. اگر **ITEM** یک مقدار کلیدی باشد. آنگاه تنها یک گره شامل اطلاعات **ITEM** است. یادآوری می کنیم که برای حذف **N** از لیست لازم است مکان گره قبل از **N** را بدانیم. بنابراین نخست یک زیر برنامه **Procedure** ارائه می دهیم که **LOC** مکان گره حاوی **ITEM** و **LOCP** مکان گره قبل از گره **N** را پیدا می کند. اگر **N** اولین گره لیست باشد، قرار می دهیم **LOCP = NULL** و اگر **ITEM** در لیست **LIST** وجود نداشته باشد قرار می دهیم **LOC = NULL** این زیر برنامه **Procedure** شبیه زیر برنامه 5.6 **Procedrue** است.

با استفاده از متغیر اشاره گر **PTR** و مقایسه **ITEM** با **INFO[PTR]** هر گره لیست را پیمایش کنید. هنگام پیمایش، مکان گره قبلی با استفاده از متغیر اشاره گر **SAVE** به صورتی که در شکل ۲۰-۵ رسم شده است نگهدارید. بدین ترتیب **SAVE** و **PTR** با دستورهای جایگزینی زیر

SAVE := PTR و **PTR := LINK[PTR]**

تازه می شوند. پیمایش تا آنجا ادامه پیدا می کند که **INFO[PTR] ≠ ITEM** یا به بیان دیگر هرگاه **ITEM = INFO[PTR]** باشد پیمایش متوقف می شود. آنگاه **PTR** شامل **LOC** مکان گره **N** و **SAVE** شامل **LOCP** مکان گره قبل از **N** است.

بیان رسمی این **Procedure** به صورت زیر است. حالتی که لیست خالی است یا **INFO[START] = ITEM** (یعنی گره **N** اولین گره لیست است) مستقلاً مورد بررسی قرار می گیرد چون از متغیر **SAVE** استفاده نمی کند.

Procedure 5.9: FINDB(INFO, LINK, START, ITEM, LOC, LOCP)

This procedure finds the location LOC of the first node N which contains ITEM and the location LOCP of the node preceding N. If ITEM does not appear in the list, then the procedure sets LOC = NULL; and if ITEM appears in the first node, then it sets LOCP = NULL.

1. [List empty?] If START = NULL, then:
Set LOC := NULL and LOCP := NULL, and Return.
[End of If structure.]
2. [ITEM in first node?] If INFO[START] = ITEM, then:
Set LOC := START and LOCP = NULL, and Return.
[End of If structure.]
3. Set SAVE := START and PTR := LINK[START]. [Initializes pointers.]
4. Repeat Steps 5 and 6 while PTR ≠ NULL.
5. If INFO[PTR] = ITEM, then:
Set LOC := PTR and LOCP := SAVE, and Return.
[End of If structure.]
6. Set SAVE := PTR and PTR := LINK[PTR]. [Updates pointers.]
[End of Step 4 loop.]
7. Set LOC := NULL. [Search unsuccessful.]
8. Return.

اکنون به راحتی می‌توانیم الگوریتمی ارائه دهیم که N گره اول را از لیست پیوندی‌ای که شامل اطلاعات معلوم ITEM است حذف کند. سهولت این الگوریتم از این واقعیت ناشی می‌شود که کار پیدا کردن مکان N و مکان گره قبل از آن قبلاً در زیر برنامه Procedure 5.9 انجام شده است.

Algorithm 5.10: DELETE(INFO, LINK, START, AVAIL, ITEM)

This algorithm deletes from a linked list the first node N which contains the given ITEM of information.

1. [Use Procedure 5.9 to find the location of N and its preceding node.]
Call FINDB(INFO, LINK, START, ITEM, LOC, LOCP)
2. If LOC = NULL, then: Write: ITEM not in list, and Exit.
3. [Delete node.]
If LOCP = NULL, then:
Set START := LINK[START]. [Deletes first node.]
Else:
Set LINK[LOCP] := LINK[LOC].
[End of If structure.]
4. [Return deleted node to the AVAIL list.]
Set LINK[LOC] := AVAIL and AVAIL := LOC.
5. Exit.

توجه کنید: دانشجو ممکن است به این نکته توجه کرده باشد که مراحل ۳ و ۴ در الگوریتم 5.10 قبلاً در الگوریتم 5.8 وجود داشته است. به بیان دیگر می‌توانیم دستور CALL زیر را جایگزین این مراحل کنیم:

این کار با سبک ماجولاریتی یا پیمانه‌ای در برنامه‌نویسی سازگاری دارد.

مثال ۵-۱۷

لیست بیماران شکل ۵-۲۱ را در نظر بگیرید. فرض کنید بیماری به نام Green از بیمارستان مرخص شده است. زیر برنامه 5.9 Procedure را شبیه‌سازی می‌کنیم تا LOC مکان این بیمار یعنی Green و LOCP مکان بیمار قبل از Green را پیدا کند. بدنبال آن الگوریتم 5.10 را شبیه‌سازی می‌کنیم تا Green را از لیست حذف کند. در اینجا $5 = \text{START}$, $\text{INFO} = \text{BED}$, $\text{ITEM} = \text{Green}$ و $\text{AVAIL} = 2$.

		BED	LINK	
START	5	1	Kirk	7
		2		6
		3	Dean	11
		4	Maxwell	12
		5	Adams	3
AVAIL	8	6		0
		7	Lane	4
		8		2
		9	Samuels	0
		10	Jones	1
		11	Fields	10
		12	Nelson	9

شکل ۵-۲۸

(الف)

FINDB(BED, LINK, START, ITEM, LOC, LOCP)

1. Since $\text{START} \neq \text{NULL}$, control is transferred to Step 2.
2. Since $\text{BED}[5] = \text{Adams} \neq \text{Green}$, control is transferred to Step 3.
3. $\text{SAVE} = 5$ and $\text{PTR} = \text{LINK}[5] = 3$.
4. Steps 5 and 6 are repeated as follows:
 - (a) $\text{BED}[3] = \text{Dean} \neq \text{Green}$, so $\text{SAVE} = 3$ and $\text{PTR} = \text{LINK}[3] = 11$.
 - (b) $\text{BED}[11] = \text{Fields} \neq \text{Green}$, so $\text{SAVE} = 11$ and $\text{PTR} = \text{LINK}[11] = 8$.
 - (c) $\text{BED}[8] = \text{Green}$, so we have:
 $\text{LOC} = \text{PTR} = 8$ and $\text{LOCP} = \text{SAVE} = 11$, and Return.

DELLOC(BED, LINK, START, AVAIL, ITEM)

(ب)

1. Call FINDB(BED, LINK, START, ITEM, LOC, LOCP). [Hence LOC = 8 and LOCP = 11.]
2. Since LOC \neq NULL, control is transferred to Step 3.
3. Since LOCP \neq NULL, we have:
LINK[11] = LINK[8] = 10.
4. LINK[8] = 2 and AVAIL = 8.
5. Exit.

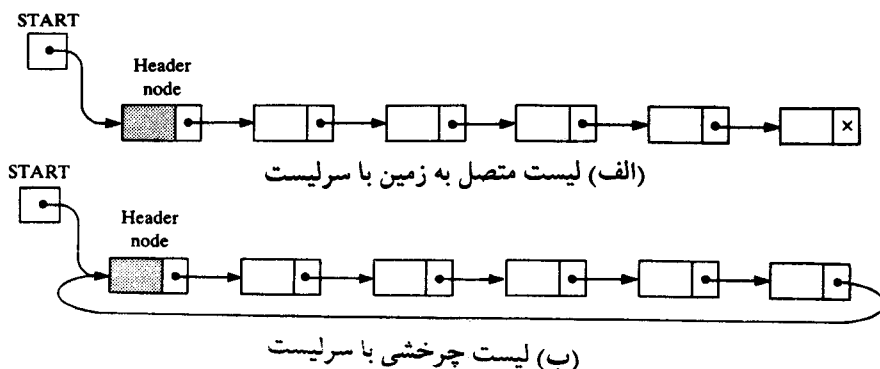
شکل ۵-۲۸ این ساختمان داده را پس از حذف Green از لیست بیماران نشان می‌دهد. تأکید می‌کنیم که تنها سه اشاره‌گر LINK[8], LINK[11] و AVAIL تغییر می‌کنند.

۹-۵ لیست پیوندی با سرلیست

یک لیست پیوندی با سرلیست یک لیست پیوندی است که همیشه دارای یک گره خاص موسوم به سرگره Header در ابتدای لیست است. در زیر دو نوع لیست دارای سرلیست که زیاد مورد استفاده قرار می‌گیرند ارائه می‌شود:

- (۱) لیست متصل به زمین با سرلیست، یک لیست دارای سرگره است که آخرین گره آن حاوی اشاره‌گر پوچ است. اصطلاح متصل به زمین از این واقعیت ناشی شده است که بسیاری از متن‌ها از نماد اتصال به زمین جریان الکتریکی برای بیان اشاره‌گر پوچ استفاده می‌کنند.
- (۲) یک لیست چرخشی یا حلقوی با سرلیست، یک لیست دارای سرگره است که آخرین گره آن به سرگره لیست اشاره می‌کند.

شکل ۵-۲۹ نمودارهای این لیستهای دارای سرلیست را نشان می‌دهد. لیستهای دارای سرلیست همیشه چرخشی هستند مگر آن که خلاف آن به صورت صریح یا ضمنی بیان گردد. بنابراین در چنین مواردی سرگره نیز به عنوان نگهبانی که مبین پایان لیست است عمل می‌کند.



شکل ۵-۲۹

ملاحظه می‌کنید که اشاره گر لیست START همیشه به سرگروه اشاره می‌کند. بنابراین $LINK[START] = NULL$ مبین آن است که لیست متصل به زمین دارای سرلیست خالی است و $LINK[START] = START$ بیانگر آن است که لیست چرخشی دارای سرلیست خالی است. اگرچه داده‌هایمان به وسیله لیست‌های دارای سرلیست در حافظه ذخیره می‌شود، با وجود این لیست AVAIL همیشه به صورت یک لیست پیوندی معمولی نگهداری می‌شود.

مثال ۱۸-۵

فایل پرسنلی شکل ۱۱-۵ را در نظر بگیرید. داده‌ها را می‌توان به صورت یک لیست دارای سرلیست مانند شکل ۳۰-۵ سازمان داد. ملاحظه می‌کنید که $LOC = 5$ اکنون مکان سر رکورد است. بنابراین، $START = 5$ و چون Rubin آخرین کارمند است، $LINK[10] = 5$. سر رکورد را می‌توان برای ذخیره اطلاعات تقریباً تمام فایل نیز بکار گرفت. برای مثال، فرض می‌کنیم $SSN[5] = 9$ بیانگر تعداد کارمندان و $SALARY[5] = 191\ 600$ بیانگر حقوق کل پرداخت شده به کارمندان باشد.

	NAME	SSN	SEX	SALARY	LINK
1					0
2	Davis	192-38-7282	Female	22 800	12
3	Kelly	165-64-3351	Male	19 000	7
4	Green	175-56-2251	Male	27 200	14
5		009		191 600	6
6	Brown	178-52-1065	Female	14 700	9
7	Lewis	181-58-9939	Female	16 400	10
8					11
9	Cohen	177-44-4557	Male	19 000	2
10	Rubin	135-46-6262	Female	15 500	5
11					13
12	Evans	168-56-8113	Male	34 200	4
13					i
14	Harris	208-56-1654	Female	22 800	3

START
5

AVAIL
8

اصطلاح "گره" به تنهایی هنگامی که با لیست دارای سرلیست بکار گرفته شود اشاره به گره معمولی دارد نه سرگره. بدین ترتیب گره اول در یک لیست دارای سرلیست، گره‌ای است که بعد از سرگره قرار می‌گیرد و مکان گره اول $LINK[START]$ است نه $START$ به صورتی که با لیستهای پیوندی معمولی بکار گرفته می‌شد.

الگوریتم 5.11 که از یک متغیر اشاره گر PTR برای پیمایش یک لیست چرخشی با سرلیست استفاده می‌کند ذاتاً همان الگوریتم 5.1 است که یک لیست پیوندی معمولی را پیمایش می‌کند. اما اکنون این تفاوت وجود دارد که الگوریتم (۱) با $PTR = LINK[START]$ شروع می‌شود نه با $PTR = START$ و (۲) با $PTR = START$ به پایان می‌رسد نه با $PTR = NULL$.

لیستهای چرخشی دارای سرلیست اغلب به جای لیستهای پیوندی معمولی بکار گرفته می‌شوند چون اغلب با استفاده از لیستهای دارای سرلیست بهتر و ساده‌تر بیان شده و پیاده‌سازی می‌شوند. این مطلب از دو خاصیت زیر از لیستهای چرخشی دارای سرلیست ناشی می‌شود:

- (۱) اشاره گر پوچ مورد استفاده قرار نمی‌گیرد و از این رو تمام اشاره‌گرها دارای آدرس مجاز هستند.
- (۲) هر گره (معمولی) یک گره پیشین دارد از این رو گره اول نمی‌تواند نیازمند حالت خاص باشد. مثال بعدی فایده این دو خاصیت را بیان می‌کند.

Algorithm 5.11: (Traversing a Circular Header List) Let LIST be a circular header list in memory. This algorithm traverses LIST, applying an operation PROCESS to each node of LIST.

1. Set $PTR := LINK[START]$. [Initializes the pointer PTR.]
2. Repeat Steps 3 and 4 while $PTR \neq START$:
3. Apply PROCESS to $INFO[PTR]$.
4. Set $PTR := LINK[PTR]$. [PTR now points to the next node.]
- [End of Step 2 loop.]
5. Exit.

مثال ۱۹-۵

فرض کنید $LIST$ یک لیست پیوندی در حافظه باشد و $ITEM$ یعنی یک اطلاع خاص داده شده است.

(الف) الگوریتم 5.2، LOC مکان گره اول در $LIST$ را پیدا می‌کند که شامل $ITEM$ است مشروط بر این که $LIST$ یک لیست پیوندی معمولی باشد. الگوریتم زیر از این گونه الگوریتم است که در آن $LIST$ یک لیست چرخشی با سرلیست است.

Algorithm 5.12: SRCHHL(INFO, LINK, START, ITEM, LOC)

LIST is a circular header list in memory. This algorithm finds the location LOC of the node where ITEM first appears in LIST or sets LOC = NULL.

1. Set PTR := LINK[START].
2. Repeat while INFO[PTR] ≠ ITEM and PTR ≠ START:
Set PTR := LINK[PTR]. [PTR now points to the next node.]
[End of loop.]
3. If INFO[PTR] = ITEM, then:
Set LOC := PTR.
Else:
Set LOC := NULL.
[End of If structure.]
4. Exit.

دو آزمونی که حلقه جستجو را کنترل می‌کند (مرحله ۲ در الگوریتم 5.12) به صورت هم زمان در الگوریتم برای لیستهای پیوندی معمولی اجرایی می‌شوند یعنی الگوریتم 5.2 اجازه ندارد از دستوری شبیه

PTR ≠ NULL و Repeat while INFO[PTR] ≠ ITEM

استفاده کند زیرا برای لیستهای پیوندی معمولی هنگامی که PTR = NULL باشد INFO[PTR] تعریف نشده است.

(ب) زیربرنامه Procedure 5.9 مکان LOC گره اول N را پیدا می‌کند که شامل ITEM است و همچنین LOCP مکان گره قبل از N را وقتی LIST یک لیست پیوندی معمولی است پیدا می‌کند. هنگامی که LIST یک لیست چرخشی با سرلیست است زیربرنامه به صورت زیر است:

Procedure 5.13: FINDBHL(INFO, LINK, START, ITEM, LOC, LOCP)

1. Set SAVE := START and PTR := LINK[START]. [Initializes pointers.]
2. Repeat while INFO[PTR] ≠ ITEM and PTR ≠ START.
Set SAVE := PTR and PTR := LINK[PTR]. [Updates pointers.]
[End of loop.]
3. If INFO[PTR] = ITEM, then:
Set LOC := PTR and LOCP := SAVE.
Else:
Set LOC := NULL and LOCP := SAVE.
[End of If structure.]
4. Exit.

به سادگی این زیربرنامه Procedure 5.9 در مقایسه با Procedure 5.9 توجه کنید. در اینجا نباید حالت خاصی را که ITEM در گره اول ظاهر می‌شود مورد توجه قرار دارد و از این رو می‌توان در یک زمان دو آزمونی را که حلقه را کنترل می‌کنند انجام داد.

(ج) الگوریتم 5.10 گره اول N را حذف می‌کند که وقتی ITEM یک لیست پیوندی معمولی است شامل LIST است. هنگامی که LIST یک لیست چرخشی با سرلیست است الگوریتم زیر این گونه است.

Algorithm 5.14: DELLOCHL(INFO, LINK, START, AVAIL, ITEM)

1. [Use Procedure 5.13 to find the location of N and its preceding node.]
Call LINDBHL(INFO, LINK, START, ITEM, LOC, LOCP).
2. If LOC = NULL, then: Write: ITEM not in list, and Exit.
3. Set LINK[LOCP] := LINK[LOC]. [Deletes node.]
4. [Return deleted node to the AVAIL list.]
Set LINK[LOC] := AVAIL and AVAIL := LOC.
5. Exit.

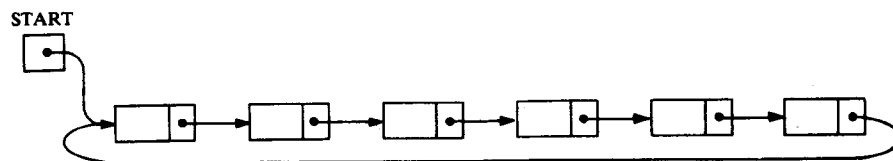
مجدداً نباید حالت خاصی را که ITEM در گره اول ظاهر می‌شود و به صورتی که در الگوریتم 5.10 عمل کردیم در نظر بگیریم.

توجه کنید: دو نوع دیگر از لیستهای پیوندی وجود دارد که بعضی وقتها در برخی از کتابهای ساختمان داده‌ها مطرح می‌شود:

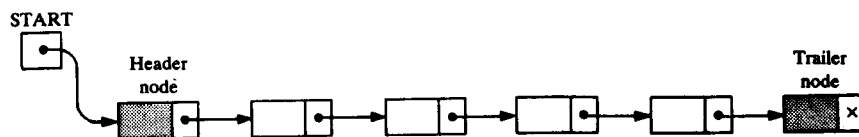
(۱) یک لیست پیوندی که گره آخرش به جای این که شامل اشاره گر پوچ باشد به گره اول اشاره می‌کند که به آن لیست چرخشی یا حلقوی می‌گویند.

(۲) یک لیست پیوندی که شامل سرگره خاصی در ابتدای لیست و هم گره انتهایی خاص دیگری در پایان لیست است.

شکل ۳۱-۵ نمودارهای این لیستها را نشان می‌دهد.



(الف) لیست پیوندی چرخشی



(ب) لیست پیوندی با سرگره و گره انتهایی

شکل ۳۱-۵

چندجمله‌ایها

لیستهای پیوندی دارای سرلیست غالباً برای ذخیره چندجمله‌ایها در حافظه مورد استفاده قرار

میگیرند. سرلیست قسمت مهم این نمایش را تشکیل می‌دهد زیرا به آن در نمایش چندجمله‌ای صفر نیاز داریم. این نمایش چندجمله‌ای‌ها در قالب یک مثال خاص ارائه می‌شود.

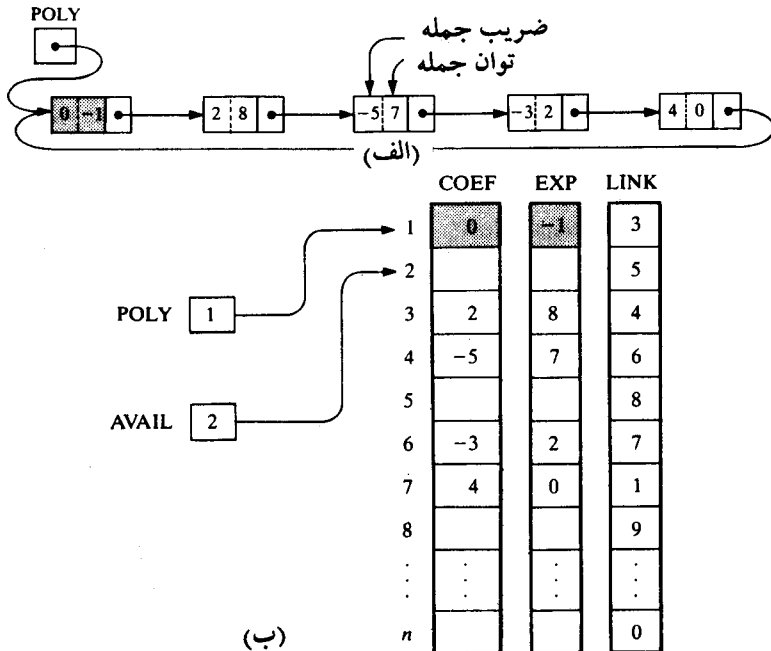
مثال ۲۰-۵

فرض کنید $p(x)$ نمایش چندجمله‌ای یک متغیره زیر باشد که شامل چهار جمله غیرصفر است:

$$p(x) = 2x^8 - 5x^7 - 3x^2 + 4$$

آنگاه $p(x)$ را می‌توان به وسیله لیست دارای سرلیست مانند شکل ۳۲-۵ (الف) نمایش داد که در آن هر گره متناظر با یک جمله غیرصفر از $p(x)$ است به‌ویژه این که قسمت اطلاعات گره به دو فیلد تقسیم شده است که به ترتیب ضریب و توان جمله متناظر آن را نمایش می‌دهند و گره‌ها با توجه به نزول درجه‌ها، پیوند خورده‌اند.

ملاحظه می‌کنید که لیست متغیر اشاره‌گر POLY به سرگره‌ای اشاره می‌کند که در فیلد توان آن یک عدد منفی، در اینجا -۱، جایگزین شده است. اکنون نمایش آرایه‌ای لیست، مستلزم سه آرایه خطی است که ما آنها را COEF, EXP و LINK نام‌گذاری کرده‌ایم. یک چنین نمایشی در شکل ۳۲-۵ (ب) ظاهر شده است.



شکل ۳۲-۵ $p(x) = 2x^8 - 5x^7 - 3x^2 + 4$

۱۰-۵ لیستهای دوطرفه

به لیستی که در بالا مورد بررسی قرار گرفت لیست یکطرفه می‌گویند. زیرا تنها از یک طرف می‌توان لیست را پیمایش کرد یعنی با شروع از START متغیر اشاره گر لیست که به گره اول یا سرگره اشاره می‌کند و با استفاده از فیلد اشاره گر بعدی LINK که به گره بعدی لیست اشاره می‌کند می‌توان لیست را تنها در یک جهت پیمایش کرد. علاوه بر این، با معلوم بودن LOC مکان گره N در چنین لیستی، بلافاصله می‌توان به گره بعدی در لیست (با ارزیابی LINK[LOC]) دسترسی پیدا کرد. اما بدون پیمایش قسمتی از لیست نمی‌توان به گره قبلی دسترسی پیدا کرد. در حالت خاص معنی آن این است که باید قسمتی از لیست قبل از N را برای حذف N از لیست پیمایش کرد.

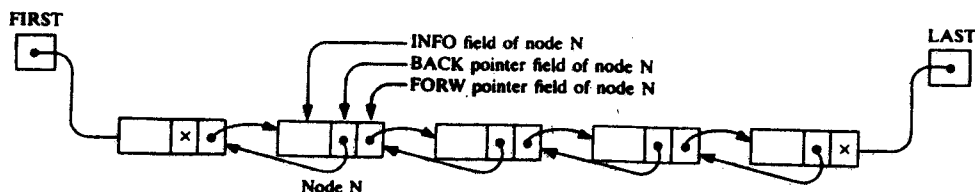
این بخش ساختمان یک لیست جدید موسوم به لیست دوطرفه را معرفی می‌کند که می‌توان آن را در دو جهت پیمایش کرد: در جهت متداول و معمولی به پیش‌رفتن، از ابتدای لیست تا انتهای آن یا در جهت عکس از انتهای لیست به ابتدای لیست. علاوه بر این، با معلوم بودن LOC مکان یک گره N در لیست، اکنون می‌توان بلافاصله هم به گره بعدی و هم به گره قبل از آن در لیست دسترسی پیدا کرد. در حالت خاص معنی آن این است که می‌توان بدون پیمایش هر قسمت از لیست N را از لیست حذف کرد. یک لیست دوطرفه یک مجموعه خطی از عناصر داده‌ای بنام گره‌ها است که در آن هر گره N به سه قسمت تقسیم می‌شود:

(۱) یک فیلد اطلاعات INFO که شامل داده N است.

(۲) یک فیلد اشاره گر FORW که شامل مکان گره بعدی در لیست است.

(۳) یک فیلد اشاره گر BACK که شامل مکان گره قبل از آن در لیست است.

علاوه بر این لیست نیازمند دو متغیر اشاره گر است: FIRST که به گره اول و LAST به گره آخر در لیست اشاره می‌کند. شکل ۵-۳۳ شامل یک نمودار از چنین لیستی است. ملاحظه می‌کنید که اشاره گر پوچ NULL در فیلد FORW از گره آخر لیست و همچنین در فیلد BACK از گره اول لیست است.



شکل ۵-۳۳ لیست دوطرفه

ملاحظه می‌کنید که با استفاده از متغیر **FIRST** و فیلد اشاره گر **FORW**، می‌توانیم یک لیست دوطرفه را مانند قبل، از اول تا آخر لیست پیمایش کنیم. از طرف دیگر، با استفاده از متغیر **LAST** و فیلد اشاره گر **BACK** نیز می‌توانیم این لیست را از آخر تا اول لیست پیمایش کنیم.

فرض کنید **LOCA** و **LOCB** به ترتیب مکانهای دو گره **A** و **B** در یک لیست دوطرفه باشند. آنگاه روشی که اشاره گرهای **FORW** و **BACK** تعریف می‌شوند منتهی به نتایج زیر می‌شود:

خاصیت اشاره گر: $FORW[LOCA] = LOCB$ اگر و فقط اگر $BACK[LOCB] = LOCA$

از طرف دیگر این بیان که **B** بعد از گره **A** است با این بیان که گره **A** قبل از گره **B** قرار دارد معادل است. لیستهای دوطرفه را می‌توان به وسیله آرایه‌های خطی به همان صورتی که در مورد لیستهای یکطرفه بیان شد در حافظه نگهداری کرد با این تفاوت که اکنون به جای یک آرایه اشاره گر **LINK** به «دو آرایه اشاره گر **FORW** و **BACK** نیاز داریم و به جای یک متغیر اشاره گر لیست **START** به دو متغیر اشاره گر لیست **FIRST** و **LAST** نیاز داریم. از طرف دیگر از آنجا که عمل حذف و اضافه کردن گره‌ها تنها در ابتدای لیست **AVAIL** انجام می‌شود لیست **AVAIL** از حافظه موجود در آرایه‌ها نیز همانند لیست یکطرفه، با استفاده از **FORW** به عنوان فیلد اشاره گر نگهداری می‌شود.

مثال ۲۱-۵

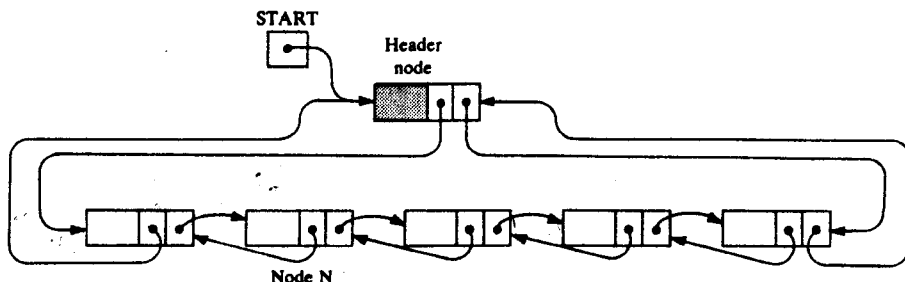
مجدداً داده‌های شکل ۹-۵ یعنی ۹ بیمار یک اطاق بیمارستان با ۱۲ تخت را در نظر بگیرید. شکل ۳۴-۵ چگونگی سازماندهی لیست الفبایی بیماران را در لیست دوطرفه نشان می‌دهد. ملاحظه می‌کنید که مقادیر **FIRST** و فیلد اشاره گر **FORW** به ترتیب دارای همان مقدار **START** و آرایه **LINK** هستند. از این رو لیست را می‌توان همانند قبل به صورت الفبایی پیمایش کرد. از طرف دیگر با استفاده از **LAST** و آرایه اشاره گر **BACK**، لیست را می‌توان به ترتیب الفبایی عکس پیمایش کرد. یعنی **LAST** به **Samuels** فیلد اشاره گر **BACK** از **Samuels** به **Nelson**، فیلد اشاره گر **BACK** از **Nelson** به **Maxwell** و الی آخر اشاره می‌کند.

FIRST		BED	FORW	BACK
5	1	Kirk	7	8
	2		6	
LAST 9	3	Dean	11	5
	4	Maxwell	12	7
	5	Adams	3	0
	6		0	
AVAIL 10	7	Lane	4	1
	8	Green	1	11
	9	Samuels	0	12
	10		2	
	11	Fields	8	3
	12	Nelson	9	4

شکل ۵-۳۴

لیستهای دوطرفه دارای سرلیست

مزایا و ویژگیهای خوب یک لیست دوطرفه و یک لیست چرخشی دارای سرلیست در یک لیست چرخشی دوطرفه دارای سرلیست، به صورتی که در شکل ۵-۳۵ نشان داده شده، جمع شده است. این لیست چرخشی است زیرا دو گره انتهایی آن به سرگروه اول لیست اشاره می‌کنند.



شکل ۵-۳۵ لیست چرخشی دوطرفه با سرلیست

ملاحظه می‌کنید چنین لیست دوطرفه‌ای نیازمند تنها یک متغیر اشاره‌گر لیست **START** است که به سرگره اشاره می‌کند. زیرا دو اشاره‌گر سرگره به دوانتهای لیست اشاره می‌کنند.

مثال ۲۲-۵

فایل پرسنلی شکل ۳۰-۵ را در نظر بگیرید که به صورت یک لیست چرخشی با سرلیست سازماندهی می‌شود. داده‌ها را می‌توان در یک لیست چرخشی دارای سرلیست تنها با افزودن یک آرایه دیگر **BACK** که مکان گره‌های قبلی را به دست می‌دهد سازماندهی کرد. چنین ساختمانی در شکل ۳۶-۵ به تصویر درآمده است که **LINK** به صورت **FORW** نام‌گذاری مجدد شده است. بار دیگر لیست **AVAIL** تنها به صورت یک لیست یکطرفه نگهداری می‌شود.

	NAME	SSN	SEX	SALARY	FORW	BACK
1					0	
2	Davis	192-36-7282	Female	22 800	12	9
3	Kelly	165-64-3351	Male	19 000	7	14
4	Green	175-56-2251	Male	27 200	14	12
5				191 400	6	10
6	Brown	178-52-1065	Female	14 700	9	5
7	Lewis	181-58-9939	Female	16 400	10	3
8					11	
9	Cohen	177-44-4557	Male	19 000	2	6
10	Rubin	135-46-6262	Female	15 500	5	7
11					13	
12	Evans	168-56-8113	Male	34 200	4	2
13					1	
14	Harris	208-56-1654	Female	22 800	3	4

START
5

AVAIL
8

شکل ۳۶-۵

عملیات بر روی لیستهای دوطرفه

فرض کنید **LIST** یک لیست دوطرفه در حافظه باشد. در این قسمت عملیات پیمایش، جستجو، حذف و اضافه کردن عنصر روی **LIST** شرح داده می‌شود.

پیمایش: فرض کنید بخواهیم لیست LIST را برای پردازش دقیقاً یکبار پیمایش کنیم. در آن صورت اگر LIST یک لیست دوطرفه معمولی باشد می‌توانیم از الگوریتم ۵-۱ استفاده کنیم یا اگر LIST یک سرلیست داشته باشد می‌توانیم از الگوریتم ۵-۱۱ استفاده کنیم. در اینجا هیچ مزیتی بین سازماندهی داده‌ها در لیست دوطرفه نسبت به لیست یکطرفه وجود ندارد.

جستجو کردن: فرض کنید اطلاعات ITEM، یک مقدار کلیدی داده شده است و بخواهیم مکان اطلاعات ITEM را در لیست LIST تعیین کنیم. در آن صورت اگر LIST یک لیست دوطرفه معمولی باشد می‌توانیم از الگوریتم ۵-۲ استفاده کنیم یا اگر لیست LIST یک سرلیست داشته باشد می‌توانیم از الگوریتم ۵-۱۲ استفاده کنیم. در اینجا اگر این احتمال وجود داشته باشد که ITEM نزدیک انتهای لیست است در آن صورت مزیت اصلی آن این است که می‌توانیم جستجو برای ITEM را از انتهای لیست به ابتدای لیست انجام دهیم. برای مثال فرض کنید LIST لیستی از نامهای افراد باشد که به صورت الفبایی مرتب شده است. اگر $ITEM = Smith$ آنگاه باید عمل جستجو را از انتهای لیست به طرف ابتدای لیست انجام دهیم اما اگر $ITEM = Davis$ آنگاه باید جستجو در LIST از ابتدا لیست به طرف انتهای لیست انجام شود.

حذف کردن: فرض کنید LOC مکان گره N در لیست LIST داده شده است و فرض کنید بخواهیم N را از لیست حذف کنیم. فرض می‌شود که LIST یک لیست چرخشی دوطرفه با سرلیست است. توجه دارید که BACK[LOC] و FORW[LOC] به ترتیب مکان گره‌هایی هستند که قبل و بعد از گره N قرار دارند. بنابر این همانگونه که در شکل ۵-۳۷ نشان داده شده است N با تغییر جفت اشاره گره‌های زیر از لیست حذف می‌شود:

$BACK[FORW[LOC]] := BACK[LOC]$ و $FORW[BACK[LOC]] := FORW[LOC]$

آنگاه گره حذف شده N با دستورهای جایگزینی زیر به لیست AVAIL برگردانده می‌شود:

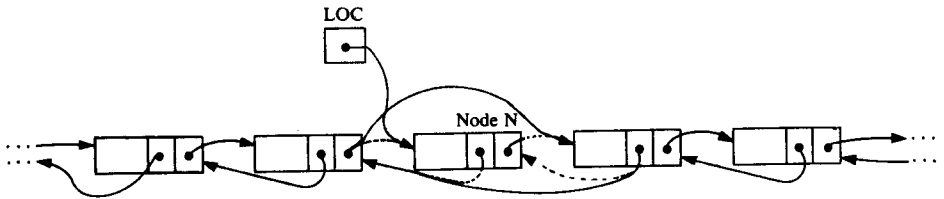
$AVAIL := LOC$ و $FORW[LOC] := AVAIL$

بیان رسمی این الگوریتم به صورت زیر است:

Algorithm 5.15: DELTWL(INFO, FORW, BACK, START, AVAIL, LOC)

1. [Delete node.]
Set $FORW[BACK[LOC]] := FORW[LOC]$ and
 $BACK[FORW[LOC]] := BACK[LOC]$.
2. [Return node to AVAIL list.]
Set $FORW[LOC] := AVAIL$ and $AVAIL := LOC$.
3. Exit.

در اینجا یک مزیت عمده لیست دوطرفه را مشاهده می‌کنید. اگر داده‌ها به صورت یک لیست یکطرفه سازماندهی شوند آنگاه برای حذف N باید لیست یکطرفه را پیمایش کنیم تا مکان گره قبل از N پیدا شود.



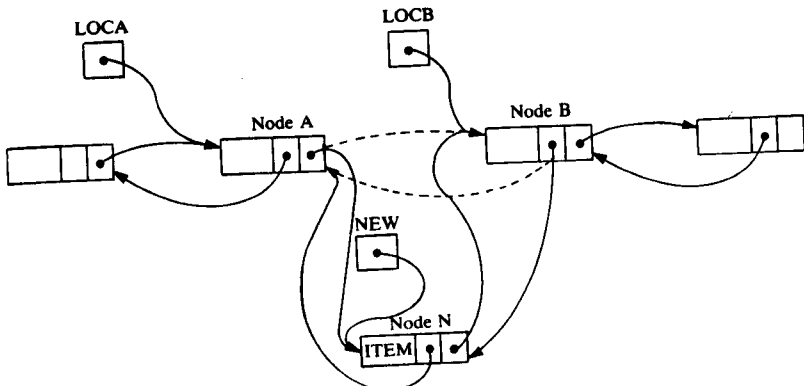
شکل ۳۷- ۵ حذف گره N

اضافه کردن: فرض کنید مکانهای LOCA و LOCB دو گره مجاور A و B در لیست LIST داده شده است و فرض کنید بخواهیم اطلاعات معلوم ITEM را بین گره‌های A و B اضافه کنیم. همانگونه که با یک لیست یکطرفه عمل کردیم، نخست گره اول N را از لیست AVAIL حذف می‌کنیم، از متغیر NEW برای نگهداشتن مکان یا آدرس آن استفاده می‌کنیم و آنگاه داده ITEM را در گره N کپی می‌کنیم. به عبارت دیگر قرار می‌دهیم:

$NEW := AVAIL, \quad AVAIL := FORW[AVAIL], \quad INFO[NEW] := ITEM$

حال همانگونه که در شکل ۳۸- ۵ نشان داده شده است، گره N با محتوای ITEM با تغییر چهار اشاره‌گر زیر در لیست اضافه می‌شود:

$FORW[LOCA] := NEW, \quad FORW[NEW] := LOCB$
 $BACK[LOCB] := NEW, \quad BACK[NEW] := LOCA$



شکل ۳۸- ۵ اضافه کردن گره N

بیان رسمی این الگوریتم به صورت زیر است :

Algorithm 5.16: INSTWL(INFO, FORW, BACK, START, AVAIL, LOCA, LOCB, ITEM)

1. [OVERFLOW?] If AVAIL = NULL, then: Write: OVERFLOW; and Exit.
2. [Remove node from AVAIL list and copy new data into node.]
Set NEW := AVAIL, AVAIL := FORW[AVAIL], INFO[NEW] := ITEM.
3. [Insert node into list.]
Set FORW[LOCA] := NEW, FORW[NEW] := LOCB,
BACK[LOCB] := NEW, BACK[NEW] := LOCA.
4. Exit.

الگوریتم 5.16 فرض می‌کند که LIST شامل یک سرگره است. از این رو LOCA یا LOCB می‌توانند به سرگره اشاره کنند که در آن حالت N به عنوان گره اول یا گره آخر اضافه می‌شود. اگر LIST سرگره نداشته باشد آنگاه باید حالتی را در نظر بگیریم که $LOCA = NULL$ و N به عنوان گره اول در لیست اضافه می‌شود و حالتی را در نظر بگیریم که $LOCB = NULL$ و N به عنوان گره آخر در لیست اضافه می‌شود. توجه کنید: در حالت کلی ذخیره داده‌ها به صورت یک لیست دوطرفه، که نیازمند حافظه اضافی برای اشاره گرهای پیمایش از انتها به ابتدای لیست و زمان اضافی برای تغییر در اشاره گرهای اضافه شده، است که در مقایسه با لیست یکطرفه قابل توجه نیست و هزینه زیادی دربر ندارد مگر آن که خواسته باشیم مکان گره‌ای را پیدا کنیم که قبل از گره معلوم N است مانند حالتی که هنگام عمل حذف در بالا انجام داده‌ایم.

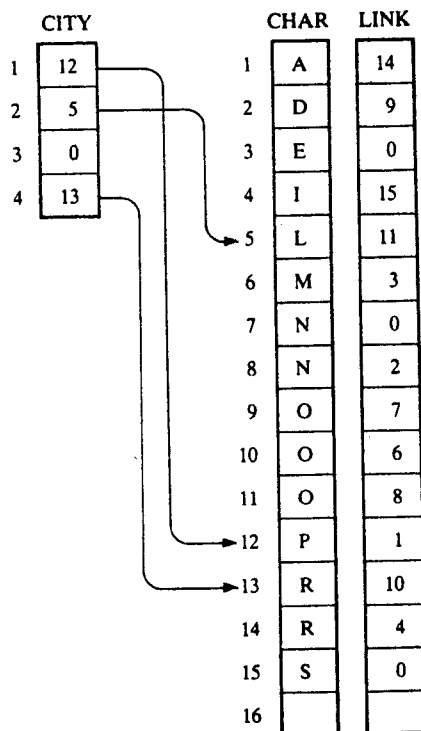
مسئله‌های حل شده

لیستهای پیوندی

مسئله ۵-۱: رشته‌های کاراکتری ذخیره شده در چهار لیست پیوندی شکل ۵-۳۹ را تعیین کنید.

حل: در اینجا اشاره گر چهار لیست در آرایه CITY دیده می‌شود. با CITY[1] شروع می‌کنیم با تعقیب اشاره گرها، لیست را پیمایش می‌کنیم که در نتیجه آن رشته PARIS بدست می‌آید. با شروع از CITY[2] و پیمایش لیست رشته LONDON به دست می‌آید. چون NULL در CITY[3] دیده می‌شود از این رو لیست سوم خالی است و آن را با A رشته تهی نمایش می‌دهند. با شروع از CITY[4] و پیمایش لیست رشته ROME به دست می‌آید. به عبارت دیگر LONDON، PARIS، A و ROME چهار رشته موردنظر

هستند.



شکل ۳۹-۵

مسأله ۲-۵: لیست نامهای زیر (به ترتیب) در آرایه خطی INFO جایگزین می شوند.

Mary, June, Barbara, Paula, Diana, Audrey, Karen, Nancy, Ruth, Eileen, Sandra, Helen

یعنی $INFO[1] = \text{Mary}$, $INFO[2] = \text{June}$, ..., $INFO[12] = \text{Helen}$ و یک متغیر START طوری جایگزین کنید که INFO, LINK و START تشکیل لیست الفبایی از نامها را بدهد.

حل: لیست الفبایی نامها عبارتند از:

Audrey, Barbara, Diana, Eileen, Helen, June, Karen, Mary, Nancy, Paula, Ruth, Sandra,

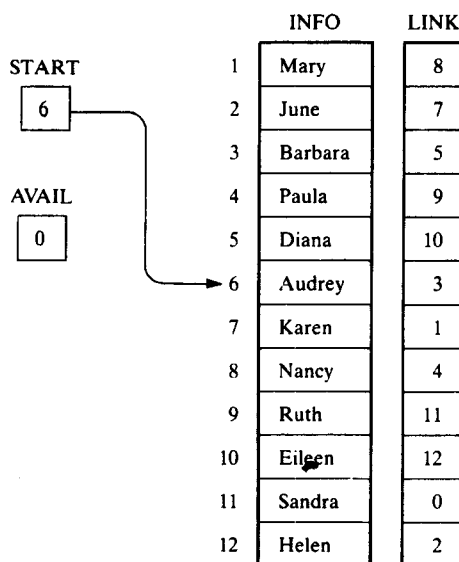
مقادیر START و LINK به صورت زیر بدست می آیند:

(الف) $INFO[6] = \text{Audrey}$ ، بنابراین در $START = 6$ جایگزین کنید.

(ب) $INFO[3] = \text{Barbara}$ ، بنابراین در $LINK[6] = 3$ جایگزین کنید.

(ج) $INFO[5] = \text{Diana}$ ، بنابراین در $LINK[3] = 5$ جایگزین کنید.

(د) $INFO[10] = Eileen$ ، بنابراین در $LINK[5] = 10$ جایگزین کنید.
و الی آخر، چون $INFO[11] = Sandra$ آخرین نام است $LINK[11] = NULL$ جایگزین کنید. شکل ۴۰-۵ ساختمان داده‌ای را نشان می‌دهد که در آن فرض شده است $INFO$ برای تنها ۱۲ عنصر حافظه در اختیار دارد. قرار می‌دهیم $AVAIL = NULL$.



شکل ۴۰-۵

مسأله ۳-۵: فرض کنید $LIST$ یک لیست پیوندی در حافظه باشد. یک زیربرنامه $Procedure$ بنویسید که:

(الف) تعداد دفعاتی را که $ITEM$ داده شده در $LIST$ ظاهر شده است پیدا کند.

(ب) تعداد NUM عناصر غیر صفر را در $LIST$ پیدا کند.

(ج) کلید معلوم K را به هر عنصر لیست $LIST$ اضافه کند.

حل: هر زیربرنامه $Procedure$ برای پیمایش این لیست از الگوریتم 5.1 استفاده می‌کند.

Procedure P5.3A: 1. Set $NUM := 0$. [Initializes counter.] (الف)

2. Call Algorithm 5.1, replacing the processing step by:
If $INFO[PTR] = ITEM$, then: Set $NUM := NUM + 1$.

3. Return

(ب)

Procedure P5.3B: 1. Set $NUM := 0$. [Initializes counter.]

2. Call Algorithm 5.1, replacing the processing step by:
If $INFO[PTR] \neq 0$, then: Set $NUM := NUM + 1$.

3. Return.

Procedure P5.3C: 1. Call Algorithm 5.1, replacing the processing step by:

Set $INFO[PTR] := INFO[PTR] + K$.

(ج)

2. Return.

مسأله ۴-۵: لیست الفبایی بیماران شکل ۹-۵ را در نظر بگیرید. تغییرات مورد نیاز در این ساختمان داده را تعیین کنید تا (الف) Walters به لیست اضافه شود و آنگاه (ب) Kirk از لیست حذف شود. حل: (الف) ملاحظه می‌کنید که Walters در تخت 10 خوابانده می‌شود که اولین تخت خالی است و Walters پس از Samuels به لیست اضافه می‌شود که آخرین بیمار لیست است. سه تغییر در فیلد اشاره‌گرها به صورت زیر است:

۱- $LINK[9] = 10$ [اکنون Samuels به Walters اشاره می‌کند].

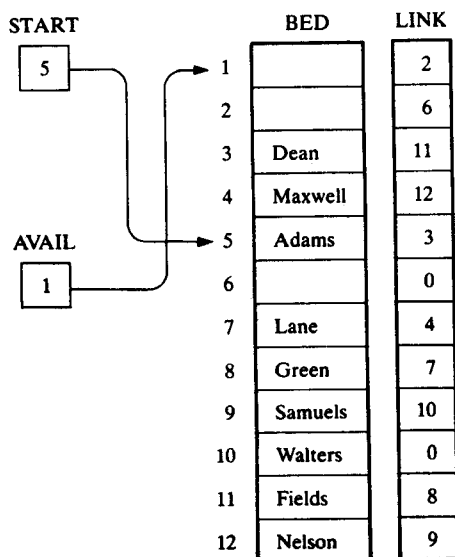
۲- $LINK[10] = 0$ [اکنون Walters آخرین بیمار در لیست است].

۳- $AVAIL = 2$ [اکنون AVAIL به تخت بعدی خالی اشاره می‌کند].

(ب) از آنجا که Kirk مرخص می‌شود، $BED[1]$ اکنون خالی است. سه تغییر زیر در فیلد اشاره‌گرها باید داده شود:

$LINK[8] = 7$ $LINK[1] = 2$ $AVAIL = 1$

بنابراین تغییر اول، Green، که در آغاز قبل از Kirk بود اکنون به Lane اشاره می‌کند که در آغاز بعد از Kirk قرار داشت. تغییر دوم و سوم تخت خالی جدید را به لیست AVAIL اضافه می‌کند. تأکید می‌کنیم که قبل از انجام عمل حذف باید گره $BED[8]$ را پیدا کنیم که در آغاز به گره حذف شده $BED[1]$ اشاره می‌کرد. شکل ۴۱-۵ ساختمان داده جدید را نشان می‌دهد.



شکل ۴۱-۵

مسئله ۵-۵: فرض کنید **LIST** در حافظه باشد. الگوریتمی بنویسید که گره آخر را از لیست **LIST** حذف کند.

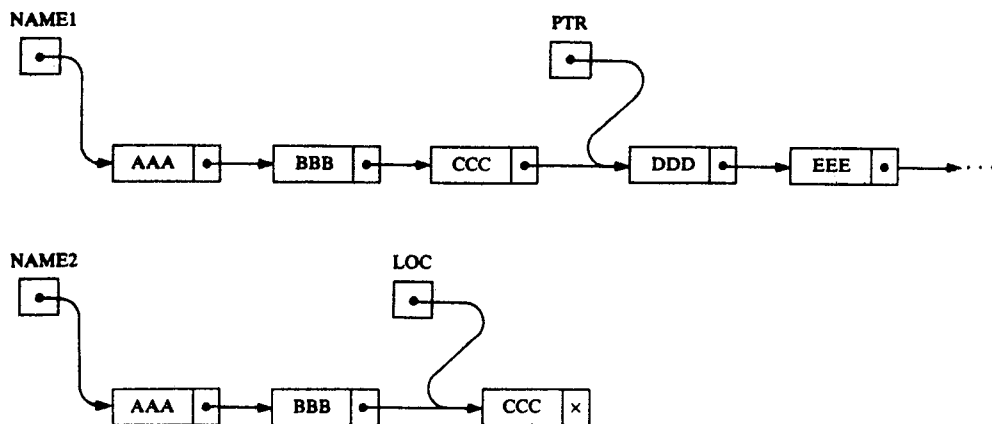
حل: گره آخر را تنها وقتی می‌توان حذف کرد که مکان عنصر قبل از گره آخر را بدانیم. بنابراین با استفاده از یک متغیر اشاره گر **PTR** لیست را پیمایش کنید و با استفاده از متغیر اشاره گر **SAVE** گره قبل از آن را نگهدارید. وقتی $LINK[PTR] = NULL$ ، **PTR** به گره آخر اشاره می‌کند و در چنین حالتی **SAVE** به عنصر قبل از گره آخر اشاره می‌کند. حالتی را که **LIST** تنها یک گره دارد مستقلاً بررسی کنید چون **SAVE** تنها در صورتی قابل تعریف است که لیست ۲ یا چند عنصر داشته باشد. الگوریتم به صورت زیر است:

Algorithm P5.5: DELLST(INFO, LINK, START, AVAIL)

1. [List empty?] If **START** = **NULL**, then Write: UNDERFLOW, and Exit.
2. [List contains only one element?]
 - If **LINK[START]** = **NULL**, then:
 - (a) Set **START** := **NULL**. [Removes only node from list.]
 - (b) Set **LINK[START]** := **AVAIL** and **AVAIL** := **START**. [Returns node to AVAIL list.]
 - (c) Exit.
 - [End of If structure.]
3. Set **PTR** := **LINK[START]** and **SAVE** := **START**. [Initializes pointers.]
4. Repeat while **LINK[PTR]** ≠ **NULL**. [Traverses list, seeking last node.]
 - Set **SAVE** := **PTR** and **PTR** := **LINK[PTR]**. [Updates **SAVE** and **PTR**.]
 - [End of loop.]
5. Set **LINK[SAVE]** := **LINK[PTR]**. [Removes last node.]
6. Set **LINK[PTR]** := **AVAIL** and **AVAIL** := **PTR**. [Returns node to AVAIL list.]
7. Exit.

مسئله ۵-۶: فرض کنید **NAME1** یک لیست در حافظه است. الگوریتمی بنویسید که **NAME1** را در لیست **NAME2** کپی کند.

حل: نخست قرار دهید **NAME2** := **NULL** تا لیست خالی تشکیل شود. آنگاه با استفاده از یک متغیر اشاره گر **PTR**، **NAME1** را پیمایش کنید و هنگام ملاقات هر گره **NAME1**، محتوای آن **INFO[PTR]** را در یک گره جدید کپی کنید که در آن صورت به انتهای **NAME2** اضافه می‌شود. از **LOC** برای نگهداری گره آخر **NAME2** در خلال پیمایش استفاده کنید. شکل ۴۲-۵ و **LOC** را قبل از اضافه شدن گره چهارم به **NAME2** نشان می‌دهد.



شکل ۵-۴۲

اضافه کردن گره اول به NAME2 باید جداگانه بررسی شود چون LOC هنگامی که دست کم یک گره دارد، تعریف نمی شود. این الگوریتم به صورت زیر است:

Algorithm P5.6: COPY(INFO, LINK, NAME1, NAME2, AVAIL)

This algorithm makes a copy of a list NAME1 using NAME2 as the list pointer variable of the new list.

1. Set NAME2 := NULL. [Forms empty list.]
2. [NAME1 empty?] If NAME1 = NULL, then: Exit.
3. [Insert first node of NAME1 into NAME2.]
Call INSLOC(INFO, LINK, NAME2, AVAIL, NULL, INFO[NAME1]) or:
 - (a) If AVAIL = NULL, then: Write: OVERFLOW, and Exit.
 - (b) Set NEW := AVAIL and AVAIL := LINK[AVAIL]. [Removes first node from AVAIL list.]
 - (c) Set INFO[NEW] := INFO[NAME1]. [Copies data into new node.]
 - (d) [Insert new node as first node in NAME2.]
Set LINK[NEW] := NAME2 and NAME2 := NEW.
4. [Initializes pointers PTR and LOC.]
Set PTR := LINK[NAME1] and LOC := NAME2.
5. Repeat Steps 6 and 7 while PTR ≠ NULL:
6. Call INSLOC(INFO, LINK, NAME2, AVAIL, LOC, INFO[PTR]) or:
 - (a) If AVAIL = NULL, then: Write: OVERFLOW, and Exit.
 - (b) Set NEW := AVAIL and AVAIL := LINK[AVAIL].
 - (c) Set INFO[NEW] := INFO[PTR]. [Copies data into new node.]
 - (d) [Insert new node into NAME2 after the node with location LOC.]
Set LINK[NEW] := LINK[LOC], and LINK[LOC] := NEW.
7. Set PTR := LINK[PTR] and LOC := LINK[LOC]. [Updates PTR and LOC.]
[End of Step 5 loop.]
8. Exit.

لیستهای دارای سرلیست، لیستهای دوطرفه

مسئله ۵-۷: لیستهای (چرخشی) دارای سرلیست از لیستهای یکطرفه شکل ۵-۱۱ بسازید.

حل: [1]TEST را به عنوان سرگره برای لیست ALG و [16]TEST را به عنوان سرگره برای لیست GEOM انتخاب کنید. آنگاه برای هر لیست:

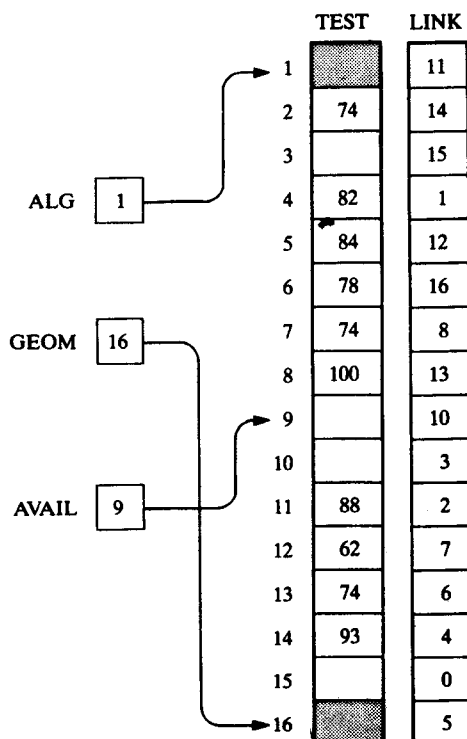
(الف) متغیر اشاره گر لیست را طوری تغییر دهید که به سرگره اشاره کند.

(ب) سرگره را طوری تغییر دهید که به گره اول لیست اشاره کند.

(ج) گره آخر را طوری تغییر دهید که از آخر به سرگره اشاره کند.

در پایان، لیست AVAIL را مجدداً سازماندهی کنید. شکل ۵-۴۳ ساختمان داده تازه شده را نشان

می‌دهد.



شکل ۵-۴۳

مسئله ۵-۸: چندجمله‌ای POLY1 و POLY2 ذخیره شده در شکل ۵-۴۴ را پیدا کنید.

		COEF	EXP	LINK
	1	0	-1	5
	2			
POLY1	1	6	1	7
	3	-3	2	10
POLY2	10	3	5	8
	4	2	8	9
	5	-5	0	1
	6	-4	3	3
	7	7	5	4
	8			
	9	0	-1	6
	10			

شکل ۵-۴۴

حل: کار را با POLY1 شروع می‌کنیم. با تعقیب اشاره‌گرها، لیست را پیمایش می‌کنیم تا چندجمله‌ای به دست آید.

$$p_1(x) = 3x^5 - 4x^3 + 6x - 5$$

با شروع از POLY2، و تعقیب اشاره‌گرها، لیست را پیمایش می‌کنیم تا چندجمله‌ای

$$p_2(x) = 2x^8 + 7x^5 - 3x^2$$

به دست آید. در اینجا COEF[K] و EXP[K] به ترتیب حاوی ضریب و توان یک جمله چندجمله‌ای است. ملاحظه می‌کنید که در فیلد EXP سرگروه‌هایی با مقدار 1 - جایگزین شده است.

مسئله ۵-۹: چندجمله‌ای $p(x, y, z)$ را برحسب سه متغیر x, y, z در نظر بگیرید، جملات چندجمله‌ای $p(x, y, z)$ به ترتیب حروف الفبا در کنار هم قرار می‌گیرند مگر آن که خلاف آن بیان شود. یعنی نخست جملات را برحسب درجه‌های نزولی x مرتب می‌کنیم و چنانچه جملاتی دارای درجه x برابر باشند این جملات را برحسب درجه‌های نزولی y مرتب می‌کنیم و چنانچه جملاتی با درجه x, y برابر باشند این جملات را برحسب درجه‌های نزولی z مرتب می‌کنیم. فرض کنید:

$$p(x, y, z) = 8x^2y^2z - 6yz^8 + 3x^3yz + 2xy^7z - 5x^2y^3 - 4xy^7z^3$$

(الف) چندجمله‌ای را طوری بازنویسی کنید که جملات آن مرتب شده باشند.

(ب) فرض کنید جملات با ترتیب گفته شده در مسأله در آرایه‌های خطی COEF، XEXP، YEXP و ZEXP با گره اول HEAD ذخیره شده‌اند. مقادیر را در LINK طوری جایگزین کنید که لیست پیوندی شامل دنباله جملات چندجمله‌ای با ترتیب ذکر شده باشد.

حل: (الف) توجه دارید که $3x^3yz$ قبل از همه می‌آید چون بالاترین درجه را نسبت به x دارد. توجه دارید که $8x^2y^2z$ و $5x^2y^3$ نسبت به x دارای درجه یکسان هستند اما $5x^2y^3$ قبل از $8x^2y^2z$ می‌آید چون درجه y آن بیشتر است. و الی آخر، بالاخره داریم:

$$p(x, y, z) = 3x^3yz - 5x^2y^3 + 8x^2y^2z - 4xy^7z^3 + 2xy^7z - 6yz^8$$

(ب) شکل ۵-۴۵ ساختمان داده موردنظر را نشان می‌دهد.

	COEF	XEXP	YEXP	ZEXP	LINK
1					4
2	8	2	2	1	7
3	-6	0	1	8	1
4	3	3	1	1	6
5	2	1	7	1	3
6	-5	2	3	0	2
7	-4	1	7	3	5
8					

POLY 1

شکل ۵-۴۵

مسأله ۵-۱۰: در صورت وجود، مزایای یک لیست دوطرفه را نسبت به لیست یکطرفه در هر یک از عملیات زیر بیان کنید.

(الف) با پیمایش لیست هر گره را پردازش کند.

(ب) با معلوم بودن LOC مکان یک گره، آن گره را حذف کند.

(ج) در یک لیست نامرتب عنصر معلوم ITEM را جستجو کند.

(د) در یک لیست مرتب عنصر معلوم ITEM را جستجو کند.

(ه) یک گره قبل از گره‌ای با مکان معلوم LOC اضافه کند.

(و) یک گره بعد از گره‌ای با مکان معلوم LOC اضافه کند.

حل: (الف) هیچ مزیتی ندارد.

(ب) مکان گره قبلی مورد نیاز است. لیست دوطرفه شامل این اطلاعات است درحالی که با یک لیست یکطرفه باید لیست را پیمایش کنیم.

(ج) هیچ مزیتی ندارد.

(د) هیچ مزیتی ندارد مگر آن که بدانیم **ITEM** باید در انتهای لیست ظاهر شود که در آن حالت لیست از انتها به ابتدا پیمایش می شود. برای مثال اگر عمل جستجو را برای پیدا کردن **Walker** در یک لیست الفبایی انجام دهیم می توان سریعتر لیست را از انتها به ابتدا پیمایش کرد.

(ه) مانند قسمت (ب) لیست دوطرفه کارایی بیشتری دارد.

(و) هیچ مزیتی ندارد.

توجه کنید: در حالت کلی، یک لیست دوطرفه مفیدتر از لیست یکطرفه نیست، مگر در شرایط خاص. مسأله ۱۱-۵: فرض کنید **LIST** یک لیست (چرخشی) دارای سرلیست در حافظه باشد. الگوریتمی بنویسید که گره آخر را از **LIST** حذف کند. این مسأله را با مسأله ۵-۵ مقایسه کنید.

حل: الگوریتم همان الگوریتم **P5.5** است با این تفاوت که اکنون می توانیم حالت خاصی را که **LIST** تنها یک گره دارد حذف کنیم. به بیان دیگر، وقتی **LIST** خالی نیست بلافاصله می توانیم **SAVE** را تعریف کنیم.

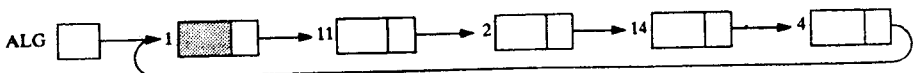
Algorithm P5.11: DELLSTH(INFO, LINK, START, AVAIL)

This algorithm deletes the last node from the header list.

1. [List empty?] If **LINK[START] = NULL**, then: Write: UNDERFLOW, and Exit.
2. Set **PTR := LINK[START]** and **SAVE := START**. [Initializes pointers.]
3. Repeat while **LINK[PTR] ≠ START**: [Traverses list seeking last node.]
Set **SAVE := PTR** and **PTR := LINK[PTR]**. [Updates SAVE and PTR.]
[End of loop.]
4. Set **LINK[SAVE] := LINK[PTR]**. [Removes last node.]
5. Set **LINK[PTR] := AVAIL** and **AVAIL := PTR**. [Returns node to AVAIL list.]
6. Exit.

مسأله ۱۲-۵: با استفاده از لیستهای یکطرفه دارای سرلیست شکل ۴۳-۵ لیستهای دو طرفه بسازید.

حل: لیست **ALG** را از ابتدا تا انتهای لیست پیمایش کنید تا نتیجه زیر بدست آید:



ما نیازمند اشاره گره های انتهای لیست هستیم. این اشاره گره ها گره به گره محاسبه می شوند. برای مثال آخرین گره با مکان **LOC = 4** باید به گره قبل از گره آخر اشاره کند که دارای مکان **LOC = 14** است. از این رو

$$\text{BACK}[4] = 14$$

گره قبل از گره آخر با مکان (آدرس) **LOC = 14** باید به گره قبل از آن با مکان **LOC = 2** اشاره کند. از این رو

$$\text{BACK}[14] = 2$$

والی آخر. سرگروه با مکان آدرس $\text{LOC} = 1$ باید به گره آخر با مکان 4 اشاره کند. از این رو

$$\text{BACK}[1] = 4$$

در مورد لیست GEOM روش مشابه‌ای انجام می‌شود. در شکل ۴۶-۵ لیستهای دوطرفه به تصویر درآمده است. توجه دارید که هیچ تفاوتی بین آرایه‌های LINK و FORW وجود ندارد. به بیان دیگر، تنها محاسبه آرایه BACK مورد نیاز است.

	TEST	FORW	BACK
1		11	4
2	74	14	11
3		15	
4	82	1	14
5	84	12	16
6	78	16	13
7	74	8	12
8	100	13	7
9		10	
10		3	
11	88	2	1
12	62	7	5
13	74	6	8
14	93	4	2
15		0	
16		5	6

ALG [1] → 1
 GEOM [16] → 16
 AVAIL [9] → 9

شکل ۴۶-۵

مسئله‌های تکمیلی

لیستهای پیوندی

مسئله ۱۳-۵: شکل ۴۷-۵ لیست بیماران پنج بیمارستان و شماره اتاقهای آنها را نشان می‌دهد.

(الف) مقادیر مربوط به NSTART و NLINK را به گونه‌ای پر کنید که تشکیل یک لیست الفبایی از نامها بدهد.
 (ب) مقادیر مربوط به RSTART و RLINK را به گونه‌ای پر کنید که شماره اتاقها را به ترتیب ارائه دهد.

	NSTART	NAME	ROOM	NLINK	RLINK
1	<input type="text"/>	Brown	650	<input type="text"/>	<input type="text"/>
2		Smith	422	<input type="text"/>	<input type="text"/>
3		Adams	704	<input type="text"/>	<input type="text"/>
4		Jones	462	<input type="text"/>	<input type="text"/>
5		Burns	632	<input type="text"/>	<input type="text"/>

شکل ۵-۴۷

مسئله ۵-۱۴: شکل ۵-۴۸ یک لیست پیوندی را در حافظه نشان می‌دهد.

	START	INFO	LINK
1	<input type="text" value="4"/>	A	2
2		B	8
3			6
4		C	7
5		D	0
6			0
7		E	1
8		F	5

شکل ۵-۴۸

(الف) دنباله کاراکترهای درون لیست را تعیین کنید.
 (ب) فرض کنید F و آنگاه C از لیست حذف شده‌اند و بدنبال آن G به ابتدای لیست اضافه شده است. ساختمان نهایی لیست را تعیین کنید.
 (ج) فرض کنید C و آنگاه F از لیست حذف شده‌اند و آنگاه G به ابتدای لیست اضافه شده است.

ساختمان نهایی لیست را تعیین کنید.

(د) فرض کنید **G** به ابتدای لیست اضافه شده است و آنگاه **F** و بدنبال آن **C** از این ساختمان حذف شده است. ساختمان نهایی لیست را تعیین کنید.

مسئله ۱۵-۵: فرض کنید **LIST** یک لیست پیوندی در حافظه و شامل مقادیر عددی باشد. برای هر یک از حالت‌های زیر یک زیربرنامه **Procedure** بنویسید که:

(الف) **MAX** ماکزیمم مقادیر لیست **LIST** را پیدا کنید.

(ب) **MEAN** میانگین مقادیر لیست **LIST** را پیدا کنید.

(ج) **PROD** حاصلضرب عناصر لیست **LIST** را پیدا کنید.

مسئله ۱۶-۵: عدد صحیح **K** داده شده است. یک زیربرنامه **Procedure** بنویسید که عنصر **K** ام را از لیست پیوندی حذف کند.

مسئله ۱۷-۵: یک زیربرنامه **Procedure** بنویسید که اطلاعات معلوم **ITEM** را به انتهای لیست اضافه کند.

مسئله ۱۸-۵: یک زیربرنامه **Procedure** بنویسید که عنصر اول یک لیست را حذف کند و آن را بدون هیچ تغییری در مقدارهای **INFO** به انتهای لیست اضافه کند. تنها **START** و **LINK** قابل تغییر هستند.

مسئله ۱۹-۵: یک زیربرنامه **Procedure SWAP(INFO, LINK, START, K)** بنویسید که بدون هیچ تغییری در مقدارهای **INFO** جای عناصر **K** ام و **K+1** ام لیست را عوض کند.

مسئله ۲۰-۵: یک زیربرنامه **Procedure SORT(INFO, LINK, START)** بنویسید که بدون هیچ تغییری در مقدارهای **INFO** لیست را مرتب کند.

راهنمایی: از زیربرنامه **Procedure SWAP** مسئله ۱۹-۵ و مرتب‌کردن حبابی استفاده کنید.

مسئله ۲۱-۵: فرض کنید **AAA** و **BBB** لیست‌های پیوندی مرتب شده با عناصر متمایز باشند. این دو لیست در **INFO** و **LINK** نگهداری می‌شوند. یک زیربرنامه **Procedure** بنویسید که لیست‌ها را بدون هیچ تغییری در مقادیر **CCC** تنها در یک لیست پیوندی **INFO** ترکیب کند.

مسئله‌های ۲۲-۵ تا ۲۴-۵ به رشته‌های کاراکتری مربوط می‌شوند که به صورت لیست‌های پیوندی ذخیره شده‌اند و در هر گره آن تنها یک کاراکتر وجود دارد و از همان آرایه‌های **INFO** و **LINK** استفاده می‌کنند.

مسئله ۲۲-۵: فرض کنید **STRING** یک رشته کاراکتری در حافظه باشد.

(الف) یک زیربرنامه **Procedure** بنویسید که **SUBSTRING(STRING, K, N)** را چاپ کند یعنی زیررشته **STRING** را که از کاراکتر **K** ام شروع می‌شود و طول **N** دارد چاپ کند.

(ب) یک زیربرنامه **Procedure** بنویسید که یک رشته جدید **SUBKN** در حافظه ایجاد کند که در آن

$$\text{SUBKN} = \text{SUBSTRING}(\text{STRING}, \text{K}, \text{N})$$

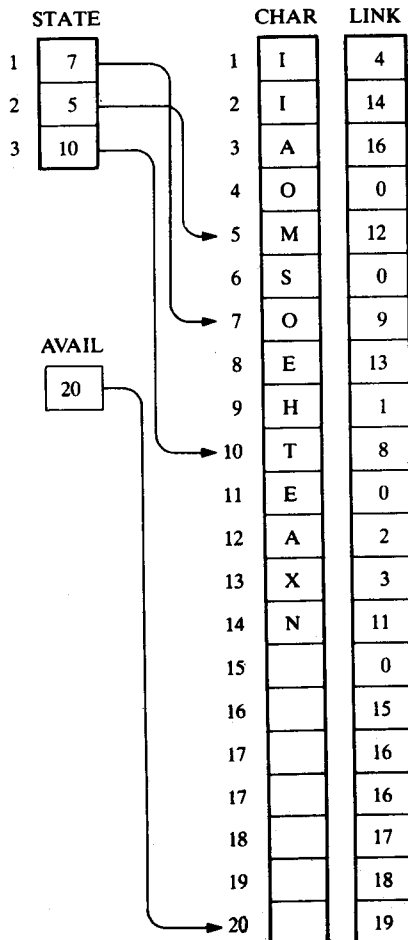
مسئله ۲۳-۵: فرض کنید **STR1** و **STR2** رشته‌های کاراکتری در حافظه باشند. یک زیربرنامه

Procedure بنویسید که یک رشته جدید STR3 ایجاد کند که از اتصال دو رشته STR1 و STR2 بوجود آمده است.

مسئله ۲۴- ۵: فرض کنید TEXT و PATTERN رشته‌هایی در حافظه باشند. یک زیربرنامه Procedure بنویسید که مقدار INDEX(TEXT, PATTERN) یعنی مکانی را که در آن PATTERN برای اولین بار به صورت یک زیررشته TEXT ظاهر می‌شود پیدا کند.

لیستهای دارای سرلیست، لیستهای دو طرفه

مسئله ۲۵- ۵: رشته‌های کاراکتری در سه لیست پیوندی طبق شکل ۴۹- ۵ ذخیره شده‌اند.



شکل ۴۹- ۵

(الف) سه رشته را پیدا کنید. (ب) لیستهای چرخشی دارای سرلیست از لیستهای یکطرفه با استفاده از CHAR[20]، CHAR[19] و CHAIR[18] به عنوان سرگره‌ها تشکیل دهید.

مسئله ۲۶-۵: چندجمله‌ای‌های ذخیره‌شده در سه لیست دارای سرلیست شکل ۵۰-۵ را تعیین کنید.

POLY		COEF	EXP	LINK
1	1	0	-1	9
2	2	0	-1	2
3	3	0	-1	6
		4	3	7
		5	2	8
		6	3	5
		7	1	10
		8	0	3
		9	4	4
		10	0	1
		11		12
		12		13
		13		14
		⋮	⋮	⋮
		49		50
		50		0

AVAIL

11

شکل ۵۰-۵

مسئله ۲۷-۵: چندجمله‌ای زیر را در نظر بگیرید:

$$p(x, y, z) = 2xy^2z^3 + 3x^2yz^2 + 4xy^3z + 5x^2y^2 + 6y^3z + 7x^3z + 8xy^2z^5 + 9$$

(الف) این چندجمله‌ای را طوری بنویسید که جملات آن به ترتیب حروف الفبا باشند.

(ب) فرض کنید جملات این چندجمله‌ای به ترتیب نشان داده شده در آرایه‌های موازی COEF،

XEXP، YEXP و ZEXP سرگره اولین گره است ذخیره شده‌اند. بنابراین به‌ازای 9، 3، 2، K

COEF[K] = K داریم. مقادیر را در آرایه LINK به گونه‌ای جایگزین کنید که لیست پیوندی شامل دنباله

جملات با ترتیب ذکر شده باشد. مسئله ۹-۵ را ببینید.

مسئله ۲۸-۵: یک زیربرنامه **HEAD(INFO, LINK, START, AVAIL)** بنویسید که از یک لیست یکطرفه معمولی یک لیست چرخشی دارای سرلیست بسازد.

مسئله ۲۹-۵: مجدداً مسئله‌های ۱۶-۵ تا ۲۰-۵ را به جای یک لیست یکطرفه معمولی با استفاده از یک لیست چرخشی دارای سرلیست حل کنید. ملاحظه می‌کنید که الگوریتم اکنون خیلی ساده‌تر شده است.

مسئله ۳۰-۵: فرض کنید **POLY1** و **POLY2** دو چندجمله‌ای یک متغیره باشند که با استفاده از همان آرایه‌های موازی **COEF**، **EXP** و **LINK** به صورت لیستهای چرخشی دارای سرلیست ذخیره شده‌اند.

یک زیربرنامه **Procedure**

ADD(COEF, EXP, LINK, POLY1, POLY2, AVAIL, SUMPOLY)

بنویسید که مجموع **SUMPOLY** دو چندجمله‌ای **POLY1** و **POLY2** را پیدا کند (که با استفاده از **COEF**، **EXP** و **LINK** نیز در حافظه ذخیره می‌شود).

مسئله ۳۱-۵: برای چندجمله‌ای‌های **POLY1** و **POLY2** مسئله ۳۰-۵ یک زیربرنامه **Procedure**

MULT(COEF, EXP, LINK, POLY1, POLY2, AVAIL, PRODPOLY)

بنویسید که حاصلضرب **PRODPOLY** چندجمله‌ای‌های **POLY1** و **POLY2** را پیدا کند.

مسئله ۳۲-۵: از لیستهای یکطرفه شکل ۴۹-۵ با استفاده از **CHAR[19]**، **CHAR[20]** و **CHAR[18]** به عنوان سرگره‌ها همانند مسئله ۲۵-۵، لیستهای چرخشی دوطرفه با سرلیست بسازید.

مسئله ۳۳-۵: عدد صحیح **K** داده شده است. یک زیربرنامه **Procedure** به صورت

DELK(INFO, FORW, BACK, START, AVAIL, K)

بنویسید که عنصر **K** ام را از لیست چرخشی دوطرفه با سرلیست حذف کند.

مسئله ۳۴-۵: فرض کنید **LIST(INFO, LINK, START, AVAIL)** لیست چرخشی یکطرفه با سرلیست در حافظه باشد. یک زیربرنامه **Procedure** به صورت

TWOWAY(INFO, LINK, BACK, START)

بنویسید که مقادیر را در آرایه خطی **BACK** جایگزین کند تا از لیست یکطرفه یک لیست دوطرفه بسازد.

برای مسئله‌های زیر برنامه بنویسید

مسئله‌های ۳۵-۵ تا ۴۰-۵ در ارتباط با ساختمان داده شکل ۵۱-۵ هستند که از چهار لیست الفبایی مربوط به موکلین و وکیل مدافع‌های آنها تشکیل شده است.

مسئله ۳۵-۵: برنامه‌ای بنویسید که عدد صحیح **K** را از ورودی بخواند و در خروجی لیست موکلین وکیل مدافع **K** را چاپ کند. برای هر **K** برنامه را آزمایش کنید.

مسئله ۳۶-۵: برنامه‌ای بنویسید که نام و وکیل مدافع هر موکلی را که سنش برابر **L** یا بزرگتر از **L** است

LAWYER		POINT	CLIENT		AGE	LINK
1	Davis	4	1	Hall	35	16
2	Levine	12	2	Moss	28	13
3	Nelson	21	3	Ford	47	25
4	Rogers	8	4	Brown	54	22
			5	Ginn	38	14
			6	Pride	42	29
			7			26
			8	Berk	38	3
			9	White	45	0
			10			28
			11	Todd	25	0
			12	Dixon	32	24
			13	Newman	46	6
			14	Harris	42	30
			15			7
			16	Jackson	52	27
			17			23
			18	Roberts	40	0
			19			0
			20	Eisen	32	1
			21	Adams	48	5
			22	Cohen	36	20
			23			19
			24	Fisher	33	18
			25	Graves	42	11
			26			10
			27	Parker	50	9
			28			17
			29	Singer	45	0
			30	Lewis	28	2

AVAIL
15

چاپ کند. برنامه را با استفاده از (الف) $L = 41$ و (ب) $L = 48$ آزمایش کنید.

مسئله ۳۷-۵: برنامه‌ای بنویسید که نام LLL یک وکیل مدافع را از ورودی بخواند و در خروجی لیست وکلای مدافع موکلین را چاپ کند. برنامه را با استفاده از (الف) $Rogers$ ، (ب) $Baker$ ، (ج) $Levine$ آزمایش کنید.

مسئله ۳۸-۵: برنامه‌ای بنویسید که $NAME$ یک موکل را از ورودی بخواند و در خروجی نام موکل، سن و وکیل مدافع او را چاپ کند. برنامه را با استفاده از (الف) $Newman$ ، (ب) $Ford$ ، (ج) $Rivers$ و (د) $Hall$ آزمایش کنید.

مسئله ۳۹-۵: برنامه‌ای بنویسید که $NAME$ موکل را از ورودی بخواند و رکورد موکل را از این ساختمان داده حذف کند. برنامه را با استفاده از (الف) $Lewis$ ، (ب) $Klein$ و (ج) $Parker$ آزمایش کنید.

مسئله ۴۰-۵: برنامه‌ای بنویسید که رکورد یک موکل جدید را که از نام موکل، سن و وکیل مدافع او تشکیل شده است از ورودی بخواند و رکورد را در ساختمان داده اضافه کند. برنامه را با استفاده از (الف) $Jones, 36, Levine$ و (ب) $Olsen, 44, Nelson$ آزمایش کنید.

مسئله‌های ۴۱-۵ تا ۴۶-۵ در ارتباط با لیست الفبایی رکورد کارمندان شکل ۳۰-۵ هستند که به صورت لیست چرخشی با سرلیست ذخیره شده‌اند.

مسئله ۴۱-۵: برنامه‌ای بنویسید که در خروجی لیست الفبایی رکورد تمام کارمندان را چاپ کند.

مسئله ۴۲-۵: برنامه‌ای بنویسید که نام NNN یک کارمند را از ورودی بخواند و در خروجی رکورد کارمند را چاپ کند. برنامه را با استفاده از (الف) $Evans$ ، (ب) $Smith$ و (ج) $Lewis$ آزمایش کنید.

مسئله ۴۳-۵: برنامه‌ای بنویسید که شماره تأمین اجتماعی SSS یک کارمند را از ورودی بخواند و رکورد کارمند را چاپ کند. برنامه را با استفاده از (الف) $3351 - 64 - 165$ ، (ب) $6262 - 46 - 136$ و (ج) $5555 - 44 - 177$ آزمایش کنید.

مسئله ۴۴-۵: برنامه‌ای بنویسید که عدد صحیح K را از ورودی بخواند و نام هر کارمند مذکر را وقتی $K = 1$ است یا نام هر کارمند مؤنث را وقتی $K = 2$ است در خروجی چاپ کند. برنامه را با استفاده از (الف) $K = 2$ ، (ب) $K = 5$ و (ج) $K = 1$ آزمایش کنید.

مسئله ۴۵-۵: برنامه‌ای بنویسید که نام NNN یک کارمند را از ورودی بخواند و رکورد این کارمند را از ساختمان داده حذف کند. برنامه را با استفاده از (الف) $Davis$ ، (ب) $Jones$ و (ج) $Rubin$ آزمایش کنید.

مسئله ۴۶-۵: برنامه‌ای بنویسید که رکورد یک کارمند جدید را از ورودی بخواند و رکورد را در فایل اضافه کند. برنامه را با استفاده از (الف) $3388, Female, 21\ 000 - 52 - 168$ $Fletcher$ و (ب) $Nelson$ $2468, Male, 19\ 000 - 32 - 175$ آزمایش کنید.

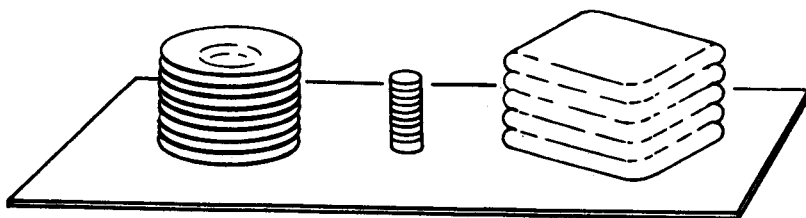
توجه کنید: خاطر نشان می‌کنیم که هنگام اضافه کردن و حذف رکورد، رکورد سرگروه را تازه کنید.

فصل ۶

پشته‌ها، صفها، زیربرنامه‌های بازگشتی

۱-۶ مقدمه

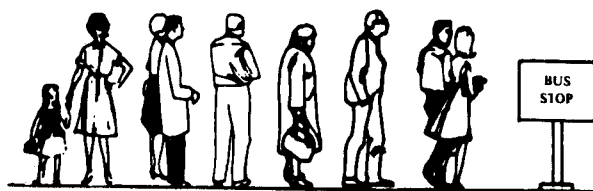
لیست‌ها و آرایه‌های خطی که در فصل‌های قبل مورد بررسی قرار گرفته‌اند، اجازه می‌دادند که عناصر را در هر مکانی از لیست، ابتدای لیست، انتهای لیست یا وسط لیست حذف یا اضافه کنیم. در علم کامپیوتر اغلب وضعیت‌هایی پیش می‌آید که می‌خواهیم در عمل اضافه کردن و حذف عناصر لیست محدودیت‌هایی ایجاد کنیم طوری که این عملیات تنها در ابتدا یا در انتهای لیست انجام شود نه در وسط لیست. دو ساختمان داده‌ای که برای این منظور مفید هستند عبارتند از: **پشته‌ها و صفها**. یک پشته، یک ساختمان خطی است که در آن عمل اضافه کردن یا حذف عنصر تنها در یک انتهای آن امکان‌پذیر است. شکل ۱-۶ سه مثال از این ساختمان داده را که در زندگی روزمره اتفاق می‌افتد نشان می‌دهد. یک پشته از بشقاب، یک پشته از سکه و یک پشته از بشقاب.



یک پشته از حوله تا شده یک پشته از سکه یک پشته از بشقاب

ملاحظه می‌کنید که یک قلم از عنصر را می‌توان تنها از بالای هر یک از این پشته‌ها حذف کرد یا به بالای آن اضافه کرد. به‌ویژه این که آخرین عنصر داده‌ای اضافه‌شده به یک پشته، اولین عنصر داده‌ای است که می‌توان از آن حذف کرد. به این ترتیب به پشته‌ها، لیستهای آخرین ورودی اولین خروجی است، LIFO نیز می‌گویند. نامهای دیگری برای پشته‌ها بکار برده می‌شود. که عبارتند از: "نبوه" و "لیستهای فشرده". هرچند ممکن است پشته ساختمان داده بسیار محدودی بنظر رسد اما در علم کامپیوتر کاربرد بسیار زیادی دارد.

یک صف، یک لیست خطی است که در آن هر عنصر داده‌ای را می‌توان تنها از یک انتهای آن اضافه کرد و عنصرهای داده‌ای را می‌توان تنها از انتهای دیگر آن حذف کرد. نام صف احتمالاً از کاربرد روزمره این اصطلاح گرفته شده است. صف مردمی را که در یک ایستگاه، به صورتی که در شکل ۲-۶ می‌بینید، منتظر اتوبوس هستند را در نظر بگیرید.



شکل ۲-۶. صف انتظار اتوبوس

هر شخص جدید که وارد ایستگاه می‌شود در آخر صف می‌ایستد و وقتی اتوبوس می‌رسد مردمانی که در جلوی صف هستند اول، سوار اتوبوس می‌شوند. واضح است که اولین نفر داخل صف اولین کسی است که صف انتظار را ترک می‌کند. بنابراین به صفها لیستهای اولین ورودی اولین خروجی است، FIFO نیز می‌گویند. مثال دیگری از یک صف، یک تعداد یا یک بسته از برنامه‌های است که در انتظار پردازش بسر می‌برند. فرض می‌شود که هیچ برنامه‌ای اولویت بالاتری نسبت به دیگری ندارد. مفهوم بازگشتی، از مفاهیم اساسی و بنیادی علم کامپیوتر است. این مبحث در این بخش معرفی می‌شود زیرا به وسیله ساختمان یک پشته می‌توان مفاهیم مربوط به مسایل بازگشتی را شبیه‌سازی کرد.

۲-۶ پشته‌ها

یک پشته، یک لیست از عناصر است که در آن هر عنصر را می‌توان تنها از یک انتها موسوم به بالای

پشته حذف یا اضافه کرد، یعنی عناصر به ترتیب عکسی که وارد پشته می‌شوند از پشته حذف می‌شوند. دو اصطلاح خاص، برای دو عمل اساسی، با پشته‌ها بکار می‌رود:

(الف) عمل **PUSH** که این اصطلاح برای اضافه کردن یک عنصر در پشته بکار می‌رود.

(ب) عمل **POP** که این اصطلاح برای حذف یک عنصر از پشته بکار می‌رود.

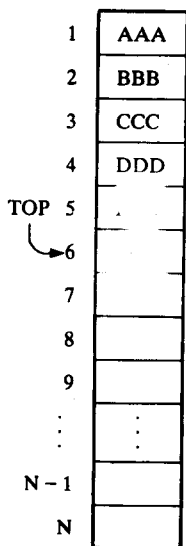
تأکید می‌کنیم که این اصطلاحات تنها هنگام کار با پشته‌ها بکار می‌روند و در هیچ ساختمان داده دیگری، مورد استفاده قرار نمی‌گیرد.

مثال ۱-۶

فرض کنید ۶ عنصر زیر به ترتیب در یک پشته خالی **PUSH** می‌شوند:

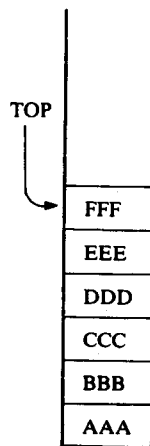
AAA, BBB, CCC, DDD, EEE, FFF

شکل ۳-۶ سه راه به تصویر کشیده شدن چنین پشته‌ای را نشان می‌دهد.



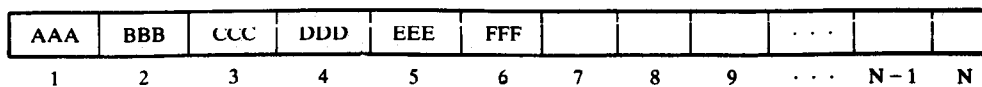
(ب)

(a)



(الف)

(b)



(ج)

شکل ۳-۶. نمودار پشته‌ها

جهت سهولت در نمادگذاری، اغلب پشته را به صورت زیر مشخص می‌کنیم:

STACK: AAA, BBB, CCC, DDD, EEE, FFF

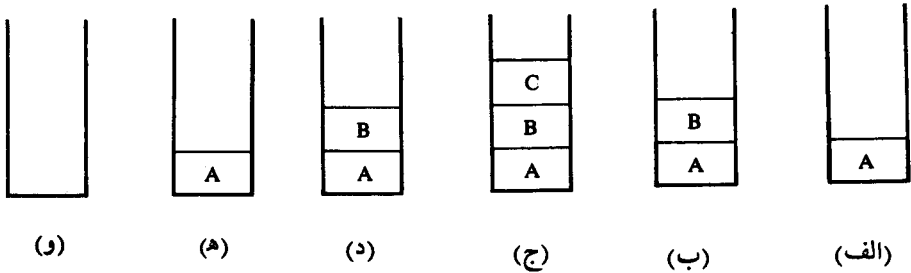
ضرورت این کار در آن است که سمت راست‌ترین عنصر، در بالای پشته قرار می‌گیرد. صرف‌نظر از روشی که یک پشته توصیف می‌شود، تأکید می‌کنیم که خاصیت اساسی آن، که همان عمل اضافه کردن و حذف عنصر است می‌تواند تنها در بالای پشته اتفاق بیفتد. معنی آن این است که قبل از حذف FFF نمی‌توان EEE را حذف کرد و قبل از حذف EEE و FFF نمی‌توان DDD را حذف کرد و الی آخر. در نتیجه عناصر را می‌توان از پشته، تنها به ترتیب عکسی که در پشته PUSH یا اضافه می‌شود، POP یا حذف کرد.

بار دیگر لیست گره‌های آزاد AVAIL را که در فصل ۵ بررسی کردیم در نظر بگیرید. یادآوری می‌کنیم که گره‌های آزاد تنها از ابتدای لیست AVAIL حذف می‌شوند و گره‌های جدید موجود تنها در ابتدای لیست AVAIL اضافه می‌شوند. به بیان دیگر لیست AVAIL به صورت یک پشته پیاده‌سازی می‌شود. این روش پیاده‌سازی لیست AVAIL به صورت یک پشته تنها بخاطر سادگی و سهولت آن نسبت به قسمت اصلی این ساختمان است. در قسمت زیر، وضعیت مهم و قابل توجهی را مورد بررسی قرار می‌دهیم که در آن پشته ابزار اساسی پردازش خود الگوریتم است.

تصمیم‌گیری‌های درجه دوم یا به تعویق افتاده

پشته‌ها اغلب برای بیان ترتیب مراحل پردازش‌هایی بکار می‌رود که در آن مراحل، یعنی پردازش باید تا برقراری و محقق شدن شرایط دیگر به تعویق بیفتد. به مثال زیر توجه کنید.

فرض کنید که هنگام پردازش پروژه A نیازمند آن باشیم که روی پروژه B کار کنیم که کامل شدن B مستلزم کامل شدن پروژه A است. آنگاه پوشه‌ای که شامل داده‌های پروژه A است را در پشته قرار می‌دهیم، این وضعیت در شکل ۴-۶ (الف) به تصویر کشیده شده است، همچنین شروع به پردازش B می‌کنیم. با وجود این فرض کنید با همان دلیل هنگام پردازش B منتهی به پردازش پروژه C می‌شویم. آنگاه همانند آنچه که در نمودار ۴-۶ (ب) به تصویر درآوردیم B را در پشته بالای A قرار می‌دهیم و شروع به پردازش C می‌کنیم. علاوه بر این فرض کنید هنگام پردازش C به همین ترتیب منتهی به پردازش D شویم. آنگاه C را در پشته بالای B قرار می‌دهیم، این وضعیت در شکل ۴-۶ (ج) به تصویر کشیده شده است و همچنین شروع به پردازش D می‌کنیم.



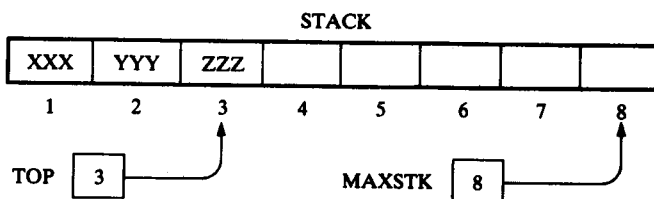
شکل ۴-۶

از طرف دیگر فرض کنید توانایی کامل کردن پردازش پروژه D را داریم. آنگاه تنها پروژه‌ای که می‌توانیم پردازش آن را ادامه دهیم پروژه C است که در بالای پشته است. از این رو پوشه پروژه C را از پشته حذف می‌کنیم، پشته به صورتی که در نمودار ۴-۶ (د) به تصویر کشیده شده است باقی می‌ماند و پردازش C ادامه می‌یابد. به همین ترتیب پس از کامل شدن پردازش C، پوشه B را از پشته حذف می‌کنیم و پشته به صورتی که در نمودار ۴-۶ (ه) به تصویر کشیده شده است باقی می‌ماند و پردازش B ادامه می‌یابد. بالاخره پس از کامل شدن پردازش C، آخرین پوشه، A را از پشته حذف می‌کنیم، پشته خالی باقی مانده در نمودار ۴-۶ (و) به تصویر کشیده شده است و پردازش پروژه اصلی ما A ادامه می‌یابد. ملاحظه می‌کنید که در هر مرحله از پردازش بالا، پشته بطور اتوماتیک ترتیبی را نگه می‌دارد که نیازمند کامل کردن پردازش است. یک مثال مهم از چنین پردازشی در علوم کامپیوتر در جایی است که در آن A یک برنامه اصلی است و B، C و D زیربرنامه‌هایی هستند که با ترتیب داده شده فراخوانده می‌شوند.

۳-۶ نمایش پشته‌ها با آرایه

پشته‌ها را می‌توان در کامپیوتر به صورت‌های مختلف، معمولاً به وسیله لیست یکطرفه یا آرایه خطی نمایش داد. هر یک از پشته‌های ما، به وسیله یک آرایه خطی **STACK**، یک متغیر اشاره گر **TOP**، که حاوی مکان عنصر بالای پشته و یک متغیر **MAXSTK** است که بیشترین تعداد عناصر قابل نگهداری توسط پشته را به دست می‌دهد، نمایش داده می‌شود. اگر منظور ما غیر از این باشد به صورت صریح با ضمنی بیان می‌کنیم. شرط $TOP = 0$ یا $TOP = NULL$ مبین آن است که پشته خالی است.

شکل ۵-۶ چنین نمایشی از پشته را، توسط آرایه نشان می‌دهد. جهت سهولت در نمادگذاری، آرایه را به جای صورت عمودی آن، به صورت افقی رسم کرده‌ایم.



شکل ۵-۶

از آنجا که $TOP = 3$ ، پشته سه عنصر دارد، XXX و YYY و ZZZ، چون $MAXSTK = 8$ ، جا برای 5 عنصر در پشته وجود دارد.

عمل اضافه کردن (Push کردن) یک عنصر به درون یک پشته و عمل برداشتن یا حذف کردن (POP کردن) یک عنصر از یک پشته را می‌توان به ترتیب با زیربرنامه‌های Procedure زیر موسوم به PUSH و POP پیاده‌سازی کرد. در اجرای زیربرنامه PUSH، نخست باید تحقیق کنیم که آیا جا برای عنصر جدید در پشته وجود دارد یا خیر، اگر جواب منفی بود آنگاه وضعیت موسوم به سرریزی Overflow را داریم. به‌طور مشابه، در اجرای زیربرنامه POP نخست باید تحقیق کنیم که آیا عنصری در پشته برای حذف وجود دارد یا خیر، اگر جواب منفی است آنگاه وضعیت موسوم به زیرریزی UnderFlow را داریم.

Procedure 6.1: PUSH(STACK, TOP, MAXSTK, ITEM)

This procedure pushes an ITEM onto a stack.

1. [Stack already filled?]
If $TOP = MAXSTK$, then: Print: OVERFLOW, and Return.
2. Set $TOP := TOP + 1$. [Increases TOP by 1.]
3. Set $STACK[TOP] := ITEM$. [Inserts ITEM in new TOP position.]
4. Return.

Procedure 6.2: POP(STACK, TOP, ITEM)

This procedure deletes the top element of STACK and assigns it to the variable ITEM.

1. [Stack has an item to be removed?]
If $TOP = 0$, then: Print: UNDERFLOW, and Return.
2. Set $ITEM := STACK[TOP]$. [Assigns TOP element to ITEM.]
3. Set $TOP := TOP - 1$. [Decreases TOP by 1.]
4. Return.

اغلب TOP و MAXSTK متغیرهای سراسری هستند از این‌رو زیربرنامه‌ها را می‌توان تنها با استفاده از

POP(STACK, ITEM) و PUSH(STACK, ITEM)

به ترتیب فرا خواند. خاطر نشان می‌کنیم که مقدار TOP قبل از اضافه شدن عنصر در PUSH تغییر می‌کند اما مقدار TOP بعد از حذف شدن عنصر در POP تغییر می‌کند.

مثال ۲-۶

(الف) پشته شکل ۵-۶ را در نظر بگیرید. عمل **PUSH(STACK, WWW)** را به صورت زیر شبیه‌سازی می‌کنیم:

1. Since $TOP = 3$, control is transferred to Step 2.
2. $TOP = 3 + 1 = 4$.
3. $STACK[TOP] = STACK[4] = WWW$.
4. Return.

توجه دارید که WWW اکنون عنصر بالای پشته است.

(ب) مجدداً پشته شکل ۵-۶ را در نظر بگیرید. این بار عمل **POP(STACK, ITEM)** را به صورت زیر شبیه‌سازی می‌کنیم:

1. Since $TOP = 3$, control is transferred to Step 2.
2. $ITEM = ZZZ$.
3. $TOP = 3 - 1 = 2$.
4. Return.

ملاحظه می‌کنید که $STACK[TOP] = STACK[2] = YYY$ اکنون عنصر بالای پشته است.

به حداقل رساندن سرریزی

یک تفاوت اساسی بین زیرریزی و سرریزی در ارتباط با پشته‌ها نمایان می‌شود. زیرریزی به میزان زیادی به الگوریتم داده شده و داده ورودی بستگی دارد و از این‌رو برنامه‌نویس هیچ کنترل مستقیمی بر آن ندارد. از طرف دیگر، سرریزی بستگی به انتخاب برنامه‌نویس برای مقدار حافظه‌ای دارد که برای هر پشته ذخیره می‌کند، همچنین این انتخاب تعداد دفعات وقوع سرریزی را تحت الشعاع خود قرار می‌دهد. در حالت کلی، تعداد عناصر یک پشته با اضافه شدن یا کم شدن عناصر تغییر می‌کند. بنابراین، انتخاب ویژه مقدار حافظه برای یک پشته داده شده، مستلزم توازن بین زمان و حافظه است. به‌ویژه این که، در ابتداء ذخیره مقدار زیاد حافظه برای هر پشته تعداد دفعات وقوع سرریزی را کاهش می‌دهد. با وجود این که در اکثر کارها به‌ندرت از حافظه زیاد استفاده می‌شود، مصرف حافظه زیاد برای جلوگیری از

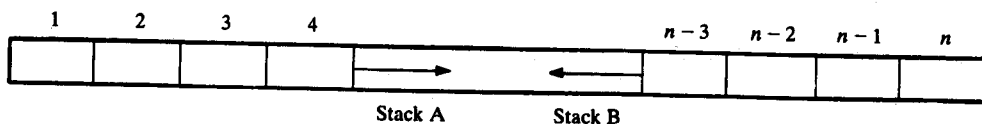
مسئله سرریزی پرهزینه خواهد بود و زمان مورد نیاز برای حل مسئله سرریزی، نظیر اضافه کردن حافظه به پشته می‌تواند پرهزینه‌تر از حافظه ذخیره شده باشد.

روشهای متعددی وجود دارد که نمایش آرایه‌های پشته‌ها را به گونه‌ای اصلاح می‌کند که مقدار فضای ذخیره شده برای بیش از یک پشته را می‌تواند با کارایی بیشتری مورد استفاده قرار دهد. اغلب این روشها خارج از حدود این درس است. یک نمونه از چنین روشی در مثال زیر بیان شده است.

مثال ۳-۶

فرض کنید یک الگوریتم داده شده به دو پشته A و B احتیاج دارد. برای پشته A یک آرایه STACK با n_1 عنصر و برای پشته B یک آرایه STACK با n_2 عنصر می‌توان تعریف کرد. سرریزی وقتی اتفاق می‌افتد که یا پشته A شامل بیش از n_1 عنصر باشد یا پشته B بیش از n_2 عنصر داشته باشد.

فرض کنید بجای این که یک آرایه STACK با $n = n_1 + n_2$ عنصر برای پشته‌های A و B تعریف کنیم نظیر آنچه که در شکل ۶-۶ به تصویر درآمده است، STACK[1] را به صورت پائین پشته A تعریف کنیم و به A اجازه دهیم به طرف راست رشد کند و STACK[n] را به صورت پائین پشته B تعریف کنیم و به B اجازه دهیم به طرف چپ رشد کند. در این حالت، سرریزی تنها وقتی اتفاق می‌افتد که A و B بیش از $n = n_1 + n_2$ عنصر داشته باشند. این روش معمولاً تعداد دفعات وقوع سرریزی را کاهش می‌دهد حتی اگر ما تعداد کل فضای ذخیره شده برای دو پشته را افزایش ندهیم. در استفاده از این ساختمان داده عملیات PUSH و POP لازم است اصلاح شوند.



شکل ۶-۶

۴-۶ عبارتهای محاسباتی؛ نمادگذاری لهستانی

فرض کنید Q یک عبارت محاسباتی شامل ثابت‌ها و عملیات ریاضی باشد. این بخش الگوریتمی را ارائه می‌دهد که مقدار Q را با استفاده از نمادگذاری لهستانی معکوس یا نمادگذاری پسوندی پیدا می‌کند. ملاحظه خواهید کرد که پشته ابزار اساسی برای این الگوریتم است.

یادآور می‌شویم که عملیات دودویی در Q ممکن است دارای سطوح تقدّم مختلف باشند. به‌ویژه این که فرض را بر سه سطح تقدم یا اولویت زیر برای پنج عمل دودویی متداول قرار می‌دهیم:

بالاترین اولویت · توان ↑

بعد از بالاترین اولویت : ضرب (*) و تقسیم (/)

پائین‌ترین اولویت : جمع (+) و تفریق (-)

ملاحظه می‌کنید که ما برای توان از نماد زبان BASIC استفاده می‌کنیم. جهت سهولت فرض می‌کنیم که Q شامل هیچ عمل یگانی نیست (نظیر علامت منفی در ابتدای عبارت b -). علاوه بر این فرض می‌کنیم که در تمام عبارت بدون پرانتز، عملیات هم‌سطح از چپ به راست اجرا می‌شوند. این فرض استاندارد نیست چون برخی از زبانهای برنامه‌نویسی عمل توان‌رساندن را از راست به چپ اجرا می‌کنند.

مثال ۴-۶

فرض کنید بخواهیم عبارت محاسباتی بدون پرانتز زیر را ارزیابی کنیم :

$$2 \uparrow 3 + 5 * 2 \uparrow 2 - 12 / 6$$

نخست توان را ارزیابی می‌کنیم، نتیجه چنین است :

$$8 + 5 * 4 - 12 / 6$$

آنگاه ضرب و تقسیم را ارزیابی می‌کنیم که به دست می‌آید $8 + 20 - 2$ در نهایت جمع و تفریق را ارزیابی می‌کنیم که نتیجه نهایی 26 است. ملاحظه می‌کنید که این عبارت سه بار پیمایش می‌شود که هربار متناظر با یک سطح از اولویت عملیات است.

نمادگذاری لهستانی

در متداول‌ترین عملیات محاسباتی، عملگر بین دو عملوند قرار می‌گیرد. به عنوان مثال

$$A + B \quad C - D \quad E * F \quad G / H$$

این نمادگذاری، نمادگذاری میانوندی نامیده می‌شود. با این نمادگذاری، مابین دو عبارت

$$(A + B) * C \quad \text{و} \quad A + (B * C)$$

با استفاده از پرانتزگذاری‌ها یا برخی از قراردادهای اولویت عملگرها نظیر سطوح متداول اولویت‌ها که در بالا مورد بررسی قرار گرفت تمایز قائل هستیم. بنابراین، ترتیب عملگرها و عملوندها در یک عبارت محاسباتی با توجه به ترتیبی که در آن عملیات اجرا می‌شوند به‌طور منحصر بفرد تعیین نمی‌شود.

نمادگذاری لهستانی : این نامگذاری که پس از ریاضیدان لهستانی یان لوکاسیویچ صورت گرفته است مربوط به نمادگذاری‌ای می‌شود که در آن، عملگر قبل از دو عملوند قرار می‌گیرد.

برای مثال :

$$+ AB \quad - CD \quad * EF \quad / GH$$

ما مرحله به مرحله، عبارتهای میانوندی زیر را با استفاده از دو گروه [] به نماد لهستانی تبدیل می‌کنیم که مبین تبدیل قسمت به قسمت آن است :

$$\begin{aligned}(A + B) * C &= [+AB] * C = ++ABC \\ A + (B * C) &= A + [*BC] = +A*BC \\ (A + B)/(C - D) &= [+AB]/[-CD] = /+AB-CD\end{aligned}$$

خاصیت اساسی نمادگذاری لهستانی آن است، ترتیبی که در آن عملیات انجام می‌شوند به وسیله مکان عملگرها و عملوندهای عبارت به‌طور کامل تعیین می‌شود. بنابراین هنگام نوشتن عبارتها با نماد لهستانی به هیچ پراوتزی نیاز نیست.

نماد لهستانی معکوس در ارتباط با نمادگذاری مشابه‌ای است که در آن نماد عملگر پس از دو عملوند قرار می‌گیرد :

$$AB + \quad CD - \quad EF * \quad GH /$$

در اینجا نیز برای تعیین ترتیب عملیات هر عبارت محاسباتی نوشته شده با نماد لهستانی معکوس به هیچ پراوتزی نیاز نیست. این نمادگذاری اغلب نمادگذاری پسوندی نامیده می‌شود درحالی که نمادگذاری پیشوندی اصطلاحی است که برای نمادگذاری لهستانی بکار می‌رود که در پاراگراف قبل مورد بررسی قرار گرفت.

کامپیوتر معمولاً عبارت محاسباتی نوشته شده به صورت نمادگذاری میانوندی را در دو مرحله ارزیابی می‌کند. نخست عبارت را به صورت نمادگذاری پسوندی تبدیل می‌کند و آنگاه عبارت پسوندی را ارزیابی می‌کند. در هر مرحله، پشته، ابزار اصلی‌ای است که برای انجام این کار مشخص مورد استفاده قرار می‌گیرد. ما این کاربرد پشته‌ها را به ترتیب عکس نشان می‌دهیم، یعنی نخست نشان می‌دهیم که چگونه از پشته‌ها برای ارزیابی عبارت پسوندی استفاده می‌شود و آنگاه نشان می‌دهیم که چگونه از پشته‌ها در تبدیل عبارتهای میانوندی به صورت عبارتهای پسوندی استفاده می‌شود.

ارزیابی یک عبارت پسوندی

فرض کنید P یک عبارت محاسباتی نوشته شده با نماد پسوندی باشد. الگوریتم زیر که از یک $STACK$ برای نگهداری عملوندها استفاده می‌کند P را ارزیابی می‌کند.

Algorithm 6.3: This algorithm finds the VALUE of an arithmetic expression P written in postfix notation.

1. Add a right parenthesis ")" at the end of P. [This acts as a sentinel.]
 2. Scan P from left to right and repeat Steps 3 and 4 for each element of P until the sentinel ")" is encountered.
 3. If an operand is encountered, put it on STACK.
 4. If an operator \otimes is encountered, then:
 - (a) Remove the two top elements of STACK, where A is the top element and B is the next-to-top element.
 - (b) Evaluate $B \otimes A$.
 - (c) Place the result of (b) back on STACK.
- [End of If structure.]
[End of Step 2 loop.]
5. Set VALUE equal to the top element on STACK.
 6. Exit.

توجه دارید که هنگام اجرای مرحله 5 تنها یک عدد در STACK خواهد بود.

مثال ۵-۶

عبارت محاسباتی P زیر را که به صورت نماد پسوندی نوشته شده است در نظر بگیرید :

P: 5, 6, 2, +, *, 12, 4, /, -

از کاماها به این دلیل برای جداکردن عناصر P استفاده کرده‌ایم تا 5,6,2 به صورت عدد 562 تعبیر نشود.

Symbol Scanned	STACK
(1) 5	5
(2) 6	5, 6
(3) 2	5, 6, 2
(4) +	5, 8
(5) *	40
(6) 12	40, 12
(7) 4	40, 12, 4
(8) /	40, 3
(9) -	37
(10))	

شکل ۷-۶

عبارت میانوندی Q معادل آن به صورت زیر است :

Q: $5 * (6 + 2) - 12 / 4$

توجه دارید که در عبارت میانوندی Q به پرانتز احتیاج داریم اما در عبارت پسوندی P هیچ احتیاجی به پرانتزگذاری نیست.

P را با شبیه‌سازی الگوریتم 6.3 ارزیابی می‌کنیم. نخست یک پرانتز بسته نگهبان در انتهای P اضافه می‌کنیم که به دست می‌آید:

P: 5, 6, 2, +, *, 12, 4, /, -,)
 (1) (2) (3) (4) (5) (6) (7) (8) (9) (10)

جهت سهولت در مراجعه عناصر P، از چپ به راست شماره‌گذاری شده‌اند. شکل ۷-۶ محتوای STACK را به محض جستجو و خواندن هر عنصر P نشان می‌دهد. عدد آخر در STACK یعنی 37 که در VALUE جایگزین شده است، هنگامی که نگهبان "(" را جستجو و می‌خواند مقدار P است.

تبدیل عبارتهای میانوندی به عبارتهای پسوندی

فرض کنید Q یک عبارت محاسباتی باشد که با نماد میانوندی نوشته شده است. علاوه بر عملوندها و عملگرها، Q نیز می‌تواند شامل پرانتزهای چپ و راست باشد. فرض می‌کنیم که عملگرها در Q تنها شامل عملگرهای توان (\uparrow)، ضرب ($*$)، تقسیم ($/$)، جمع ($+$) و تفریق ($-$) می‌باشد و مانند بالا سه سطح تقدم یا اولویت متداول دارد. علاوه بر این فرض می‌کنیم عملگرهای هم‌سطح، من جمله عملگرهای توان از چپ به راست اجرا می‌شوند مگر آن که با پرانتزگذاری خلاف آن بیان شود. این قرارداد استاندارد نیست چون عبارتها می‌توانند شامل عملگرهای یکانی باشند و برخی از زبانهای برنامه‌نویسی عمل توان‌رساندن را از راست به چپ اجرا می‌کنند. با وجود این، ما از این فرضها جهت ساده‌شدن الگوریتمها استفاده می‌کنیم.

الگوریتم زیر عبارت میانوندی Q را به عبارت پسوندی معادل آن P تبدیل می‌کند. این الگوریتم از یک پشته برای نگهداری موقت عملگرها و پرانتزهای چپ استفاده می‌کند. عبارت پسوندی P با استفاده از عملوندها از Q و عملگرهایی که از STACK حذف می‌شود از چپ به راست ساخته می‌شوند. کار را با Push کردن پرانتز چپ به درون STACK شروع می‌کنیم و در پایان Q یک پرانتز راست اضافه می‌کنیم. الگوریتم هنگامی کامل می‌شود که STACK خالی باشد.

Algorithm 6.4: POLISH(Q, P)

Suppose Q is an arithmetic expression written in infix notation. This algorithm finds the equivalent postfix expression P.

1. Push "(" onto STACK, and add ")" to the end of Q.
2. Scan Q from left to right and repeat Steps 3 to 6 for each element of Q until the STACK is empty:
3. If an operand is encountered, add it to P.
4. If a left parenthesis is encountered, push it onto STACK.
5. If an operator \otimes is encountered, then:
 - (a) Repeatedly pop from STACK and add to P each operator (on the top of STACK) which has the same precedence as or higher precedence than \otimes .
 - (b) Add \otimes to STACK.
 [End of If structure.]
6. If a right parenthesis is encountered, then:
 - (a) Repeatedly pop from STACK and add to P each operator (on the top of STACK) until a left parenthesis is encountered.
 - (b) Remove the left parenthesis. [Do not add the left parenthesis to P.]
 [End of If structure.]
- [End of Step 2 loop.]
7. Exit.

اصطلاحی که گاهی اوقات در مرحله 5 مورد استفاده قرار می‌گیرد \otimes است که به سطح پائین خودش اشاره می‌کند.

مثال ۶-۶

عبارت محاسباتی میانوندی Q زیر را در نظر بگیرید:

$$Q: A + (B * C - (D / E \uparrow F) * G) * H$$

الگوریتم 6.4 را شبیه‌سازی می‌کنیم تا Q را به عبارت پسوندی معادل آن P تبدیل کند. نخست "(" را به داخل STACK، Push می‌کنیم و آنگاه "(" را در انتهای Q اضافه می‌کنیم که حاصل می‌شود:

$$Q: A + (B * C - (D / E \uparrow F) * G) * H)$$

(1) (2) (3) (4) (5) (6) (7) (8) (9) (10) (11) (12) (13) (14) (15) (16) (17) (18) (19) (20)

عنصرهای Q اکنون جهت سهولت در مراجعه به آنها از چپ به راست شماره‌گذاری شده‌اند. شکل ۸-۶ وضعیت STACK و وضعیت رشته P را وقتی که هر عنصر Q جستجو و خوانده می‌شود نشان می‌دهد. ملاحظه می‌کنید که

(۱) هر عملوند فقط به P اضافه می‌شود و STACK تغییر نمی‌کند.

(۲) عملگر تفریق (-) در ردیف ۷، * را از STACK به P ارسال می‌کند قبل از آنها (-) به داخل STACK، Push شود.

(۳) پرانتز راست در ردیف ۱۴، ↑ و آنگاه / را از STACK به P ارسال می‌کند و آنگاه پرانتز چپ را از بالای STACK حذف می‌کند.

(۴) پرانتز راست در ردیف ۲۰، * و آنگاه + را از STACK به P ارسال می‌کند و آنگاه پرانتز چپ را از بالای STACK حذف می‌کند.

پس از اجرای مرحله ۲۰، STACK خالی است و

P: A B C * D E F ↑ / G * - H * +

که عبارت پسوندی مورد نیاز معادل Q است.

Symbol Scanned	STACK	Expression P
(1) A	(A
(2) +	(+	A
(3) ((+ (A
(4) B	(+ (A B
(5) *	(+ (*	A B
(6) C	(+ (*	A B C
(7) -	(+ (-	A B C *
(8) ((+ (- (A B C *
(9) D	(+ (- (A B C * D
(10) /	(+ (- (/	A B C * D
(11) E	(+ (- (/	A B C * D E
(12) ↑	(+ (- (/ ↑	A B C * D E
(13) F	(+ (- (/ ↑	A B C * D E F
(14))	(+ (-	A B C * D E F ↑ /
(15) *	(+ (- *	A B C * D E F ↑ /
(16) G	(+ (- *	A B C * D E F ↑ / G
(17))	(+	A B C * D E F ↑ / G * -
(18) *	(+ *	A B C * D E F ↑ / G * -
(19) H	(+ *	A B C * D E F ↑ / G * - H
(20))		A B C * D E F ↑ / G * - H * +

شکل ۸-۶

۵-۶ QUICKSORT، یک کاربرد از پشته‌ها

فرض کنید A یک لیست با n عنصر داده‌ای باشد. منظور ما از "مرتب‌کردن A" عمل تجدید آرایش عناصر A است تا این عناصر با یک ترتیب منطقی کنار هم قرار گیرند. یعنی وقتی که A از داده‌های عددی تشکیل می‌شود به صورت عددی مرتب شده باشند و وقتی A از داده‌های کاراکتری تشکیل می‌شود به

صورت الفبایی مرتب شده باشند. موضوع مرتب‌کردن، به همراه الگوریتم‌های مختلف آن بطور اساسی در فصل ۹ مورد بررسی قرار می‌گیرد. این بخش تنها یک الگوریتم مرتب‌کردن را ارائه می‌دهد که الگوریتم QuickSort نام دارد تا یک کاربرد از پشته‌ها را نشان می‌دهد.

QuickSort الگوریتمی از نوع تقسیم و غلبه است. به بیان دیگر، مسأله مرتب‌کردن یک مجموعه به مسأله مرتب‌کردن دو مجموعه کوچکتر تبدیل می‌شود. ما این مرحله ساده‌شدن را به کمک یک مثال مشخص توضیح می‌دهیم.

فرض کنید A لیست 12 عددی زیر باشد:

(66) 88, 22, 99, 60, 40, 90, 77, 55, 11, 33, (44)

مرحله ساده‌شدن الگوریتم QuickSort مکان نهایی یکی از اعداد را پیدا می‌کند. در این مثال از اولین عدد یعنی 44 استفاده می‌کنیم. این کار به صورت زیر انجام می‌شود. با آخرین عدد یعنی 66 شروع می‌کنیم لیست را از راست به چپ پیمایش می‌کنیم هر عدد را با 44 مقایسه می‌کنیم و کار را در نخستین عدد کوچکتر از 44 متوقف می‌کنیم. این عدد 22 است. جای 44 و 22 را عوض می‌کنیم، لیست زیر به دست می‌آید:

66 88, (44), 99, 60, 40, 90, 77, 55, 11, 33, (22)

(ملاحظه می‌کنید که اعداد 88 و 66 که در طرف راست 44 هستند بزرگتر از 44 می‌باشند.) با 22 شروع می‌کنیم به دنبال آن لیست را در جهت مخالف، از چپ به راست پیمایش می‌کنیم. هر دو عدد را با 44 مقایسه کرده و کار را در نخستین عدد بزرگتر از 44 متوقف می‌کنیم. این عدد 55 است. جای دو عدد 44 و 55 را عوض می‌کنیم، لیست زیر به دست می‌آید.

66 88, (55), 99, 60, 40, 90, 77, (44), 11, 33, 22

(ملاحظه می‌کنید که اعداد 22، 33 و 11 در طرف چپ 44 همگی کوچکتر از 44 هستند) این بار با 55 شروع می‌کنیم، اکنون لیست را در جهت اصلی، از راست به چپ پیمایش می‌کنیم این کار را تا آنجا ادامه می‌دهیم تا به اولین عدد کوچکتر از 44 برسیم. این عدد 40 است. جای دو عدد 44 و 40 را عوض می‌کنیم، در نتیجه آن، لیست زیر حاصل می‌شود:

66 88, 55, 99, 60, (44), 90, 77, (40), 11, 33, 22

(مجدداً اعداد طرف راست 44 همگی بزرگتر از 44 هستند). با 40 شروع می‌کنیم، لیست را از چپ به راست پیمایش می‌کنیم. اولین عدد بزرگتر از 44 عدد 77 است. جای دو عدد 44 و 77 را عوض می‌کنیم، در نتیجه آن، لیست زیر حاصل می‌شود:

66 88, 55, 99, 60, (77), 90, (44), 40, 11, 33, 22

(این بار عدد طرف چپ 44 همگی کوچکتر از 44 هستند.) با 77 شروع می‌کنیم. لیست را از راست به چپ برای جستجوی یک عدد کوچکتر از 44 پیمایش می‌کنیم. قبل از ملاقات با 44 چنین عددی را ملاقات نمی‌کنیم. معنی آن این است که تمام اعداد پیمایش شدند و با 44 مقایسه شدند. علاوه بر این، تمام اعداد کوچکتر از 44 که اکنون در طرف چپ 44 هستند تشکیل لیست کوچکی از اعداد می‌دهند و تمام اعداد بزرگتر از 44 که اکنون در طرف راست 44 هستند تشکیل لیست کوچکی از اعداد می‌دهند. این دو وضعیت در زیر نشان داده شده است.

22,	33,	11,	40,	(44)	90,	77,	60,	99,	55,	88,	66
First sublist					Second sublist						
لیست طرف چپ					لیست طرف راست						

بدین ترتیب 44 به صورت صحیحی در مکان نهایی‌اش قرار گرفته است و کار مرتب‌کردن لیست اصلی A اکنون به کار مرتب‌کردن هر یک از دو لیست طرف چپ و راست بالا ساده می‌شود. مرحله ساده‌شدن بالا بر روی هر یک از دو لیست اخیر که شامل 2 یا چند عنصر است تکرار می‌شود. از آنجا که تنها می‌توانیم، یکی از دو زیرلیست را پردازش کنیم، باید توانایی نگهداری چند لیست کوچک را، برای پردازش آتی داشته باشیم. این کار با استفاده از دو پشته تحت نامهای LOWER و UPPER انجام می‌شود که بطور موقت چنین لیستهای کوچکی را نگه می‌دارد. به بیان دیگر آدرسهای اولین و آخرین عناصر هر یک از این لیستهای کوچک که مقادیر کرانه‌ای یا مرزی آن نامیده می‌شود به درون پشته‌های LOWER و UPPER، PUSH می‌شود و مرحله ساده‌سازی یک لیست کوچک تنها پس از حذف مقادیر مرزی آن از پشته‌ها، اعمال می‌شود. مثال زیر روش استفاده از پشته‌های LOWER و UPPER را روشن می‌سازد.

مثال ۷-۶

لیست A بالا با $n = 12$ عنصر را در نظر بگیرید. الگوریتم با PUSH کردن مقادیر مرزی 1 و 12 از A به داخل پشته‌ها شروع می‌شود که به دست می‌آید:

LOWER: 1 UPPER: 12

برای اعمال مرحله ساده‌سازی، نخست الگوریتم مقادیر 1 و 12 را از بالای پشته‌ها حذف می‌کند، باقی می‌ماند:

LOWER: (empty) UPPER: (empty)

و آنگاه مرحله ساده‌شدن را به همان صورتی که در بالا انجام شد بر لیست متناظر $A[12], A[2], A[1], \dots$ اعمال می‌کنیم. نهایتاً عنصر اول، یعنی 44 در $A[5]$ قرار می‌گیرد. بنابراین الگوریتم مقادیر مرزی 1 و 4 از

لیست کوچک شده اول و مقادیر مرزی 6 و 12 از لیست کوچک‌شده دوم را به داخل پشته‌ها Push می‌کند، نتیجه می‌شود:

LOWER: 1, 6 UPPER: 4, 12

مجدداً برای اعمال مرحله ساده شدن، الگوریتم مقادیر 6 و 12 را از بالای پشته‌ها حذف می‌کند، نتیجه می‌شود:

LOWER: 1 UPPER: 4

و آنگاه مرحله ساده‌شدن را بر لیست کوچک متناظر آن $A[6]$, $A[7]$, $A[12]$, اعمال می‌کنیم. مرحله ساده‌شدن، این لیست را مطابق شکل ۹-۶ تغییر می‌دهد.

$A[6]$	$A[7]$	$A[8]$	$A[9]$	$A[10]$	$A[11]$	$A[12]$
90,	77,	60,	99,	55,	88,	66
66,	77,	60,	99,	55,	88,	90
66,	77,	60,	90,	55,	88,	99
66,	77,	60,	88,	55,	90,	99

لیست کوچک دوم لیست کوچک اول

شکل ۹-۶

ملاحظه می‌کنید که لیست کوچک دوم تنها یک عنصر دارد. بنابراین، الگوریتم تنها مقادیر مرزی 6 و 10 لیست کوچک اول را به داخل پشته‌ها Push می‌کند. نتیجه می‌دهد:

LOWER: 1, 6 UPPER: 4, 10

و الی آخر. الگوریتم وقتی پایان می‌یابد که پشته‌ها حاوی هیچ لیست کوچک‌شده‌ای که پردازش نشده است توسط مرحله ساده‌شدن نباشد.

بیان رسمی الگوریتم QuickSort به صورت زیر است. جهت سهولت در نمادگذاری و ملاحظات آموزشی، الگوریتم به دو قسمت تقسیم می‌شود. قسمت اول زیربرنامه Procedure را ادامه می‌دهد که QUICK نام دارد و مرحله ساده‌سازی بالا را در الگوریتم انجام می‌دهد و قسمت دوم از QUICK برای مرتب‌کردن تمام لیست استفاده می‌کند.

ملاحظه می‌کنید که مرحله (iii) از (c) 2 ضروری نیست و جهت تأکید در تقارن بین مرحله 2 و مرحله 3 اضافه شده است. در این Procedure فرض نشده است که عناصر A از هم متمایز هستند. در غیر اینصورت شرط $LOC \neq RIGHT$ در مرحله (a) 2 و شرط $LEFT \neq LOC$ در مرحله (a) 3 قابل حذف

خواهد بود.

Procedure 6.5: QUICK(A, N, BEG, END, LOC)

Here A is an array with N elements. Parameters BEG and END contain the boundary values of the sublist of A to which this procedure applies. LOC keeps track of the position of the first element A[BEG] of the sublist during the procedure. The local variables LEFT and RIGHT will contain the boundary values of the list of elements that have not been scanned.

1. [Initialize.] Set $LEFT := BEG$, $RIGHT := END$ and $LOC := BEG$.
2. [Scan from right to left.]
 - (a) Repeat while $A[LOC] \leq A[RIGHT]$ and $LOC \neq RIGHT$:
 $RIGHT := RIGHT - 1$.
 [End of loop.]
 - (b) If $LOC = RIGHT$, then: Return.
 - (c) If $A[LOC] > A[RIGHT]$, then:
 - (i) [Interchange $A[LOC]$ and $A[RIGHT]$.]
 $TEMP := A[LOC]$, $A[LOC] := A[RIGHT]$,
 $A[RIGHT] := TEMP$.
 - (ii) Set $LOC := RIGHT$.
 - (iii) Go to Step 3.
3. [Scan from left to right.]
 - (a) Repeat while $A[LEFT] \leq A[LOC]$ and $LEFT \neq LOC$:
 $LEFT := LEFT + 1$.
 [End of loop.]
 - (b) If $LOC = LEFT$, then: Return.
 - (c) If $A[LEFT] > A[LOC]$, then
 - (i) [Interchange $A[LEFT]$ and $A[LOC]$.]
 $TEMP := A[LOC]$, $A[LOC] := A[LEFT]$,
 $A[LEFT] := TEMP$.
 - (ii) Set $LOC := LEFT$.
 - (iii) Go to Step 2.

الگوریتم قسمت دوم به صورت زیر است، همانگونه که در بالا ملاحظه کردید، UPPER و LOWER پشته‌هایی هستند که در آنها مقادیر مرزی لیستهای کوچک شده ذخیره می‌شود. طبق معمول از $NULL = 0$ استفاده می‌کنیم.

Algorithm 6.6: (Quicksort) This algorithm sorts an array A with N elements.

1. [Initialize.] TOP := NULL.
2. [Push boundary values of A onto stacks when A has 2 or more elements.]
If $N > 1$, then: TOP := TOP + 1, LOWER[1] := 1, UPPER[1] := N.
3. Repeat Steps 4 to 7 while TOP \neq NULL.
4. [Pop sublist from stacks.]
Set BEG := LOWER[TOP], END := UPPER[TOP],
TOP := TOP - 1.
5. Call QUICK(A, N, BEG, END, LOC). [Procedure 6.5.]
6. [Push left sublist onto stacks when it has 2 or more elements.]
If BEG < LOC - 1, then:
TOP := TOP + 1, LOWER[TOP] := BEG,
UPPER[TOP] := LOC - 1.
[End of If structure.]
7. [Push right sublist onto stacks when it has 2 or more elements.]
If LOC + 1 < END, then:
TOP := TOP + 1, LOWER[TOP] := LOC + 1,
UPPER[TOP] := END.
[End of If structure.]
- [End of Step 3 loop.]
8. Exit.

پیچیدگی الگوریتم QuickSort

زمان اجرای یک الگوریتم مرتب‌کردن معمولاً با تعداد $f(n)$ دفعات مقایسه مورد نیاز برای مرتب‌کردن n عنصر اندازه‌گیری می‌شود. الگوریتم QuickSort که دارای تعداد n ادی مقایسه است به شدت مورد مطالعه و بررسی قرار گرفته است. در حالت کلی، این الگوریتم در بدترین حالت زمان اجرایی از مرتبه $n^2/2$ دارد اما زمان اجرای حالت میانگین آن از مرتبه $n \log n$ است. آن در زیر ارائه شده است.

بدترین حالت وقتی اتفاق می‌افتد که لیست از قبل مرتب شده باشد. آنگاه نخستین عنصر به n مقایسه احتیاج دارد تا معلوم شود در مکان اول قرار می‌گیرد. علاوه بر این، لیست کوچک شده اول خالی خواهد بود اما لیست کوچک شده دوم $n - 1$ عنصر دارد. بنابراین عنصر دوم به $n - 1$ مقایسه احتیاج دارد تا معلوم شود در مکان دوم قرار می‌گیرد و الی آخر. در نتیجه، مجموعاً تعداد

$$f(n) = n + (n - 1) + \dots + 2 + 1 = \frac{n(n + 1)}{2} = \frac{n^2}{2} + O(n) = O(n^2)$$

مقایسه انجام می‌شود. ملاحظه می‌کنید که این عدد برابر پیچیدگی الگوریتم مرتب‌کردن حبابی است (ر. ک. بخش ۶-۴).

پیچیدگی $f(n) = O(n \log n)$ حالت میانگین از این واقعیت ناشی می‌شود که به طور متوسط، هر مرحله ساده‌سازی در الگوریتم دو لیست کوچکتر تولید می‌کند. بنابراین:

(۱) با ساده‌شدن لیست اولیه، ۱ عنصر در جای خود قرار می‌گیرد و دو لیست کوچکتر تولید می‌شود.
 (۲) با ساده‌شدن دو لیست، ۲ عنصر در جای خود قرار می‌گیرند و چهار لیست کوچکتر تولید می‌شود.
 (۳) با ساده‌شدن چهار لیست، ۴ عنصر در جای خود قرار می‌گیرند و هشت لیست کوچکتر تولید می‌شود.

(۴) با ساده‌شدن دو لیست، ۸ عنصر در جای خود قرار می‌گیرند و شانزده لیست کوچکتر تولید می‌شود.
 و الی آخر. ملاحظه می‌کنید که مرحله ساده‌شدن در K امین سطح مکان عنصر 2^{k-1} ام را پیدا می‌کند. از این رو تقریباً $\log_2 n$ سطح ساده‌سازی وجود دارد. علاوه براین، هر سطح حداکثر از n مقایسه استفاده می‌کند. بنابراین $f(n) = O(n \log n)$ در واقع تحلیل ریاضی و ملاحظات تجربی هر دو نشان می‌دهند که

$$f(n) \approx 1.4[n \log n]$$

تعداد انتظاری مقایسه‌ها برای الگوریتم QuickSort است.

۶- زیربرنامه‌های بازگشتی

بازگشتی یک مفهوم بسیار مهم در علم کامپیوتر است. بسیاری از الگوریتم‌ها را می‌توان با استفاده از مفهوم بازگشتی به صورت کاراتری بیان کرد. این بخش، این ابزار قدرتمند را معرفی می‌کند و بخش ۸-۶ چگونگی پیاده‌سازی بازگشتی را با استفاده از پشته‌ها نشان می‌دهد.

فرض کنید P یک زیربرنامه Procedure باشد که حاوی یک دستور Call است که خودش را صدا می‌کند یا حاوی یک دستور Call است که زیربرنامه دوم را فرا می‌خواند که نهایتاً نتیجه دستور Call این است که زیربرنامه Procedure اصلی را صدا می‌زند. در آن صورت به P یک زیربرنامه بازگشتی می‌گویند، طوری که این برنامه به تعداد مرحله معین و محدودی اجرا می‌شود و پس از آن اجرا ادامه نمی‌یابد. هر زیربرنامه بازگشتی باید دو خاصیت زیر را داشته باشد:

(۱) باید معیار معینی وجود داشته باشد که معیار پایه یا مبنا نام دارد و باتوجه به آن معیار، زیربرنامه Procedure خودش را صدا نمی‌زند.

(۲) هرباری که زیربرنامه Procedure (به‌طور مستقیم یا غیرمستقیم) خودش را صدا می‌زند، باید به معیار پایه نزدیکتر شود.

یک زیربرنامه بازگشتی یا Recursive را با دو معیار بالا، خوش تعریف می‌گویند.

به‌طور مشابه، یک تابع را به صورت بازگشتی تعریف شده می‌گویند هرگاه تعریف تابع به خودش برگردد. مجدداً برای این که تعریف چرخی نباشد، باید دارای دو خاصیت زیر باشد:

(۱) باید آرگومانهای مشخصی وجود داشته باشد که به آن مقادیر پایه می‌گویند که به‌ازای این مقادیر

تابع خودش را صدا نمی‌زند.

(۲) هربار که تابع خودش را صدا می‌زند، آرگومان تابع باید به مقدار پایه نزدیکتر شود.

یک تابع بازگشتی را با این دو خاصیت نیز خوش تعریف می‌گویند.

مثال‌های زیر در روشن‌شدن مفهوم بازگشتی به شما کمک خواهد کرد:

تابع فاکتوریل!

حاصل ضرب اعداد صحیح مثبت از ۱ تا خود n ، n فاکتوریل نامیده می‌شود و معمولاً آن را با $n!$ نمایش می‌دهند. بنابراین

$$n! = 1.2.3...(n-2)(n-1)n$$

بنابه قرارداد $0! = 1$ تعریف می‌شود. بدین ترتیب تابع فاکتوریل برای تمام اعداد صحیح مثبت تعریف می‌شود. بنابراین داریم

$$\begin{array}{lllll} 0! = 1 & 1! = 1 & 2! = 1 \cdot 2 = 2 & 3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6 & 4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24 \\ & 5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120 & 6! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 = 720 & & \end{array}$$

و الی آخر، ملاحظه می‌کنید که

$$6! = 6 \cdot 5! = 6 \cdot 120 = 720 \quad \text{و} \quad 5! = 5 \cdot 4! = 5 \cdot 24 = 120$$

یعنی برای هر عدد صحیح مثبت n تساوی زیر برقرار است:

$$n! = n \cdot (n-1)!$$

بنابراین تابع فاکتوریل را می‌توان به صورت زیر نیز تعریف کرد:

تعریف ۱-۶: (تابع فاکتوریل)

(الف) اگر $n = 0$ ، آنگاه $n! = 1$.

(ب) اگر $n > 0$ ، آنگاه $n! = n \cdot (n-1)!$.

ملاحظه می‌کنید که این تعریف $n!$ بازگشتی است، چون وقتی از $(n-1)$ استفاده می‌کند به خودش مراجعه می‌کند. بنابراین (الف) مقدار $n!$ به صورت صریح داده می‌شود حتی وقتی $n = 0$ است بدین ترتیب ۰ مقدار پایه است و (ب) مقدار $n!$ به‌ازای n دلخواه برحسب مقدار کوچکتر n تعریف می‌شود که به مقدار پایه ۰ نزدیک است. بنابراین، تعریف چرخشی نیست یا به عبارت دیگر، این تابع خوش تعریف است.

مثال ۶-۶

با استفاده از تعریف بازگشتی فاکتوریل، $4!$ را محاسبه کنید. این محاسبه نیازمند نه مرحله زیر است:

- (1) $4! = 4 \cdot 3!$
- (2) $3! = 3 \cdot 2!$
- (3) $2! = 2 \cdot 1!$
- (4) $1! = 1 \cdot 0!$
- (5) $0! = 1$
- (6) $1! = 1 \cdot 1 = 1$
- (7) $2! = 2 \cdot 1 = 2$
- (8) $3! = 3 \cdot 2 = 6$
- (9) $4! = 4 \cdot 6 = 24$

یعنی:

مرحله ۱: در این مرحله $4!$ برحسب $3!$ تعریف می‌شود، از این‌رو تا هنگام ارزیابی $3!$ باید محاسبه $4!$ به تعویق بیفتد. این تعویق با نوشتن مرحله بعدی به صورت پله‌ای مشخص شده است.

مرحله ۲: در اینجا $3!$ برحسب $2!$ تعریف می‌شود، از این‌رو تا هنگام ارزیابی $2!$ باید محاسبه $3!$ به تعویق بیفتد.

مرحله ۳: این مرحله $2!$ را برحسب $1!$ تعریف می‌کند.

مرحله ۴: این مرحله $1!$ را برحسب $0!$ تعریف می‌کند.

مرحله ۵: این مرحله $0!$ را می‌تواند به صورت صریح ارزیابی کند چون 0 مقدار پایه تعریف بازگشتی است.

مرحله‌های ۶ تا ۹. حال از آخر به اول برمی‌گردیم. برای محاسبه $1!$ از $0!$ استفاده می‌کنیم، از $1!$ برای محاسبه $2!$ ، از $2!$ برای محاسبه $3!$ و بالاخره از $3!$ برای محاسبه $4!$ استفاده می‌کنیم. این برگشت از آخر به اول با نوشتن مراحل محاسبات به صورت پله‌ای معکوس شده، بیان شده است.

ملاحظه می‌کنید که ما به ترتیب عکس از محاسبات به تعویق افتاده اصلی به اول برگشتیم. یادآور می‌شویم این نوع از پردازش به تعویق افتاده خود منتهی به استفاده از پشته‌ها می‌شود. بخش ۲-۶ را ببینید.

در زیر دو زیربرنامه Procedure ارائه شده است که هر یک از آنها n فاکتوریل را محاسبه می‌کند:

Procedure 6.7A: FACTORIAL(FACT, N)

This procedure calculates $N!$ and returns the value in the variable FACT.

1. If $N = 0$, then: Set $FACT := 1$, and Return.
2. Set $FACT := 1$. [Initializes FACT for loop.]
3. Repeat for $K = 1$ to N .
Set $FACT := K * FACT$.
[End of loop.]
4. Return.

Procedure 6.7B: FACTORIAL(FACT, N)

This procedure calculates $N!$ and returns the value in the variable FACT.

1. If $N = 0$, then: Set $FACT := 1$, and Return.
2. Call $FACTORIAL(FACT, N - 1)$.
3. Set $FACT := N * FACT$.
4. Return.

ملاحظه می‌کنید که زیربرنامه اول با استفاده از پردازش حلقه‌های تکرار N را ارزیابی می‌کند. از طرف دیگر، زیربرنامه دوم یک زیربرنامه بازگشتی است چون دارای پردازشی است که خودش را صدا می‌کند. برخی از زبانهای برنامه‌نویسی، به‌ویژه **FORTRAN** استفاده از چنین زیربرنامه‌های بازگشتی را مجاز نمی‌دانند.

فرض کنید P یک زیربرنامه بازگشتی باشد. در طی اجرای یک الگوریتم یا یک برنامه که حاوی P است، به هربار اجرای زیربرنامه P به صورت زیر یک شماره سطح نسبت می‌دهیم. در اجرای زیربرنامه اصلی P سطح ۱ جایگزین می‌شود و هربار که زیربرنامه P اجرا می‌شود، بخاطر یک احضار بازگشتی، سطح آن ۱ واحد بیشتر از سطح اجرایی است، که باعث احضار بازگشتی شده است. در مثال ۸-۶، مرحله ۱، سطح ۱ دارد. از این‌رو مرحله ۲ سطح ۲، مرحله ۳ سطح ۳، مرحله ۴ سطح ۴ و مرحله ۵ سطح ۵ دارد. از سوی دیگر، مرحله ۶ سطح ۴ دارد چون نتیجه یک بازگشت از سطح ۵ است. به بیان دیگر، مرحله ۶ و مرحله ۴ متعلق به همان سطح اجرا هستند. بطور مشابه، مرحله ۷ سطح ۳، مرحله ۸ سطح ۲ و مرحله نهایی، مرحله ۹، سطح اولیه ۱ دارد.

عمق بازگشتی یک زیربرنامه بازگشتی P با یک مجموعه معین از آرگومانها، بزرگترین شماره سطح P در طول اجرای آن است.

دنباله فیبوناچی

دنباله زیبا و معروف فیبوناچی که معمولاً با F_0 ، F_1 ، F_2 ، ... نمایش داده می‌شود به صورت زیر است:

$$0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, \dots$$

یعنی $F_0 = 0$ و $F_1 = 1$ و هر جمله بعدی مجموع دو جمله قبلی است. برای مثال، دو جمله بعدی دنباله بالا به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$34 + 55 = 89 \quad \text{و} \quad 55 + 89 = 144$$

تعریف رسمی این تابع به صورت زیر است:

تعریف ۲-۶: (دنباله فیبوناچی)

(الف) اگر $n = 0$ یا $n = 1$ ، آنگاه $F_n = n$.

(ب) اگر $n > 1$ ، آنگاه $F_n = F_{n-2} + F_{n-1}$.

این مثال دیگری از یک تعریف بازگشتی است، چون وقتی از F_{n-1} و F_{n-2} استفاده می‌کند این تعریف به خودش برمی‌گردد. در اینجا در (الف) مقادیر پایه 0 و 1 هستند و در (ب) مقدار F_n برحسب مقادیر کوچکتر از n تعریف می‌شود که نزدیک به مقادیر پایه هستند. بنابراین این تابع خوش تعریف است. زیربرنامه Procedure ای که جمله n ام دنباله فیبوناچی F_n را پیدا می‌کند به صورت زیر است:

Procedure 6.8: FIBONACCI(FIB, N)

این زیربرنامه F_N را محاسبه می‌کند و مقدار آن را در پارامتر اول FIB قرار می‌دهد و به برنامه احضارکننده تحویل می‌دهد:

1. If $N = 0$ or $N = 1$, then: Set $FIB := N$, and Return.
2. Call FIBONACCI(FIB, $N - 2$).
3. Call FIBONACCI(FIB, $N - 1$).
4. Set $FIB := FIB + FIB$.
5. Return.

این مثال دیگری از یک زیربرنامه بازگشتی است، چون زیربرنامه Procedure خودش را احضار می‌کنند. درواقع امر، این زیربرنامه دوبار خودش را احضار می‌کند. متذکر می‌شویم (ر.ک. مسأله ۱۶-۶) که می‌توان یک زیربرنامه Procedure با روش تکرار برای محاسبه F_n نوشت که در آن از زیربرنامه بازگشتی استفاده نشود.

الگوریتم‌های تجزیه یا الگوریتم‌های تقسیم و غلبه

مسأله P را که در ارتباط با مجموعه S است در نظر بگیرید. فرض کنید A الگوریتمی است که S را به مجموعه‌های کوچکتر افزایش می‌کند به گونه‌ای که حل مسأله P برای S، به حل P برای یک یا چند مجموعه کوچکتر منتهی شود. آنگاه A یک الگوریتم تقسیم و غلبه نامیده می‌شود.

دو مثال از الگوریتم‌های تقسیم و غلبه که قبلاً مورد بررسی قرار گرفت الگوریتمها QuickSort در بخش ۵-۶ و الگوریتم جستجوی دودویی در بخش ۷-۴ است، یادآوری می‌کنیم که الگوریتم QuickSort از یک مرحله ساده‌شدن برای تعیین مکان یک عنصر و مسأله مرتب‌کردن تمام مجموعه برای مسأله مرتب‌کردن مجموعه‌های کوچکتر استفاده می‌کند. الگوریتم جستجوی دودویی مجموعه

مرتب داده شده را به دو نیمه تقسیم می‌کند به گونه‌ای که مسأله جستجو برای یک عنصر در تمام مجموعه به مسأله جستجوی آن عنصر در یکی از دو نیمه منتهی می‌شود.

الگوریتم تقسیم و غلبه A را می‌توان به صورت یک زیربرنامه بازگشتی مورد توجه قرار داد. به این دلیل که وقتی آن را بر مجموعه‌های کوچکتر اعمال می‌کنیم الگوریتم A خودش را احضار می‌کند. معیار پایه و اصلی این الگوریتم‌ها معمولاً مجموعه‌های یک عنصری است. برای مثال در الگوریتم مرتب‌کردن، مجموعه یک عنصری بطور خودکار مرتب شده است و در الگوریتم جستجو، مجموعه یک عنصری تنها نیازمند یک مقایسه است.

تابع آکرمان Ackermann

تابع آکرمان یک تابع با دو آرگومان است که در هر یک از این آرگومانها می‌تواند هر عدد صحیح غیرمنفی: $0, 1, 2, \dots$ جایگزین شود. این تابع به صورت زیر تعریف می‌شود:

تعریف ۳-۶: (تابع آکرمان)

(الف) اگر $m = 0$ آنگاه $A(m, n) = n + 1$.

(ب) اگر $m \neq 0$ اما $n = 0$ آنگاه $A(m, n) = A(n - 1, 1)$.

(ج) اگر $m \neq 0$ و $n \neq 0$ آنگاه $A(m, n) = A(m - 1, A(m, n - 1))$.

در تابع آکرمان یک بار بیشتر، تعریف بازگشتی داریم چون تعریف قسمت‌های (ب) و (ج) به خودش رجوع می‌کند.

ملاحظه می‌کنید که $A(m, n)$ به صورت صریح تنها وقتی $m = 0$ است داده شده است. معیار پایه زوجهای مرتب زیر هستند:

$$(0, 0), (0, 1), (0, 2), (0, 3), \dots, (0, n), \dots$$

هرچند از تعریف روشن نمی‌شود اما مقدار هر $A(m, n)$ را می‌توان در نهایت برحسب مقدار تابع و براساس یک یا چند زوج مرتب پایه بیان کرد.

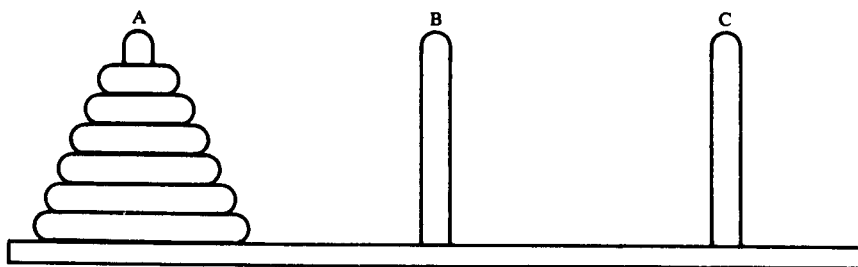
مقدار $A(1, 3)$ در مسأله ۱۷-۶ محاسبه می‌شود. حتی این حالت ساده نیازمند ۱۵ مرحله است. در حالت کلی، تابع آکرمان آنقدر پیچیده است که هر مقدار دلخواه را نمی‌توان با آن محاسبه کرد اما امکان محاسبه مثالهای بدیهی و ساده وجود دارد. اهمیت تابع آکرمان از کاربرد آن در منطق ریاضی ناشی

می‌شود. در اینجا این تابع اساساً به این خاطر بیان شده است تا مثال دیگری از یک تابع بازگشتی کلاسیک را ارائه دهد و نشان می‌دهیم که قسمت بازگشتی این تعریف ممکن است پیچیده باشد.

۷-۶ برج‌های هانوی

در بخش قبل مثالهایی چند از تعریف‌های بازگشتی و زیربرنامه‌های بازگشتی ارائه دادیم. این بخش چگونگی استفاده از زیربرنامه بازگشتی را به عنوان ابزاری جهت توسعه یک الگوریتم نشان می‌دهد که یک مسئله خاص را حل می‌کند. مسئله‌ای که برای این کار انتخاب شده است به مسئله برج‌های هانوی معروف است.

سه میله را در نظر بگیرید که با برجسب A، B، C مشخص شده‌اند و فرض کنید روی میله A تعداد n معین، n دیسک با اندازه‌های مختلف از بزرگ به کوچک قرار داده شده است. برای حالت $n = 6$ این وضعیت در شکل ۱۰-۶ نشان داده شده است.



شکل ۱۰-۶. وضعیت اولیه ایجاد برج‌های هانوی با $n = 6$ دیسک

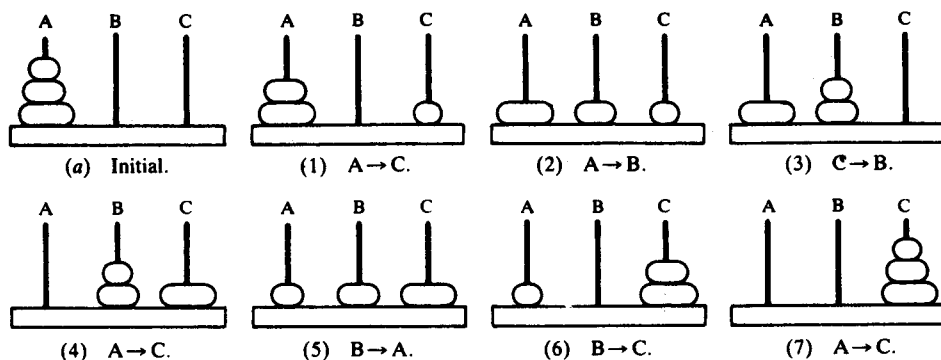
هدف بازی برج هانوی آن است که دیسکها را با استفاده از میله کمکی B، از میله A به میله C منتقل کنیم، قوانین این بازی به صورت زیر است:

(الف) در هر بار تنها یک دیسک را می‌توان انتقال داد. به‌طور مشخص، تنها دیسک بالایی هر میله را می‌توان به هر میله دیگر منتقل کرد.

(ب) در هیچ زمانی نمی‌توان دیسک بزرگتر را روی دیسک کوچکتر قرار داد.

گاهی اوقات نمایش دستور "دیسک بالای میله X را به میله Y منتقل کنید" را به صورت $X \rightarrow Y$ می‌نویسیم که در آن X و Y می‌تواند هر یک از سه میله داده شده باشد.

در شکل ۱۱-۶ راه حل مسأله برجهای هانوی برای $n = 3$ دیسک ارائه شده است.



شکل ۱۱-۶

ملاحظه می‌کنید که حل مسأله برجهای هانوی در این حالت، از هفت انتقال یا جابجایی زیر تشکیل شده است:

$n = 3$: دیسک بالای میله A را به میله C منتقل کنید.
 دیسک بالای میله A را به میله B منتقل کنید.
 دیسک بالای میله C را به میله B منتقل کنید.
 دیسک بالای میله A را به میله C منتقل کنید.
 دیسک بالای میله B را به میله A منتقل کنید.
 دیسک بالای میله B را به میله C منتقل کنید.
 دیسک بالای میله A را به میله C منتقل کنید.

به بیان دیگر،

$n = 3$: $A \rightarrow C$, $A \rightarrow B$, $C \rightarrow B$, $A \rightarrow C$, $B \rightarrow A$, $B \rightarrow C$, $A \rightarrow C$

برای روشن شدن مطلب، حل مسأله برجهای هانوی را برای $n = 1$ و $n = 2$ نیز می‌نویسیم:

$n = 1$: $A \rightarrow C$

$n = 2$: $A \rightarrow B$, $A \rightarrow C$, $B \rightarrow C$

توجه دارید که در $n = 1$ تنها از یک جابجایی یا انتقال دیسک استفاده می‌کند و برای $n = 2$ از سه انتقال استفاده شده است.

به عوض پیدا کردن یک راه حل مجزا برای هر n دلخواه، ما از روش بازگشتی برای ابداع یک راه حل کلی استفاده می‌کنیم. نخست ملاحظه می‌کنید که حل مسأله برجهای هانوی برای $n > 1$ دیسک می‌تواند

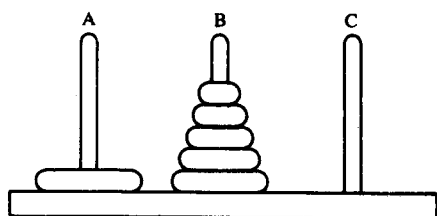
منجر به سه زیر مسأله داده شده در زیر می‌شود:

(۱) تعداد $n - 1$ دیسک بالا را از میله A به میله B منتقل کنید.

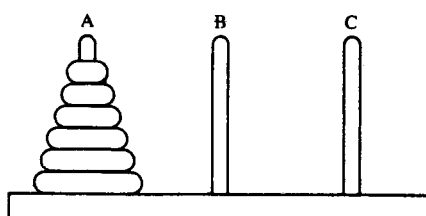
(۲) دیسک بالا را از میله A را به میله C منتقل کنید: $A \rightarrow C$.

(۳) تعداد $n - 1$ دیسک بالا را از میله B به میله C منتقل کنید.

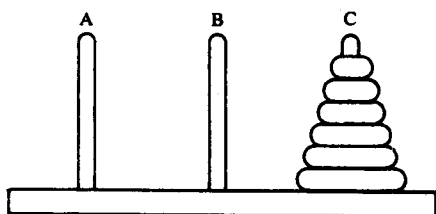
به ازای $n = 6$ این مسأله‌های کاهش مراحل در شکل ۱۲-۶ نشان داده شده است یعنی نخست پنج دیسک بالای میله A را به میله B منتقل می‌کنیم، آنگاه دیسک بزرگ را از میله A به میله C منتقل می‌کنیم و بدنبال آن پنج دیسک بالای میله B را به میله C منتقل می‌کنیم:



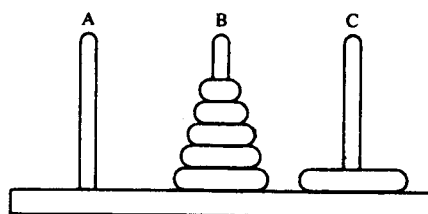
(ب) انتقال پنج دیسک بالای میله A به میله B



(الف) وضعیت اولیه:



(د) انتقال پنج دیسک بالای میله B به میله C



(ج) انتقال دیسک بالای میله A به میله C

شکل ۱۲-۶

اکنون وقت آن رسیده است که نماد اصلی را معرفی کنیم:

TOWER(N, BEG, AUX, END)

نماد بالا زیر برنامه Procedure ای را نشان می‌دهد که با استفاده از میله کمکی AUX، n دیسک بالای وضعیت اولیه میله BEG را به وضعیت نهایی میله END منتقل می‌کند. وقتی $n = 1$ است راه حل

بدیهی زیر را داریم:

TOWER(1, BEG, AUX, END) تنها از دستور $BEG \rightarrow END$ تشکیل می‌شود. علاوه بر این

همانگونه که در بالا مورد بررسی قرار گرفت وقتی $n > 1$ ، حل آن به حل سه زیرمسأله داده شده در زیر

منتهی می‌شود:

(۱) $TOWER(N-1, BEG, END, AUX)$

(۲) $TOWER(1, BEG, AUX, END)$ or $BEG \rightarrow END$

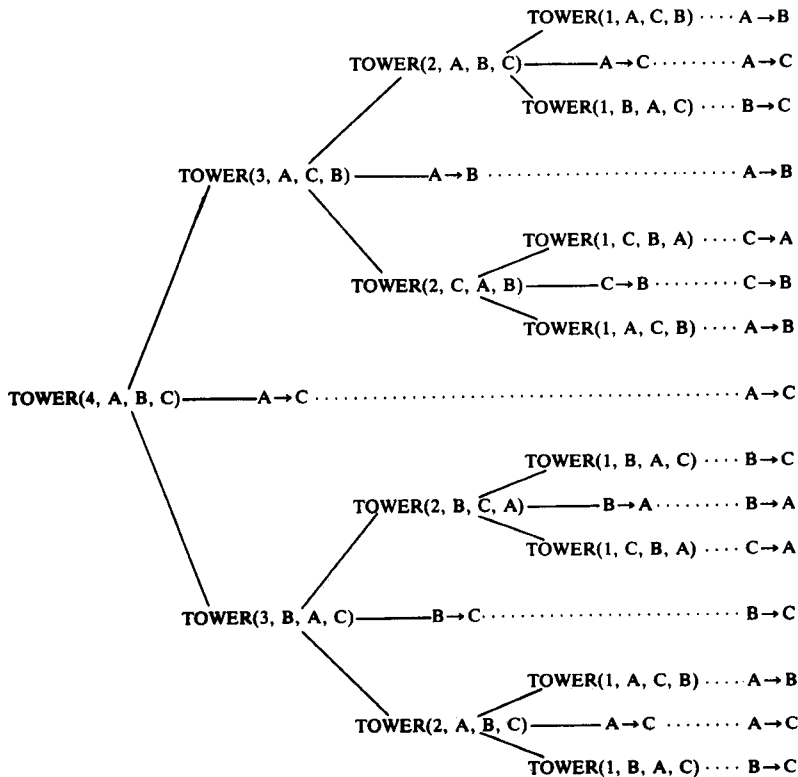
(۳) $TOWER(N-1, AUX, BEG, END)$

ملاحظه می‌کنید که هر یک از این سه زیرمسئله را می‌توان مستقیماً حل کرد یا اساساً همانند مسئله اصلی است با این تفاوت که در آن از تعداد دیسک‌های کمتری استفاده شده است. بنابراین، پردازش این مسئله‌های کاهش مراحل، منتهی به یک راه حل بازگشتی برای مسئله برج‌های هانوی می‌شود.

شکل ۱۳-۶ نمودار حل بازگشتی مسئله بالا برای

$TOWER(4, A, B, C)$

است.



شکل ۱۳-۶ حل بازگشتی مسئله برج‌های هانوی برای $n = 4$ دیسک

ملاحظه می‌کنید که حل بازگشتی مسأله برجهای هانوی برای $n = 4$ دیسک شامل 15 انتقال یا جابجایی زیر است:

A → B A → C B → C A → B C → A C → B A → B A → C
B → C B → A C → A B → C A → B A → C B → C

در حالت کلی، این حل بازگشتی برای n دیسک مستلزم $f(n) = 2^n - 1$ جابجایی یا انتقال است. بررسی خود را روی برجهای هانوی با زیربرنامه Procedure که به صورت رسمی نوشته شده است خلاصه می‌کنیم:

Procedure 6.9: TOWER(N, BEG, AUX, END)

This procedure gives a recursive solution to the Towers of Hanoi problem for N disks.

1. If $N = 1$, then:
 - (a) Write: $BEG \rightarrow END$.
 - (b) Return.

[End of If structure.]
2. [Move $N - 1$ disks from peg BEG to peg AUX.]
Call TOWER($N - 1$, BEG, END, AUX).
3. Write: $BEG \rightarrow END$.
4. [Move $N - 1$ disks from peg AUX to peg END.]
Call TOWER($N - 1$, AUX, BEG, END).
5. Return.

این زیربرنامه یک راه حل بازگشتی برای مسأله برجهای هانوی برای n دیسک ارائه می‌دهد. می‌توان این راه حل را به صورت یک الگوریتم تقسیم و غلبه مورد توجه قرار داد، چون راه حل مسأله برای n دیسک به راه حلی برای $n - 1$ و راه حلی برای $n = 1$ دیسک منجر می‌شود.

۸-۶ پیاده‌سازی زیربرنامه‌های بازگشتی به وسیله پشته‌ها

در بخشهای قبل نشان داده‌ایم که چگونه برنامه‌های بازگشتی می‌تواند برای مسائل خاص یک ابزار مفید در توسعه الگوریتم‌ها باشد. در این بخش چگونگی استفاده از پشته‌ها در پیاده‌سازی زیربرنامه‌های بازگشتی نشان داده می‌شود. بهتر است ابتدا زیربرنامه‌ها را در حالت کلی مورد بحث و بررسی قرار دهیم. یادآوری می‌کنیم که یک زیربرنامه می‌تواند شامل همه پارامترها و همه متغیرهای محلی باشد. پارامترها، متغیرهایی هستند که مقادیر را از متغیرهای برنامه فراخواننده موسوم به آرگومانها دریافت می‌کنند و سپس مقادیر را به برنامه فراخواننده انتقال می‌دهند. علاوه بر پارامترها و متغیرهای محلی، زیربرنامه نیز باید آدرس بازگشت برنامه فراخواننده را نگهدارند. این آدرس بازگشتی اساسی و دارای

اهمیت است چون کنترل کار باید به مکان واقعی‌اش در برنامه فراخواننده منتقل شود. زمانی که اجرای زیربرنامه به پایان می‌رسد و کنترل کار به برنامه فراخواننده داده می‌شود به مقادیر متغیرهای محلی و آدرس بازگشتی، دیگر نیازی نیست.

فرض کنید زیربرنامه ما یک زیربرنامه بازگشتی است. آنگاه هر سطح اجرای زیربرنامه می‌تواند شامل مقادیر مختلف برای پارامترها و متغیرهای محلی و آدرس بازگشتی باشد. علاوه بر این، اگر برنامه بازگشتی خودش را احضار کند، آنگاه این مقادیر جاری و گذرا، باید نگهداری شوند، چون هنگامی که برنامه مجدداً فعال می‌شود از آنها استفاده خواهد کرد.

فرض کنید یک برنامه‌نویس از یک زبان سطح بالا نظیر PASCAL استفاده می‌کند که اجازه استفاده از زیربرنامه‌های بازگشتی را می‌دهد. آنگاه کامپیوتر از حافظه‌هایی برای نگهداری تمام مقادیر پارامترها، متغیرهای محلی و آدرسهای بازگشتی استفاده می‌کند. از طرف دیگر، اگر یک برنامه‌نویس از یک زبان برنامه‌نویسی سطح بالای دیگری نظیر FORTRAN استفاده کند که اجازه استفاده از زیربرنامه‌های بازگشتی را نمی‌دهد آنگاه برنامه‌نویس باید تمهیداتی به عمل آورد تا زیربرنامه بازگشتی را به یک زیربرنامه غیربازگشتی تبدیل کند. این تمهیدات در زیر توضیح داده می‌شود.

تبدیل یک زیربرنامه بازگشتی به یک زیربرنامه غیربازگشتی

فرض کنید P یک زیربرنامه بازگشتی باشد. فرض می‌کنیم P به عوض یک زیربرنامه تابعی، یک زیربرنامه Subroutine باشد. (بدون این که عمومیت مسأله از دست برود، زیرا زیربرنامه‌های تابع را می‌توان به سادگی به صورت زیربرنامه‌های Subroutine نوشت.) علاوه بر این فرض می‌کنیم که فقط زیربرنامه P است که خود P را به صورت بازگشتی فرا می‌خواند. بررسی بازگشتی به صورت غیرمستقیم خارج از حدود مطالب درس ساختمان داده‌ها و این کتاب است.

در تبدیل زیربرنامه بازگشتی P به یک زیربرنامه غیربازگشتی به صورت زیر عمل می‌کنیم. قبل از هر چیز تعریفهای زیر را داریم:

- (۱) برای هر پارامتر STPAR یک پشته PAR داریم.
- (۲) برای هر متغیر محلی STVAR یک پشته VAR داریم.
- (۳) برای نگهداری آدرسهای بازگشتی یک متغیر محلی ADD و یک پشته STADD داریم.

هر باری که یک احضار بازگشتی به P وجود دارد، مقادیر جاری پارامترها و متغیرهای محلی برای پردازش آتی به داخل پشته‌های مربوطه Push می‌شوند و هر باری که یک بازگشت بازگشتی به P وجود

دارد، مقادیر پارامترها و متغیرهای محلی برای اجرای جاری P از پشته‌ها برگردانده می‌شود. کار با آدرسهای بازگشتی بسیار پیچیده است و به صورت زیر انجام می‌شود:

فرض کنید زیربرنامه P شامل یک فراخوانی بازگشتی P در مرحله K باشد. آنگاه دو آدرس بازگشتی متناظر با اجرای این مرحله K وجود دارد.

(۱) آدرس بازگشتی جاری زیربرنامه P وجود دارد و هنگامی مورد استفاده قرار می‌گیرد که اجرای سطح جاری از اجرای P به پایان رسد.

(۲) آدرس بازگشتی جدید $K+1$ وجود دارد که آدرس مرحله بعد از احضار P است و برای بازگشت به سطح جاری از اجرای زیربرنامه P مورد استفاده قرار می‌گیرد.

برخی از کتابها، اولین آدرس از این دو آدرس یعنی آدرس بازگشتی جاری، را به داخل آدرس بازگشتی پشته $STADD$ ، $Push$ می‌کنند در حالی که برخی دیگر، آدرس دوم یعنی آدرس بازگشتی جدید $K+1$ را به داخل پشته $STADD$ ، $Push$ می‌کنند. ما روش اول را انتخاب می‌کنیم چون تبدیل P به یک زیربرنامه غیربازگشتی ساده‌تر خواهد بود. به خصوص به این تعبیر که یک پشته خالی $STADD$ ، یک بازگشت به برنامه اصلی را بیان می‌کند که در ابتدای کار، زیربرنامه بازگشتی P را احضار می‌کند. تبدیل دیگری که آدرس بازگشتی جاری را به داخل پشته $Push$ می‌کند در مسأله ۲۰-۶ مورد بررسی قرار می‌گیرد.

الگوریتمی که زیربرنامه بازگشتی P را به صورت یک زیربرنامه غیربازگشتی تبدیل می‌کند به شرح زیر است: این الگوریتم از سه قسمت تشکیل شده است:

(۱) آماده‌سازی (۲) تبدیل فراخوانی بازگشتی P در زیربرنامه P و (۳) تبدیل هر بازگشت $Return$ در زیربرنامه P .

(۱) "آماده‌سازی".

(الف) برای هر پارامتر $STPAR$ یک پشته PAR ، برای هر متغیر محلی $STVAR$ یک پشته VAR و برای نگهداری آدرسهای بازگشتی یک متغیر محلی ADD و یک پشته $STADD$ تعریف کنید.

(ب) قرار دهید: $TOP := NULL$

(۲) تبدیل "مرحله K ، فراخوانی P "

(الف) مقادیر جاری پارامترها و متغیرهای محلی را به داخل پشته‌های مربوط $Push$ کنید و آدرس بازگشت جدید [مرحله $K+1$ را به داخل $STADD$ ، $Push$ کنید.

(ب) با استفاده از مقادیر آرگومان جاری پارامترها را مجدداً مقداردهی کنید.

(ج) به مرحله ۱ بروید. [شروع زیربرنامه P].

(۳) تبدیل "مرحله J، بازگشت Return"

(الف) اگر STADD خالی است، آنگاه بازگشت کنید Return. [کنترل کار به برنامه اصلی بازگشت پیدا می‌کند.]

(ب) مقادیر بالای پشته‌ها را برگردانید، یعنی پارامترها و متغیرهای محلی را برابر مقادیر بالای پشته‌ها قرار دهید و ADD را برابر مقدار بالای پشته STADD قرار دهید.

(ج) به مرحله ADD بروید.

ملاحظه می‌کنید که تبدیل "مرحله K، فراخوانی P" بستگی به مقدار K ندارد اما تبدیل "مرحله J، بازگشت Return" به مقدار J بستگی دارد. بنابراین تنها لازم است که دستور بازگشت Return تبدیل شود برای مثال، با استفاده از

Step L. Return

مانند بالا و آنگاه

Go To StepL.

را جایگزین هر دستور بازگشت Return دیگر کنید.

این کار تبدیل زیربرنامه Procedure را ساده می‌کند.

برجهای هانوی، صورت تجدیدنظر شده

بار دیگر مسأله برجهای هانوی را در نظر بگیرید. زیربرنامه ۹-۶ یک راه حل بازگشتی برای این مسأله با n دیسک است. ما این زیربرنامه را به یک حل غیربازگشتی تبدیل می‌کنیم. برای حفظ و نگهداری مراحل مشابه، دستور شروع را همانند مرحله 0 با $TOP := NULL$ برچسب‌گذاری می‌کنیم. علاوه بر این، تنها دستور بازگشت Return را در مرحله 5 همانند (۳) در صفحه قبل تبدیل می‌کنیم.

Procedure 6.10: TOWER(N, BEG, AUX, END)

This is a nonrecursive solution to the Towers of Hanoi problem for N disks which is obtained by translating the recursive solution. Stacks STN, STBEG, STAUX, STEND and STADD will correspond, respectively, to the variables N, BEG, AUX, END and ADD.

0. Set TOP := NULL.
1. If N = 1, then:
 - (a) Write: BEG → END.
 - (b) Go to Step 5.
 [End of If structure.]
2. [Translation of "Call TOWER(N - 1, BEG, END, AUX)."]
 - (a) [Push current values and new return address onto stacks.]
 - (i) Set TOP := TOP + 1.
 - (ii) Set STN[TOP] := N, STBEG[TOP] := BEG, STAUX[TOP] := AUX, STEND[TOP] := END, STADD[TOP] := 3.
 - (b) [Reset parameters.]

Set N := N - 1, BEG := BEG, AUX := END, END := AUX.
 - (c) Go to Step 1.
3. Write: BEG → END.
4. [Translation of "Call TOWER(N - 1, AUX, BEG, END)."]
 - (a) [Push current values and new return address onto stacks.]
 - (i) Set TOP := TOP + 1.
 - (ii) Set STN[TOP] := N, STBEG[TOP] := BEG, STAUX[TOP] := AUX, STEND[TOP] := END, STADD[TOP] := 5.
 - (b) [Reset parameters.]

Set N := N - 1, BEG := AUX, AUX := BEG, END := END.
 - (c) Go to Step 1.
5. [Translation of "Return."]
 - (a) If TOP := NULL, then: Return.
 - (b) [Restore top values on stacks.]
 - (i) Set N := STN[TOP], BEG := STBEG[TOP], AUX := STAUX[TOP], STEND[TOP], ADD := STADD[TOP].
 - (ii) Set TOP := TOP - 1.
 - (c) Go to Step ADD.

فرض کنید برنامه اصلی شامل دستور زیر است :

Call TOWER(3, A, B, C)

اجرای حل مسأله در زیربرنامه 6.10 را شبیه‌سازی می‌کنیم، تأکید ما در سطح‌های مختلف اجرای زیربرنامه است. هر سطح اجرا با مرحله مقدار اولیه دادن شروع می‌شود که در پارامترها، مقادیر آرگومانها از دستور فراخوانده اولیه یا از فراخوان بازگشتی در مرحله (۲) یا مرحله (۴) جایگزین می‌شود. از این رو هر آدرس بازگشت جدید یا مرحله ۳ یا مرحله ۵ است. شکل ۱۴-۶ مرحله‌های مختلف پشته‌ها را نشان می‌دهد.

STN:	3	3, 2	3	3, 2	3		3	3, 2	3	3, 2	3	
STBEG:	A	A, A	A	A, A	A		A	A, B	A	A, B	A	
STAUX:	B	B, C	B	B, C	B		B	B, A	B	B, A	B	
STEND:	C	C, B	C	C, B	C		C	C, C	C	C, C	C	
STADD:	3	3, 3	3	3, 5	3		5	5, 3	5	5, 5	5	
	(a)	(b)	(c)	(d)	(e)	(f)	(g)	(h)	(i)	(j)	(k)	(l)

شکل ۱۴-۶ پشته‌ها برای TOWER(3, A, B, C)

(الف) (سطح ۱) فراخوانی اولیه CALL TOWER(3, A, B, C) مقادیر زیر را در پارامترها جایگزین می‌کند:

$$N := 3, \quad \text{BEG} := A, \quad \text{AUX} := B, \quad \text{END} := C$$

مرحله ۱. چون $N \neq 1$ ، کنترل به مرحله ۲ داده می‌شود.

مرحله ۲. این یک فراخوان بازگشتی است. از این‌رو مقادیر جاری متغیرها و آدرس بازگشت جدید (در مرحله ۳) به داخل پشته‌ها مانند شکل ۱۴-۶ (الف) Push می‌شوند.

(ب) (سطح ۲) مرحله ۲ فراخوان بازگشتی [TOWER(N - 1, BEG, END, AUX)] مقادیر زیر را در پارامترها جایگزین می‌کند:

$$N := N - 1 = 2, \quad \text{BEG} := \text{BEG} = A, \quad \text{AUX} := \text{END} = C, \quad \text{END} := \text{AUX} = B$$

مرحله ۱. چون $N \neq 1$ کنترل به مرحله ۲ داده می‌شود.

مرحله ۲. این یک فراخوان بازگشتی است. از این‌رو مقادیر جاری متغیرها و آدرس بازگشت جدید (مرحله ۳) به داخل پشته‌ها مانند شکل ۱۴-۶ (ب) Push می‌شوند.

(ج) (مرحله ۳) مرحله ۲ فراخوان بازگشتی [TOWER(N - 1, BEG, END, AUX)] مقادیر زیر را در پارامترها جایگزین می‌کند:

$$N := N - 1 = 1, \quad \text{BEG} := \text{BEG} = A, \quad \text{AUX} := \text{END} = B, \quad \text{END} := \text{AUX} = C$$

مرحله ۱. اکنون $N = 1$ عمل $N \rightarrow \text{END}$ انتقال زیر را پیاده‌سازی می‌کند:

$$A \rightarrow C$$

اکنون کنترل به مرحله ۵ منتقل می‌شود. [برای بازگشت Return]

مرحله ۵. پشته‌ها خالی نیستند، از این‌رو مقادیر بالای پشته‌ها حذف می‌شوند و به شکل ۱۴-۶ (ج) درمی‌آید و جایگزینی‌های زیر صورت می‌گیرد:

$$N := 2, \quad \text{BEG} := A, \quad \text{AUX} := C, \quad \text{END} := B, \quad \text{ADD} := 3$$

کنترل به سطح ۲ قبلی در مرحله ADD منتقل می‌شود.

(د) (سطح ۲) [فعال شدن در مرحله ۳ ADD]

مرحله ۳. عمل $BEG \rightarrow END$ انتقال زیر را پیاده‌سازی می‌کند:

$$A \rightarrow B$$

مرحله ۴. این یک فراخوان بازگشتی است. از این‌رو مقادیر جاری متغیرها و آدرس بازگشت جدید (مرحله ۵) به داخل پشته‌ها مانند شکل ۱۴-۶ (د) Push می‌شوند. (ه) (سطح ۳) مرحله ۴ فراخوان بازگشتی [TOWER(N - 1, AUX, BEG, END)] مقادیر زیر را در پارامترها جایگزین می‌کند:

$$N := N - 1 = 1, \quad BEG := AUX = C, \quad AUX := BEG = A, \quad END := END = B$$

مرحله ۱. اکنون $N = 1$ عمل $BEG \rightarrow END$ انتقال زیر را پیاده‌سازی می‌کند:

$$C \rightarrow B$$

آنگاه کنترل به مرحله ۵ منتقل می‌شود. [برای بازگشت Return]

مرحله ۵. پشته‌ها خالی نیستند، از این‌رو مقادیر بالای پشته‌ها حذف می‌شوند و به شکل ۱۴-۶ (ه) درمی‌آید و جایگزینی‌های زیر صورت می‌گیرد:

$$N := 2, \quad BEG := A, \quad AUX := C, \quad END := B, \quad ADD := 5$$

کنترل به سطح ۲ قبلی در مرحله ADD منتقل می‌شود.

(و) (سطح ۲) [فعال شدن در مرحله ۵ ADD]

مرحله ۵. پشته‌ها خالی نیستند، از این‌رو مقادیر بالای پشته‌ها حذف می‌شوند و به شکل ۱۴-۶ (و) درمی‌آید و جایگزینی‌های زیر صورت می‌گیرد:

$$N := 3, \quad BEG := A, \quad AUX := B, \quad END := C, \quad ADD := 3$$

کنترل به سطح ۱ قبلی در مرحله ADD منتقل می‌شود.

(ز) (سطح ۱) [فعال شدن در مرحله ۳ ADD]

مرحله ۳. عمل $BEG \rightarrow END$ انتقال زیر را پیاده‌سازی می‌کند:

$$A \rightarrow C$$

مرحله ۴. این یک فراخوان بازگشتی است. از این‌رو مقادیر جاری متغیرها و آدرس بازگشت جدید (مرحله ۵) به داخل پشته‌ها مانند شکل ۱۴-۶ (و) Push می‌شوند.

(ح) (سطح ۲) مرحله ۴ فراخوان بازگشتی [TOWER(N - 1, AUX, BEG, END)] مقادیر زیر را در پارامترها جایگزین می‌کند:

$$N := N - 1 = 2, \quad BEG := AUX = B, \quad AUX := BEG = A, \quad END := END = C$$

مرحله ۱. چون $N \neq 1$ ، کنترل به مرحله ۲ منتقل می‌شود.

مرحله ۲. این یک فراخوان بازگشتی است. از این‌رو مقادیر جاری متغیرها و آدرس بازگشت جدید (مرحله ۳) به داخل پشته‌ها مانند شکل ۱۴-۶ (ج) Push می‌شوند.

(ط) (مرحله ۳) مرحله ۲ فراخوان بازگشت [TOWER(N - 1, BEG, END, AUX)] مقادیر زیر را در پارامترها جایگزین می‌کند:

$$N := N - 1 = 1, \quad BEG := BEG = B, \quad AUX := END = C, \quad END := AUX = A$$

مرحله ۱. اکنون $N = 1$ عمل $BEG \rightarrow END$ انتقال زیر را پیاده‌سازی می‌کند:

$$B \rightarrow A$$

آنگاه کنترل به مرحله ۵ داده می‌شود. [برای بازگشت Return]

مرحله ۵. پشته‌ها خالی نیستند از این‌رو مقادیر بالای پشته‌ها حذف می‌شوند و به شکل ۱۴-۶ (ط) در می‌آید و جایگزینی‌های زیر صورت می‌گیرد:

$$N := 2, \quad BEG := B, \quad AUX := A, \quad END := C, \quad ADD := 3$$

کنترل به سطح ۲ قبلی در مرحله ADD منتقل می‌شود.

(ی) (سطح ۲) [فعال شدن در مرحله $ADD = 3$]

مرحله ۳. عمل $BEG \rightarrow END$ انتقال زیر را پیاده‌سازی می‌کند:

$$B \rightarrow C$$

مرحله ۴. این یک فراخوان بازگشتی است. از این‌رو مقادیر جاری متغیرها و آدرس بازگشت جدید (مرحله ۵) به داخل پشته‌ها مانند شکل ۱۴-۶ (ی) Push می‌شوند.

(ک) (سطح ۳) مرحله ۴ فراخوان بازگشتی [TOWER(N - 1, AUX, BEG, END)] آدرس زیر را در پارامترها جایگزین می‌کند:

$$N := N - 1 = 1, \quad BEG := AUX = C, \quad AUX := BEG = B, \quad END := END = C$$

مرحله ۱. اکنون $N = 1$ عمل $BEG \rightarrow END$ انتقال زیر را پیاده‌سازی می‌کند:

$$A \rightarrow C$$

آنگاه کنترل به مرحله ۵ داده می‌شود. [برای بازگشت Return]

مرحله ۵. پشته‌ها خالی نیستند از این‌رو مقادیر بالای پشته‌ها حذف می‌شوند و به شکل ۱۴-۶ (ک) در می‌آید و جایگزینی‌های زیر صورت می‌گیرد:

$$N := 2, \quad BEG := B, \quad AUX := A, \quad END := C, \quad ADD := 5$$

کنترل به سطح ۲ قبلی در مرحله ADD منتقل می‌شود.

(ل) (سطح ۲) [فعال شدن در مرحله $ADD = 5$]

مرحله ۵. پشته‌ها اکنون خالی نیستند. از این‌رو مقادیر بالای پشته‌ها حذف می‌شوند و به شکل ۱۴-۶ (ل) در می‌آید و جایگزینی‌های زیر صورت می‌گیرد:

$$N := 3, \quad BEG := A, \quad AUX := B, \quad END := C, \quad ADD := 5$$

کنترل به سطح ۱ قبلی در مرحله ADD منتقل می‌شود.

(م) (سطح ۱) [فعال شدن در مرحله 5 ADD]

مرحله ۵. پشته‌ها اکنون خالی هستند. بنابراین کنترل به برنامه اصلی اولیه که شامل دستور زیر است داده می‌شود:

Call TOWER(3, A, B, C)

ملاحظه می‌کنید که خروجی شامل هفت انتقال زیر است:

$A \rightarrow C, A \rightarrow B, C \rightarrow B, A \rightarrow C, B \rightarrow A, B \rightarrow C, A \rightarrow C,$

این نتیجه با جواب شکل ۱۱-۶ سازگار است.

جمع‌بندی مطالب

مسئله برجهای هانوی، قدرت زیربرنامه‌های بازگشتی را در حل مسائل الگوریتمی متعدد روشن می‌سازد. این بخش چگونگی پیاده‌سازی زیربرنامه‌های بازگشتی را به وسیله پشته‌ها نشان می‌دهد و این درحالی است که از یک زبان برنامه‌نویسی نظیر FORTRAN یا COBOL استفاده می‌کنیم که نوشتن برنامه‌های بازگشتی در آنها مجاز نیست. درواقع، حتی وقتی که از یک زبان برنامه‌نویسی نظیر PASCAL استفاده می‌کنیم که از برنامه‌های بازگشتی پشتیبانی می‌کند، برنامه‌نویس ممکن است بخواهد از راه حل غیربازگشتی استفاده کند چون راه حل غیربازگشتی هزینه کمتری نسبت به راه حل بازگشتی دارد.

۹-۶ صفها

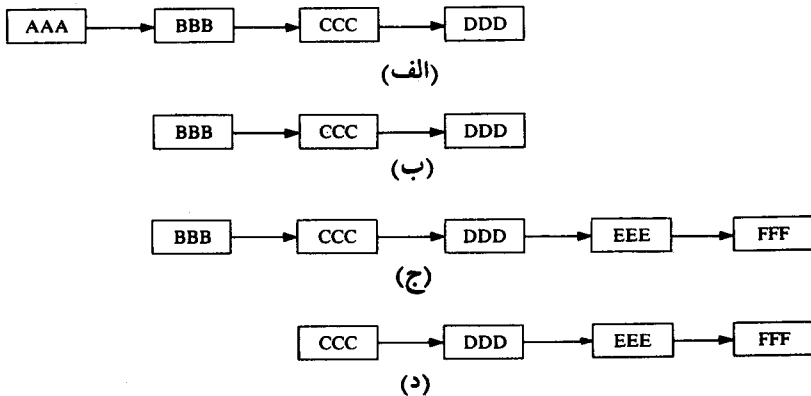
یک صف، لیست خطی از عناصر است که در آن عمل حذف تنها می‌تواند از یک انتهای آن موسوم به سر صف یا ابتدای صف front و عمل اضافه‌شدن تنها می‌تواند از انتهای دیگر آن موسوم به rear یا انتهای آن صورت گیرد. اصطلاح ابتدای صف front و انتهای صف rear در توصیف یک لیست خطی تنها وقتی مورد استفاده قرار می‌گیرد که به عنوان یک صف پیاده‌سازی شود.

صفها، لیستهای اولین ورودی اولین خروجی است، FIFO نیز نامیده می‌شود چون اولین عنصر داخل یک صف، اولین عنصری است که از صف خارج می‌شود یا آن را ترک می‌کند. به بیان دیگر، ترتیبی که در آن عناصر وارد یک صف می‌شوند به همان ترتیبی است که عناصرها، صف را ترک می‌کنند. صفها درمقابل پشته‌ها قرار دارند که لیستهای آخرین ورودی اولین خروجی است LIFO هستند. صفها در زندگی روزمره ما به وفور دیده می‌شود. اتومبیلهایی که در یک چهارراه در انتظار عبور هستند تشکیل یک صف را می‌دهند که در آن، اولین اتومبیل وارد شده در صف انتظار، اولین اتومبیلی است که صف را ترک می‌کند. انسانهایی که در یک بانک در یک خط درانتظار انجام کارشان هستند، تشکیل یک صف را می‌دهند که در آن اولین نفر داخل خط، اولین کسی است که در انتظار انجام کارش به سر می‌برد و پس از انجام، اولین کسی است که صف را ترک می‌کند و الی آخر. یک مثال کامل از صف در علم کامپیوتر، در سیستم اشتراک زمانی اتفاق می‌افتد، که در آن برنامه‌هایی که دارای اولویت یکسان

هستند تشکیل یک صف را می‌دهند و در حال انتظار اجرا بسر می‌برند. ساختمان دیگری که از صف استفاده می‌کند یک صف اولویت نام دارد که در بخش ۱۱-۶ مورد بحث و بررسی قرار خواهد گرفت.

مثال ۹-۶

شکل ۱۵-۶ (الف) نمودار یک صف با ۴ عنصر را نشان می‌دهد که در آن AAA عنصر ابتدای صف و DDD عنصر انتهای صف است. ملاحظه می‌کنید که عنصر ابتدا و انتهای صف نیز به ترتیب عنصر اول و آخر لیست هستند. فرض کنید یک عنصر از صف حذف شده است. آنگاه عنصر حذف شده باید AAA باشد. این عمل صف را در وضعیت شکل ۱۵-۶ (ب) قرار می‌دهد که در آن BBB اکنون عنصر اول صف است.



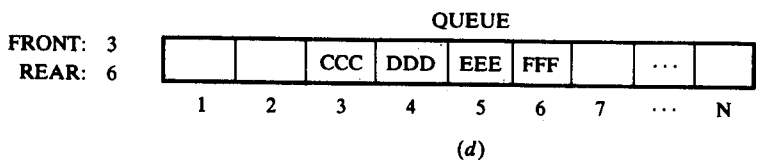
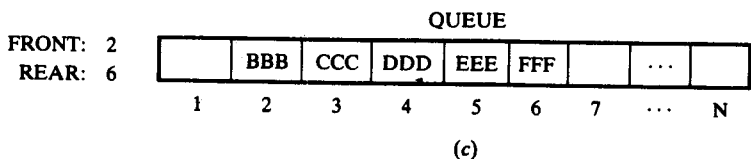
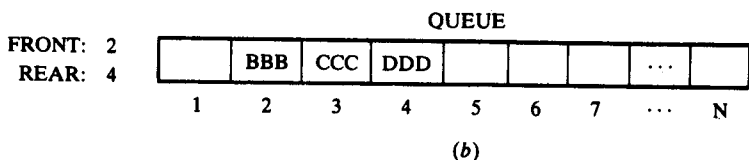
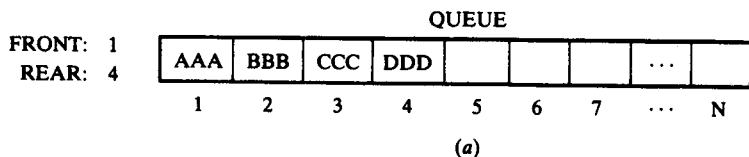
شکل ۱۵-۶

بدنبال آن، فرض کنید EEE به صف اضافه شده است و آنگاه FFF به صف اضافه می‌شود. در آن صورت این عناصر باید به انتهای صف اضافه شوند. این وضعیت در شکل ۱۵-۶ (ج) نشان داده شده است. توجه دارید که FFF اکنون عنصر انتهای صف است. حال فرض کنید عنصر دیگری از صف حذف شده است. آنگاه این عنصر باید BBB باشد که با این عمل صف در وضعیت شکل ۱۵-۶ (د) قرار می‌گیرد و الی آخر. ملاحظه می‌کنید که در چنین ساختمان داده‌ای، EEE قبل از FFF حذف می‌شود چون این عنصر قبل از FFF در صف قرار گرفته است. بنابراین، EEE باید منتظر بماند تا CCC و DDD حذف شوند.

نمایش صف‌ها

صف‌ها را می‌توان در کامپیوتر به صورتهای مختلف نمایش داد اما معمولاً آنها را با لیستهای یکطرفه

یا آرایه‌های خطی نمایش می‌دهند. هر یک از صفهای داخل کتاب توسط یک آرایه خطی **QUEUE** و دو متغیر اشاره‌گر **FRONT** که شامل مکان عنصر ابتدای صف است و **REAR** که شامل مکان عنصر انتهای صف است پیاده‌سازی می‌شود مگر آن که خلاف آن به صورت صریح یا ضمنی بیان شود. شرط **FRONT = NULL** مبین آن است که صف خالی است.



شکل ۱۶-۶ نمایش یک صف به وسیله آرایه

شکل ۱۶-۶ روشی را نشان می‌دهد که در آن آرایه شکل ۱۵-۶ با استفاده از آرایه **QUEUE** با N عنصر در حافظه ذخیره می‌شود. علاوه بر این شکل ۱۶-۶ روشی را نشان می‌دهد که عناصر از صف حذف می‌شوند و عناصر جدید به صف اضافه می‌شوند. ملاحظه می‌کنید که هرگاه یک عنصر از صف حذف شود، مقدار **FRONT** به اندازه ۱ افزایش می‌یابد و این حالت را می‌توان با دستور جایگزینی

FRONT := FRONT + 1

پیاده‌سازی کرد. به همین ترتیب، هرگاه یک عنصر به صف اضافه شود، مقدار **REAR** به اندازه ۱ افزایش می‌یابد و این حالت را می‌توان با دستور جایگزینی

$$\text{REAR} := \text{REAR} + 1$$

پیاده‌سازی کرد.

معنی آن، این است که پس از N عمل اضافه کردن، عنصر انتهای صف $\text{QUEUE}[N]$ را اشغال می‌کند یا به بیان دیگر، نهایتاً صف آخرین قسمت آرایه را اشغال می‌کند. این وضعیت حتی وقتی خود صف عنصر زیاد نداشته باشد اتفاق می‌افتد.

فرض کنید بخواهیم عنصر ITEM را زمانی که صف آخرین قسمت آرایه را اشغال کرده است یعنی وقتی $\text{REAR} = N$ است به صف اضافه کنیم. یک راه برای انجام این کار، آن است که تمام صف را به ابتدای آرایه منتقل کنیم و براساس آن FRONT و REAR را تغییر دهیم و آنگاه ITEM را مطابق آنچه که در بالا انجام دادیم به صف اضافه کنیم. این روش ممکن است پرهزینه و وقت‌گیر باشد. روشی که ما اتخاذ کرده‌ایم بر این فرض استوار است که QUEUE چرخشی یا حلقوی است یعنی $\text{QUEUE}[1]$ پس از $\text{QUEUE}[N]$ در آرایه قرار گرفته است. با این فرض با جایگزینی ITEM در $\text{QUEUE}[1]$ عنصر ITEM را به صف اضافه می‌کنیم. به طور مشخص، بجای افزایش REAR به $N + 1$ ، قرار می‌دهیم $\text{REAR} = 1$ و آنگاه جایگزین می‌کنیم:

$$\text{QUEUE}[\text{REAR}] := \text{ITEM}$$

به همین ترتیب، اگر $\text{FRONT} = N$ و یک عنصر از QUEUE حذف شود، بجای افزایش $\text{FRONT} = 1$ به FRONT قرار می‌دهیم $N + 1$ بعضی از دانشجویان این عملیات را به صورت حساب باقیمانده‌ای مورد توجه قرار می‌دهند که در بخش ۲-۲ بررسی شده است.

فرض کنید صف تنها از یک عنصر تشکیل شده است یعنی فرض کنید که

$$\text{FRONT} = \text{REAR} \neq \text{NULL}$$

و فرض کنید این عنصر حذف می‌شود. آنگاه جایگزینی‌های زیر را داریم:

$$\text{REAR} := \text{NULL} \quad \text{و} \quad \text{FRONT} := \text{NULL}$$

که بیانگر آن است صف خالی است.

مثال ۱۰-۶

شکل ۱۷-۶ چگونگی پیاده‌سازی یک صف را توسط یک آرایه چرخشی QUEUE با $N = 5$ خانه حافظه نشان می‌دهد، ملاحظه می‌کنید که صف همیشه خانه‌های حافظه متوالی را اشغال می‌کند بجز وقتی که، خانه‌هایی در ابتدا و انتهای آرایه را اشغال می‌کند. اگر صف را به صورت یک آرایه چرخشی در نظر بگیریم معنی آن، این است که همچنان خانه‌های حافظه متوالی را اشغال می‌کنند. علاوه بر این، همانگونه که در شکل ۱۷-۶ (م) مشاهده می‌شود، صف تنها وقتی خالی خواهد بود که

REAR = FRONT و یک عنصر حذف می‌شود. به همین دلیل NULL در FRONT و REAR در شکل ۱۷-۶ (م) جایگزین می‌شود:

QUEUE

(a) Initially empty:

FRONT: 0

REAR: 0

1

2

3

4

5

(b) A, B and then C inserted:

FRONT: 1

REAR: 3

A

B

C

(c) A deleted:

FRONT: 2

REAR: 3

B

C

(d) D and then E inserted:

FRONT: 2

REAR: 5

B

C

D

E

(e) B and C deleted:

FRONT: 4

REAR: 5

D

E

(f) F inserted:

FRONT: 4

REAR: 1

F

D

E

(g) D deleted:

FRONT: 5

REAR: 1

F

E

(h) G and then H inserted:

FRONT: 5

REAR: 3

F

G

H

E

(i) E deleted:

FRONT: 1

REAR: 3

F

G

H

(j) F deleted:

FRONT: 2

REAR: 3

G

H

(k) K inserted:

FRONT: 2

REAR: 4

G

H

K

(l) G and H deleted:

FRONT: 4

REAR: 4

K

(m) K deleted, QUEUE empty:

FRONT: 0

REAR: 0

اکنون وقت آن رسیده است تا زیربرنامه **QINSERT** (زیربرنامه ۶-۱۱) را به صورت رسمی بیان کنیم که داده **ITEM** را به صف اضافه می‌کند. از اولین کارهایی که ما در این زیربرنامه انجام می‌دهیم آزمایش و کنترل وضعیت سرریزی است یعنی آزمایش کنیم که آیا صف پر است یا خیر؟

بدنبال آن زیربرنامه **QDELETE** (زیربرنامه ۶-۱۲) را ارائه می‌دهیم که عنصر اول را از صف حذف می‌کند و آن را در متغیر **ITEM** جایگزین می‌کند. از اولین کارهایی که ما در زیربرنامه انجام می‌دهیم آزمایش و کنترل وضعیت زیرریزی است یعنی آزمایش کنیم که آیا صف خالی است یا خیر؟

Procedure 6.11: QINSERT(Queue, N, FRONT, REAR, ITEM)

This procedure inserts an element ITEM into a queue.

1. [Queue already filled?]
 - If $\text{FRONT} = 1$ and $\text{REAR} = N$, or if $\text{FRONT} = \text{REAR} + 1$, then:
 - Write: OVERFLOW, and Return.
2. [Find new value of REAR.]
 - If $\text{FRONT} := \text{NULL}$, then: [Queue initially empty.]
 - Set $\text{FRONT} := 1$ and $\text{REAR} := 1$.
 - Else if $\text{REAR} = N$, then:
 - Set $\text{REAR} := 1$.
 - Else:
 - Set $\text{REAR} := \text{REAR} + 1$.
3. Set $\text{QUEUE}[\text{REAR}] := \text{ITEM}$. [This inserts new element.]
4. Return.

Procedure 6.12: QDELETE(Queue, N, FRONT, REAR, ITEM)

This procedure deletes an element from a queue and assigns it to the variable ITEM.

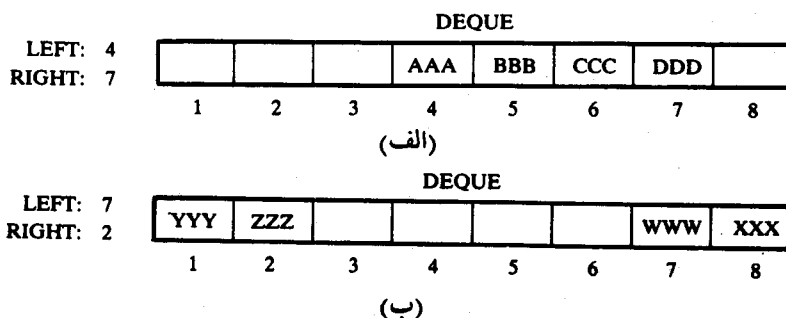
1. [Queue already empty?]
 - If $\text{FRONT} := \text{NULL}$, then: Write: UNDERFLOW, and Return.
2. Set $\text{ITEM} := \text{QUEUE}[\text{FRONT}]$.
3. [Find new value of FRONT.]
 - If $\text{FRONT} = \text{REAR}$, then: [Queue has only one element to start.]
 - Set $\text{FRONT} := \text{NULL}$ and $\text{REAR} := \text{NULL}$.
 - Else if $\text{FRONT} = N$, then:
 - Set $\text{FRONT} := 1$.
 - Else:
 - Set $\text{FRONT} := \text{FRONT} + 1$.
4. Return.

۱۰- ۶ صفهای دوسره یا DEQUE ها

یک صف دوسره یا یک Deque (به صورت دِک Deck یا دِکیو Dequeue تلفظ کنید) یک لیست خطی است که عناصر را می‌توان در آن از هر دو سر اضافه یا حذف کرد اما حذف یا اضافه کردن عنصر از وسط آن امکان‌پذیر نیست. اصطلاح Deque شکل اختصاری نام صف دوسره Double – Ended Queue است.

روشهای مختلفی برای نمایش یک Deque در کامپیوتر وجود دارد. فرض می‌کنیم که Deque ما توسط یک آرایهٔ چرخشی DEQUE با اشاره‌گرهای LEFT و RIGHT پیاده‌سازی می‌شود که به دوسره Deque اشاره می‌کند. مگر آن که خلاف آن به صورت صریح یا ضمنی بیان شود. فرض می‌کنیم که عناصر از سر سمت چپ تا سر سمت راست آرایه امتداد دارند. اصطلاح "چرخشی" یا "حلقوی" از این واقعیت گرفته شده است که فرض می‌کنیم عنصر DEQUE[1] پس از DEQUE[N] در آرایه می‌آید. شکل ۱۸-۶ دو Deque را نشان می‌دهد که هر یک با ۴ عنصر در یک آرایه $N = 8$ خانهٔ حافظه‌ای پیاده‌سازی شده‌اند. شرط $LEFT = NULL$ برای این منظور بکار می‌رود تا نشان دهد Deque خالی است.

دو نوع Deque وجود دارد که عبارتند از Deque با ورودی محدودشده و یک Deque با خروجی محدود شده که واسطهٔ بین یک Deque و یک صف هستند. یک Deque با ورودی محدود شده یک Deque است که به ما اجازه می‌دهد عمل اضافه‌کردن را تنها از یک سر لیست انجام دهیم اما در این نوع Deque ها مجاز هستیم از هر دو سر لیست عناصر را حذف کنیم و یک Deque با خروجی محدود شده یک Deque است که به ما اجازه می‌دهد عمل حذف را تنها از یک سر لیست انجام دهیم اما در این نوع Deque ها مجاز هستیم از هر دو سر لیست عناصر را اضافه کنیم.



شکل ۱۸-۶

این زیربرنامه‌های Procedure که عمل اضافه‌کردن و حذف عناصر را در Deque ها انجام می‌دهند و انواع مختلف اینگونه زیربرنامه‌ها به عنوان مسایل تکمیلی ارائه می‌شوند. همانند صفها، یک وضع

پیچیده ممکن است اتفاق بیفتد (الف) وقتی که سرریزی روی می‌دهد یعنی وقتی یک عنصر به Deque اضافه می‌شود که از قبل پر است یا (ب) وقتی که زیرریزی روی می‌دهد یعنی وقتی یک عنصر از Deque حذف می‌شود که خالی است. زیربرنامه‌های Procedure باید این حالت‌های ممکن را در نظر بگیرد.

۱۱-۶ صف‌های اولویت

یک صف اولویت، یک مجموعه از عناصر است به طوری که به هر عنصر آن اولویت یکسان داده می‌شود و ترتیبی که در آن عناصر حذف و پردازش می‌شوند از دو قاعده زیر پیروی می‌کند:

- (۱) عنصری که دارای اولویت بیشتر است قبل از تمام عناصری که اولویت کمتر دارد پردازش می‌شود.
- (۲) دو عنصری که دارای اولویت یکسان هستند با توجه به ترتیبی که به صف اضافه شده‌اند پردازش می‌شوند. یک نمونه از صف اولویت، یک سیستم اشتراک زمانی است. در این سیستم برنامه‌هایی که دارای اولویت بالاتر هستند اول پردازش می‌شوند و برنامه‌هایی که دارای اولویت یکسان هستند تشکیل یک صف استاندارد می‌دهند.

روشهای مختلفی برای پیاده‌سازی صف اولویت در حافظه وجود دارد. ما به شرح دو روش در اینجا می‌پردازیم. در یکی از این روشها از یک لیست یکطرفه و در روش دیگر از چند صف استفاده می‌شود. واضح است که میزان ساده یا مشکل بودن، اضافه کردن یک یا چند عنصر به صف اولویت یا حذف از آن به نوع نمایشی که برای صف انتخاب می‌کنیم بستگی دارد.

نمایش یک صف اولویت به وسیله لیست یکطرفه

یک راه پیاده‌سازی یک صف اولویت در حافظه به وسیله لیست یکطرفه است که به شرح زیر است:

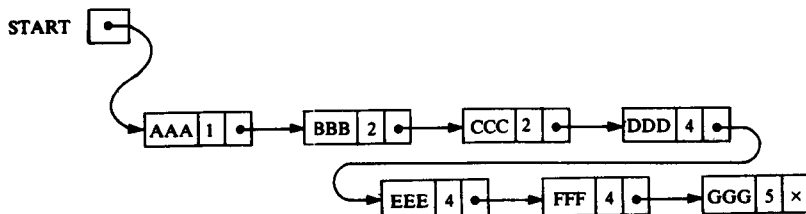
(الف) هر گره در لیست شامل سه عنصر اطلاعاتی است که عبارتند از: یک فیلد اطلاعاتی INFO، یک عدد اولویت PRN و یک عدد پیوند LINK.

(ب) گره X قبل از گره Y در لیست است (۱) اگر اولویت X بیشتر از اولویت Y باشد یا (۲) اگر هر دو گره اولویت یکسان دارند آنگاه X قبل از Y به لیست اضافه شده باشد، به بیان دیگر ترتیب در لیست یکطرفه متناظر با ترتیب صف اولویت است.

اعداد اولویت بر پایه استنباط معمولی مورد استفاده قرار می‌گیرند، یعنی عناصری که عدد اولویت کوچکتری دارند، دارای اولویت بالاتری هستند.

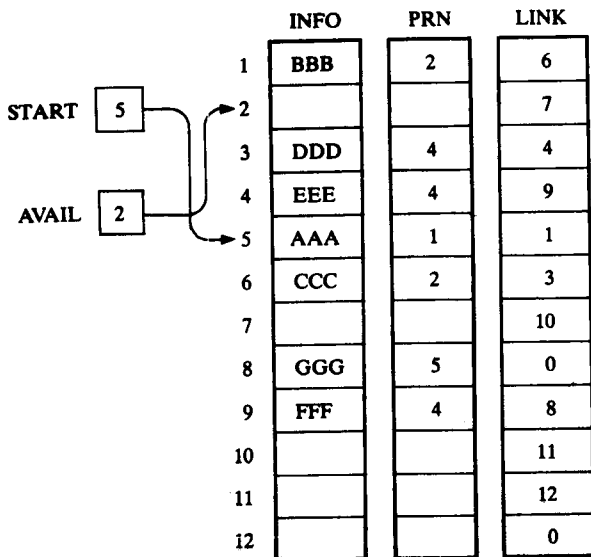
مثال ۱۱-۶

شکل ۱۹-۶ نمودار یک صف اولویت را با ۷ عنصر نشان می‌دهد.



شکل ۱۹-۶

نمودار در مورد این که BBB قبل یا بعد از DDD به لیست اضافه شده، چیزی به ما نمی‌گوید. از طرف دیگر، از نمودار استنباط می‌شود که BBB قبل از CCC به لیست اضافه شده است، چون BBB و CCC دارای عدد اولویت یکسان هستند و BBB قبل از CCC در لیست ظاهر شده است. شکل ۲۰-۶ روشی را نشان می‌دهد که صف اولویت با استفاده از آرایه‌های خطی INFO و PRN و LINK (بخش ۲-۵ را ببینید) در حافظه ظاهر می‌شود.



شکل ۲۰-۶

خاصیت اصلی نمایش یک صف اولویت با استفاده از لیست یکطرفه، آن است که عنصر داخل صف که همواره در ابتدای لیست یکطرفه ظاهر می‌شوند باید اول پردازش شوند. بنابراین عمل حذف یا اضافه کردن عنصر در صف اولویت بسیار ساده است. شرح این الگوریتم به صورت زیر است:

Algorithm 6.13: This algorithm deletes and processes the first element in a priority queue which appears in memory as a one-way list.

1. Set $ITEM := INFO[START]$. [This saves the data in the first node.]
2. Delete first node from the list.
3. Process $ITEM$.
4. Exit.

این الگوریتم اولین عنصر را از یک صف اولویت، که در حافظه به صورت لیست یکطرفه ظاهر شده است، حذف می‌کند و آنرا پردازش می‌کند.

جزئیات این الگوریتم، به همراه احتمال وقوع زیرریزی به عنوان تمرین به دانشجو واگذار می‌شود. اضافه کردن یک عنصر به صف اولویت بسیار پیچیده‌تر از حذف یک عنصر از صف است چون برای اضافه کردن یک عنصر به صف احتیاج است جای درست آن را در صف پیدا کنیم. شرح این الگوریتم به صورت زیر است:

Algorithm 6.14: This algorithm adds an $ITEM$ with priority number N to a priority queue which is maintained in memory as a one-way list.

این الگوریتم عنصر $ITEM$ با عدد اولویت N را در صف اولویت، که در حافظه به صورت لیست یکطرفه پیاده‌سازی شده است، اضافه می‌کند.

(الف) تا پیدا شدن گره X که عدد اولویت آن بزرگتر از N است. لیست یکطرفه را پیمایش کنید $ITEM$ را در جلوی گره X اضافه کنید.

(ب) اگر چنین گره‌ای پیدا نشد، $ITEM$ را به عنوان آخرین عنصر لیست اضافه کنید.

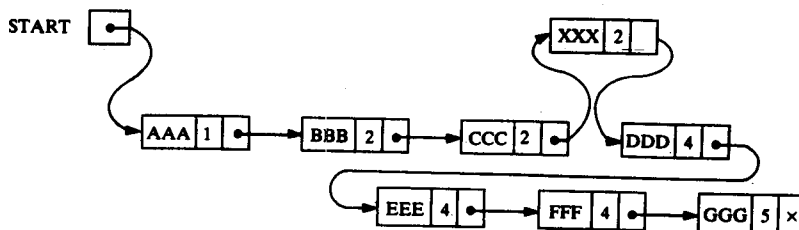
الگوریتم اضافه کردن بالا را می‌توان به صورت یک شیئی وزن داده شده که در لابلای عنصرها فرو می‌رود به تصویر درآورد تا به عنصری با وزن بیشتر برخورد کند.

جزئیات الگوریتم بالا به عنوان تمرین به دانشجو واگذار می‌شود. مشکل اصلی الگوریتم، از این واقعیت ناشی شده است که $ITEM$ قبل از گره X اضافه می‌شود. به بیان دیگر هنگام پیمایش لیست، باید آدرس گره‌ای را که قبل از گره پردازش شونده قرار دارد نگهداریم.

مثال ۱۲-۶

صف اولویت شکل ۱۹-۶ را در نظر بگیرید. فرض کنید عنصر XXX با عدد اولویت ۲ را می‌خواهیم به صف اضافه کنیم. با مقایسه اعداد اولویت، لیست را پیمایش می‌کنیم. ملاحظه می‌کنید که

DDD عنصر اول لیست است که عدد اولویت آن بزرگتر از عدد اولویت XXX است. از این رو به صورتی که در شکل ۶-۲۱ نشان داده شده است XXX در جلوی DDD در لیست اضافه می‌شود. ملاحظه می‌کنید که XXX پس از BBB و CCC ظاهر شده است که اولویت یکسان با XXX دارند. حال فرض کنید بخواهیم یک عنصر را از صف حذف کنیم. این عنصر AAA خواهد بود. که عنصر اول لیست است. با این فرض که هیچ عنصری به صف اضافه نمی‌شود، عنصر بعدی که حذف می‌شود BBB خواهد بود. آنگاه CCC و بدنبال آن XXX والی آخر حذف خواهند شد.



شکل ۶-۲۱

نمایش یک صف اولویت با استفاده از آرایه

یک روش دیگر برای پیاده‌سازی یک صف اولویت در حافظه، استفاده از یک صف جداگانه برای هر سطح از اولویت (یا برای هر عدد اولویت) است. هر یک از این صفها در آرایه چرخشی یا حلقوی مربوط به خود ظاهر می‌شود و باید جفت اشاره‌گر FRONT و REAR مختص خود را داشته باشند. در واقع چنانچه به هر صف مقدار مساوی اختصاص یابد، یک آرایه دوبعدی QUEUE را می‌توان بجای آرایه‌های خطی مورد استفاده قرار داد. شکل ۶-۲۲ این‌گونه نمایش صف اولویت را برای شکل ۶-۲۱ نشان می‌دهد.

	FRONT	REAR		1	2	3	4	5	6
1	2	2	1		AAA				
2	1	3	2	BBB	CCC	XXX			
3	0	0	3						
4	5	1	4	FFF				DDD	EEE
5	4	4	5				GGG		

شکل ۶-۲۲

ملاحظه می‌کنید که $FRONT[K]$ و $REAR[K]$ به ترتیب شامل عناصر ابتدا و انتهای سطر K ام صف هستند. سطری که عناصر در آن دارای عدد اولویت K هستند. در زیر شرحهایی از الگوریتم‌های حذف و اضافه کردن عناصر در یک صف اولویت ارائه شده است که مانند بالا به وسیله یک آرایه دوبعدی $QUEUE$ پیاده‌سازی می‌شود. جزئیات این الگوریتم‌ها به عنوان تمرین به دانشجو واگذار می‌شود.

Algorithm 6.15: This algorithm deletes and processes the first element in a priority queue maintained by a two-dimensional array $QUEUE$.

1. [Find the first nonempty queue.]
Find the smallest K such that $FRONT[K] \neq NULL$.
2. Delete and process the front element in row K of $QUEUE$.
3. Exit.

این الگوریتم عنصر اول را از یک صف اولویت که به صورت آرایه دوبعدی $QUEUE$ پیاده‌سازی شده است، حذف و آن را پردازش می‌کند.

Algorithm 6.16: This algorithm adds an ITEM with priority number M to a priority queue maintained by a two-dimensional array $QUEUE$.

1. Insert ITEM as the rear element in row M of $QUEUE$.
2. Exit.

این الگوریتم عنصر $ITEM$ با عدد اولویت M را به یک صف اولویت که به صورت آرایه دوبعدی $QUEUE$ پیاده‌سازی شده است اضافه می‌کند.

خلاصه مطالب فصل

هنگام انتخاب ساختمان داده‌های مختلف برای یک مسأله معین، بار دیگر توازن بین زمان و حافظه را ملاحظه کردید. نمایش یک صف اولویت به وسیله آرایه، از نظر زمان بسیار کاراتر از لیست یکطرفه است. علت آن هم این است که هنگام اضافه کردن یک عنصر به لیست یکطرفه، باید یک جستجوی خطی در لیست انجام داد. از طرف دیگر، نمایش صف اولویت به وسیله لیست یکطرفه می‌تواند از نظر مصرف حافظه بسیار کاراتر از نمایش آرایه‌ای صف اولویت باشد، چون هنگام استفاده از نمایش آرایه‌ای، وقتی تعداد عناصر یک سطح اولویت از ظرفیت آن سطح بزرگتر می‌شود سرریزی اتفاق می‌افتد اما هنگام استفاده از لیست یکطرفه، سرریزی تنها وقتی اتفاق می‌افتد که تعداد کل عناصر بزرگتر از ظرفیت کل می‌شود. یک روش دیگر، استفاده از لیست پیوندی برای هر سطح اولویت است.

مسئله‌های حل شده

پشته‌ها

مسئله ۱-۶: پشته کاراکترهای زیر را در نظر بگیرید که در آن STACK به $N = 8$ خانه حافظه اختصاص داده می‌شود:

STACK: A, C, D, F, K, —, —, —

جهت سهولت در نمادگذاری از "-" برای نمایش خانه حافظه خالی استفاده می‌کنیم. وقتی عملیات زیر انجام می‌شود وضعیت پشته را بیان کنید:

POP(STACK, ITEM)	(ه)	POP(STACK, ITEM)	(الف)
PUSH(STACK, R)	(و)	POP(STACK, ITEM)	(ب)
PUSH(STACK, S)	(ز)	PUSH(STACK, L)	(ج)
POP(STACK, ITEM)	(ح)	PUSH(STACK, P)	(د)

حل: زیربرنامه POP همیشه عنصر بالای پشته را حذف می‌کند و زیربرنامه PUSH همیشه عنصر جدید به بالای پشته اضافه می‌کند. بنابراین:

STACK: A, C, D, L, —, —, —, —	(ه)	STACK: A, C, D, F, —, —, —, —	(الف)
STACK: A, C, D, L, R, —, —, —	(و)	STACK: A, C, D, —, —, —, —, —	(ب)
STACK: A, C, D, L, R, S, —, —	(ز)	STACK: A, C, D, L, —, —, —, —	(ج)
STACK: A, C, D, L, R, —, —, —	(ح)	STACK: A, C, D, L, P, —, —, —	(د)

مسئله ۲-۶: داده‌های مسئله ۱-۶ را در نظر بگیرید. (الف) چه وقت سرریزی اتفاق می‌افتد؟ (ب) چه وقت C قبل از D حذف خواهد شد؟

حل: (الف) چون به STACK، $N = 8$ خانه حافظه اختصاص داده شده است، سرریزی وقتی اتفاق می‌افتد که STACK حاوی ۸ عنصر باشد و یک عمل PUSH برای اضافه کردن عنصر دیگر در STACK داشته باشیم.

(ب) چون STACK به صورت یک پشته پیاده‌سازی شده است، C هرگز قبل از D حذف نمی‌شود.

مسئله ۳-۶: پشته زیر را در نظر بگیرید که در آن به STACK، $N = 6$ خانه حافظه اختصاص داده شده است.

STACK: AAA, DDD, EEE, FFF, GGG, —

وقتی عملیات زیر انجام می‌شود وضعیت پشته را شرح دهید:

PUSH(STACK, SSS), (د) PUSH(STACK, KKK), (الف)

POP(STACK, ITEM), (ه) POP(STACK, ITEM), (ب)

PUSH(STACK, TTT), (و) PUSH(STACK, LLL), (ج)

حل: (الف) KKK به بالای پشته، STACK اضافه می‌شود، در نتیجه:

STACK: AAA, DDD, EEE, FFF, GGG, KKK

(ب) عنصر بالا از STACK حذف می‌شود، در نتیجه:

STACK: AAA, DDD, EEE, FFF, GGG, —

(ج) LLL به بالای STACK اضافه می‌شود، در نتیجه:

STACK: AAA, DDD, EEE, FFF, GGG, LLL

(د) سرریزی اتفاق می‌افتد چون STACK پر است و عنصر دیگر SSS به STACK اضافه می‌شود.

هیچ یک از عملیات دیگر تا وقتی مسأله سرریزی حل نشود نمی‌توانند انجام شوند. عمل سرریزی را مثلاً می‌توان با افزودن حافظه اضافی به STACK حل کرد.

مسأله ۴-۶: فرض کنید به STACK، $n = 6$ خانه حافظه اختصاص داده شده است و در ابتدا STACK خالی است یا به بیان دیگر $TOP = 0$. خروجی قطعه برنامه زیر را تعیین کنید.

1. Set AA/ and BBB:=5.
2. Call PU ACK, AAA).
Call PU: ACK, 4).
Call PUSH(STACK, BBB + 2).
Call PUSH(STACK, 9).
Call PUSH(STACK, AAA + BBB).
3. Repeat while $TOP \neq 0$:
Call POP(STACK, ITEM).
Write: ITEM.
[End of loop.]
4. Return.

مرحله ۱. قرار دهید $AAA = 2$ و $BBB = 5$.

مرحله ۲. $AAA + BBB = 7$ و $AAA = 2, 4, BBB + 2 = 7, 9$ را در پشته STACK، Push کنید. نتیجه می‌شود:

STACK: 2, 4, 7, 9, 7, —

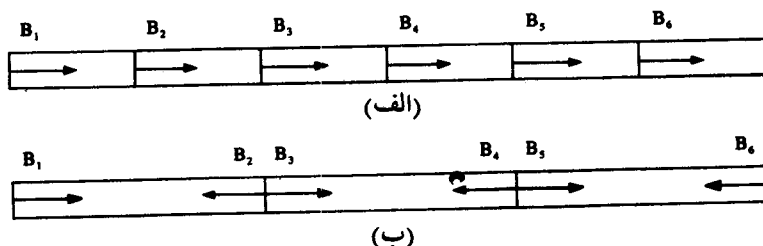
مرحله ۳. عنصرهای STACK را تا وقتی STACK خالی نشده است POP کنید و چاپ نمایید. چون عنصر بالا همیشه POP می‌شود، خروجی از دنباله زیر تشکیل می‌شود:

7, 9, 7, 4, 2

ملاحظه می‌کنید که دنباله بالا به ترتیب عکس عناصری هستند که به STACK اضافه شده‌اند.

مسئله ۵-۶: فرض کنید به $K = 6$ پشته فضای معلوم S که از N خانه حافظه همجوار تشکیل شده، اختصاص داده شده است. روشهای نگهداری پشته‌ها را در S شرح دهید.

حل: فرض کنید هیچ اطلاعاتی از قبل در دست نیست تا بیان کند یک پشته خیلی سریع تر از پشته دیگر رشد می‌کند. آنگاه می‌توان N / K خانه برای هر پشته در نظر گرفت این عمل در شکل ۲۳-۶ (الف) نشان داده شده است که در آن B_6, \dots, B_2, B_1 به ترتیب عناصر پائین پشته‌ها را نمایش می‌دهند. به عبارت دیگر می‌توان پشته‌ها را به دو قسمت تقسیم کرد و $2N / K$ خانه حافظه برای هر جفت پشته به صورتی که در شکل ۲۳-۶ (ب) نشان داده شده است اختیار کرد. روش دوم می‌تواند تعداد دفعات وقوع سرریزی را کاهش دهد.



شکل ۲۳-۶

نمادگذاری لهستانی

مسئله ۶-۶: با ملاحظه و بررسی و روش دستی هر عبارت میانوندی زیر را به عبارت پسوندی معادل آن تبدیل کنید:

$$(A + B \uparrow D) / (E - F) + G \quad (\text{ب}) \quad (A - B) * (D/E) \quad (\text{الف})$$

$$A * (B + D) / E - F * (G + H/K) \quad (\text{ج})$$

حل: با استفاده از ترتیبی که با آن عملگرها اجرا می‌شوند، هر عملگر را از نماد میانوندی به پسوندی تبدیل می‌کنیم. از گروه باز و بسته [] برای نمایش بخشی از تبدیل انجام شده در هر مرحله استفاده می‌کنیم.

$$(A - B) * (D/E) = [AB-] * [DE/] = AB-DE/* \quad (\text{الف})$$

$$(A + B \uparrow D) / (E - F) + G = (A + [BD\uparrow]) / [EF-] + G = [ABD\uparrow+] / [EF-] + G \quad (\text{ب})$$

$$= [ABD\uparrow+EF-/] + G = ABD\uparrow+EF-/ + G$$

$$\begin{aligned}
 A * (B + D) / E - F * (G + H / K) &= A * [BD+] / E - F * (G + [HK/]) & (ج) \\
 &= [ABD+*] / E - F * [GHK / +] \\
 &= [ABD+*E /] - [FGHK / + *] \\
 &= ABD+*E / FGHK / + * -
 \end{aligned}$$

ملاحظه می‌کنید که تا وقتی عملوندها روی هم نیفتاده باشند ما در یک مرحله بیش از یک عملگر را به صورت پسوندی تبدیل کرده‌ایم.

مسئله ۷-۶: عبارت محاسباتی P زیر را که با نماد پسوندی نوشته شده است در نظر بگیرید:

$$P: \quad 12, 7, 3, -, /, 2, 1, 5, +, *, +$$

(الف) با بررسی و روش دستی P را به عبارت میانوندی معادل آن تبدیل کنید.

(ب) عبارت میانوندی را ارزیابی کنید.

حل: (الف) عمل جستجو و خواندن را از چپ به راست انجام می‌دهیم، هر عملگر را از نماد پسوندی به میانوندی تبدیل می‌کنیم. از کروه‌ش باز و بسته [] برای نمایش بخشی از تبدیل انجام شده در هر مرحله استفاده می‌کنیم.

$$\begin{aligned}
 P &= 12, [7-3], /, 2, 1, 5, +, *, + \\
 &= [12/(7-3)], 2, 1, 5, +, *, + \\
 &= [12/(7-3)], 2, [1+5], *, + \\
 &= [12/(7-3)], [2*(1+5)], + \\
 &= 12/(7-3) + 2*(1+5)
 \end{aligned}$$

(ب) با استفاده از عبارت میانوندی، به دست می‌آید:

$$P = 12/(7-3) + 2 * (1+5) = 12/4 + 2 * 6 = 3 + 12 = 15$$

مسئله ۸-۶: عبارت پسوندی P مسئله ۷-۶ را در نظر بگیرید. با استفاده از الگوریتم 6.3، P را ارزیابی کنید.

حل: نخست یک پرانتز بسته نگهبان در انتهای P اضافه می‌کنیم به دست می‌آید:

$$P: \quad 12, 7, 3, -, /, 2, 1, 5, +, *, +,)$$

عمل جستجو و خواندن P را از چپ به راست انجام می‌دهیم. اگر با یک مقدار ثابت روبرو شویم، آن را در پشته قرار می‌دهیم اما اگر با یک عملگر روبرو شویم دو مقدار ثابت بالای پشته را با آن عملگر ارزیابی می‌کنیم. شکل ۲۴-۶ محتوی STACK را به محض جستجو و خوانده شدن هر عنصر P نشان می‌دهد.

Symbol	STACK
12	12
7	12, 7
3	12, 7, 3
-	12, 4
/	3
2	3, 2
1	3, 2, 1
5	3, 2, 1, 5
+	3, 2, 6
*	3, 12
+	15
)	15

شکل ۶-۲۴

عدد آخر یعنی 15 در پشته STACK، وقتی پرانتز بسته نگه‌بان خوانده می‌شود مقدار عبارت P است. این مقدار با نتیجه مسأله ۷-۶ (ب) سازگار است.

مسأله ۹-۶: عبارت میان‌وندی زیر Q را در نظر بگیرید:

$$Q: ((A + B) * D) \uparrow (E - F)$$

با استفاده از الگوریتم 6.4، Q را به عبارت P پس‌وندی معادل آن تبدیل کنید.

حل: نخست یک پرانتز باز داخل پشته STACK، Push می‌کنیم و آنگاه درانت‌های Q یک پرانتز بسته اضافه می‌کنیم به دست می‌آید:

$$Q: ((A + B) * D) \uparrow (E - F))$$

توجه دارید که اکنون Q شامل 16 عنصر است. Q را از چپ به راست می‌خوانیم. یادآوری می‌کنیم که

- (۱) اگر به یک مقدار ثابت برخورد کنیم آن را به P اضافه می‌کنیم؛
- (۲) اگر به یک پرانتز باز برخورد کنیم آن را به داخل پشته Push می‌کنیم (۳) اگر به یک عملگر برخورد کنیم آن را در سطح خودش پائین می‌بریم و (۴) اگر به یک پرانتز بسته برخورد کنیم آن را با اولین پرانتز باز فرو می‌بریم. شکل ۶-۲۵ تصویرهای STACK و رشته P را به محض خوانده‌شدن هر عنصر Q نشان می‌دهد.

Symbol	STACK	Expression P
(((
((((
A	(((A
+	(((+	A
B	(((+	A B
)	((A B +
*	((*	A B +
D	((*	A B + D
)	(A B + D *
↑	(↑	A B + D *
((↑ (A B + D *
E	(↑ (A B + D * E
-	(↑ (-	A B + D * E
F	(↑ (-	A B + D * E F
)	(↑	A B + D * E F -
)		A B + D * E F - ↑

شکل ۲۵-۶

هنگامی که STACK خالی است، پرانتز بسته نهایی خوانده می‌شود و نتیجه چنین است:

$$P: \quad A B + D * E F - \uparrow$$

که نماد پسوندی موردنظر معادل Q است.

مسئله ۱۰-۶: با بررسی و روش دستی، هر عبارت میانوندی زیر را به عبارت پیشوندی معادل آن تبدیل کنید.

$$(A - B) * (D / E) \quad (\text{الف})$$

$$(A + B \uparrow D) / (E - F) + G \quad (\text{ب})$$

آیا هیچ رابطه‌ای بین عبارتهای پیشوندی و عبارتهای پسوندی معادل آن که در مسئله ۶-۶ به دست آوردید وجود دارد؟

حل: با استفاده از ترتیبی که با آن عملگرها اجرا می‌شوند، هر عملگر را از نماد میانوندی به نماد پیشوندی تبدیل می‌کنیم.

$$(A - B) * (D / E) = [-AB] * [/DE] = * - A B / D E \quad (\text{الف})$$

$$\begin{aligned} (A + B \uparrow D) / (E - F) + G &= (A + [\uparrow BD]) / [-EF] + G \quad (\text{ب}) \\ &= [+A \uparrow BD] / [-EF] + G \\ &= [/+A \uparrow BD - EF] + G \\ &= + / + A \uparrow B D - E F G \end{aligned}$$

عبارت پیشوندی عکس عبارت پسوندی نیست. با وجود این، ترتیب عملوندهای E و A, B, D در قسمت (الف) و A, B, D, E, F و G در قسمت (ب) در هر سه عبارت پیشوندی، پسوندی و میانوندی یکسان است.

QUICKSORT

مسأله ۱۱-۶: فرض کنید S لیست زیر، از ۱۴ کاراکتر الفبایی تشکیل شده است:

(D) A T A S T R U C T U R E (S)

فرض کنید کاراکترهای S به صورت الفبایی مرتب باشند. با استفاده از الگوریتم QuickSort مکان نهایی کاراکتر اول D را پیدا کنید.

حل: کار را با کاراکتر آخر S شروع می‌کنیم. لیست را از راست به چپ جستجو و می‌خوانیم تا کاراکتری را پیدا کنیم که از نظر الفبایی قبل از D قرار دارد. این کاراکتر C است. جای D و C را عوض می‌کنیم، لیست زیر بدست می‌آید:

(C) A T A S T R U (D) T U R E S

کار را با C شروع می‌کنیم، لیست را به طرف D یعنی از چپ به راست می‌خوانیم تا کاراکتری را پیدا کنیم که از نظر الفبایی بعد از D قرار دارد. این کاراکتر T است. جای D و T را عوض می‌کنیم، لیست زیر بدست می‌آید:

C A (D) A S (T) R U T T U R E S

کار را با T شروع می‌کنیم، لیست را به طرف D می‌خوانیم تا کاراکتری را پیدا کنیم که قبل از D قرار دارد. این کاراکتر A است. جای D و A را عوض می‌کنیم، لیست زیر به دست می‌آید:

C A (A) (D) S T R U T T U R E S

کار را با A شروع می‌کنیم، لیست را به طرف D می‌خوانیم تا کاراکتری را پیدا کنیم که بعد از D قرار دارد. چنین حرفی وجود ندارد. معنی آن، این است که D در مکان نهایی اش است. علاوه بر این، حرفهای قبل از D تشکیل لیست کوچکی از تمام حرفهای A می‌دهند که از نظر الفبایی قبل از D هستند همچنین حرفهای بعد از D تشکیل لیست کوچکی از تمام حرفهای A می‌دهند که از نظر الفبایی بعد از D هستند، به صورت زیر:

C A A (D) S T R U T T U R E S

Sublist

Sublist

اکنون مرتب‌کردن S به مرتب‌کردن هر یک از دو لیست کوچک تبدیل می‌شود.

مسئله ۱۲-۶: فرض کنید S از $n = 5$ حرف زیر تشکیل شده باشد:

(A) B C D (E)

C تعداد مقایسه‌هایی را تعیین کنید که برای مرتب‌کردن S با روش QuickSort لازم است. در صورت وجود، چه نتیجه کلی می‌توان از آن بدست آورد؟

حل: کار را با E شروع می‌کنیم برای این که بفهمیم حرف اول تاکنون در جای درستش قرار گرفته است یا نه. به $n - 1 = 4$ مقایسه احتیاج است. اکنون مرتب‌کردن S به مرتب‌کردن لیست کوچک زیر با $n - 1 = 4$ حرف منتهی می‌شود.

A (B) C D (E)

کار را با E شروع می‌کنیم، برای اینکه بفهمیم حرف اول B در لیست کوچک از قبل در جای درستش قرار گرفته است یا نه، به $n - 2 = 3$ مقایسه احتیاج است. اکنون مرتب‌کردن S به مرتب‌کردن لیست کوچک زیر با $n - 2 = 3$ حرف منتهی می‌شود. به همین ترتیب برای این که بفهمیم حرف C در جای درستش قرار گرفته است به $n - 3 = 2$ مقایسه احتیاج است و برای اینکه بفهمیم حرف D در جای درستش است به $n - 4 = 1$ مقایسه احتیاج است. از آنجا که تنها یک حرف باقی می‌ماند لیست اکنون مرتب شده است. روی هم‌رفته تعداد:

$$C = 4 + 3 + 2 + 1 = 10 \text{ مقایسه}$$

داریم. به همین ترتیب با استفاده از QuickSort:

$$C = (n-1) + (n-2) + \dots + 2 + 1 = \frac{n(n-1)}{2} = \frac{n^2}{2} + 0(n) = O(n^2)$$

مقایسه احتیاج است تا یک لیست n عنصری را وقتی از قبل مرتب است مرتب کند. نشان داده می‌شود که این حالت، بدترین حالت را برای QuickSort تشکیل می‌دهد.

مسئله ۱۳-۶: الگوریتم QuickSort را در نظر بگیرید. (الف) آیا می‌توان آرایه‌های LOWER و UPPER را به عوض پشته به صورت صف پیاده‌سازی کرد؟ چرا؟ (ب) برای الگوریتم Quicksort به چه مقدار

حافظه اضافی موردنیاز است یا به عبارت دیگر، پیچیدگی الگوریتم از نظر حافظه چقدر است؟

حل: (الف) از آنجا که اهمیت ندارد زیرمجموعه‌ها با چه ترتیبی مرتب می‌شوند، از این رو LOWER و UPPER را می‌توان به عوض پشته با صف یا حتی با صف دوسره یا Deque پیاده‌سازی کرد.

(ب) الگوریتم QuickSort یک الگوریتم "درجا" است یعنی اینکه عناصر به استثنای حالتی که جایشان عوض می‌شوند درجای خودشان باقی می‌مانند. اساساً حافظه اضافی برای پشته‌ها LOWER و UPPER مورد نیاز است. درحالت میانگین، مقدار حافظه اضافی مورد نیاز برای این الگوریتم متناسب با $\log n$ است که در آن n تعداد عناصر مرتب شده است.

زیربرنامه بازگشتی

مسئله ۱۴-۶: فرض کنید a و b نمایش دو عدد صحیح مثبت باشند. فرض کنید تابع Q به شکل زیر به صورت بازگشتی تعریف شده است:

$$Q(a, b) = \begin{cases} 0 & \text{if } a < b \\ Q(a - b, b) + 1 & \text{if } b \leq a \end{cases}$$

(الف) مقدار $Q(2, 3)$ و $Q(14, 3)$ را پیدا کنید.

(ب) این تابع چه عملی انجام می‌دهد؟ مقدار $Q(5861, 7)$ را پیدا کنید.

حل: (الف) $Q(2, 3) = 0$ چون $2 < 3$

$$\begin{aligned} Q(14, 3) &= Q(11, 3) + 1 \\ &= [Q(8, 3) + 1] + 1 = Q(8, 3) + 2 \\ &= [Q(5, 3) + 1] + 2 = Q(5, 3) + 3 \\ &= [Q(2, 3) + 1] + 3 = Q(2, 3) + 4 \\ &= 0 + 4 = 4 \end{aligned}$$

(ب) هر بار که b از a کم می‌شود مقادیر Q یک واحد افزایش می‌یابد. از این رو $Q(a, b)$ وقتی a بر b تقسیم می‌شود خارج قسمت را پیدا می‌کند. بنابراین

$$Q(5861, 7) = 837$$

مسئله ۱۵-۶: فرض کنید n یک عدد صحیح مثبت باشد. فرض کنید تابع بازگشتی L به صورت زیر تعریف شده است.

$$L(n) = \begin{cases} 0 & \text{if } n = 1 \\ L(\lfloor n/2 \rfloor) + 1 & \text{if } n > 1 \end{cases}$$

در اینجا $\lfloor K \rfloor$ "کف" عدد K را نشان می‌دهد و بزرگترین عدد صحیحی است که بزرگتر از K نباشد. بخش ۲-۲ را ببینید.

(الف) مقدار $L(25)$ را بدست آورید.

(ب) این تابع چه عملی انجام می‌دهد؟

$$\begin{aligned}
 L(25) &= L(12) + 1 \\
 &= [L(6) + 1] + 1 = L(6) + 2 \\
 &= [L(3) + 1] + 2 = L(3) + 3 \\
 &= [L(1) + 1] + 3 = L(1) + 4 \\
 &= 0 + 4 = 4
 \end{aligned}$$

حل: (الف)

(ب) هر بار که n بر ۲ تقسیم می‌شود مقدار L یک واحد افزایش می‌یابد. از این رو L بزرگترین عدد صحیحی است که

$$2^L \leq n$$

بنابراین تابع

$$L = \lfloor \log_2 n \rfloor$$

را به دست می‌آورد.

مسئله ۱۶-۶: فرض کنید اعداد فیبوناچی $F_{11} = 89$ و $F_{12} = 144$ داده شده‌اند.

(الف) برای محاسبه F_{16} آیا باید از روش بازگشتی استفاده کنیم یا روش تکرار؟ مقدار F_{16} را پیدا کنید.

(ب) یک زیربرنامه Procedure با روش تکرار بنویسید تا نخستین N عدد فیبوناچی $F[1], F[2], \dots, F[N]$ را به دست آورد که در آن $N > 2$ این زیربرنامه را با زیربرنامه بازگشتی 6.8 مقایسه کنید.

حل: (الف) به عوض استفاده از روش بازگشتی (که در آن عمل ارزیابی از بالا به پایین انجام می‌شود) بهتر است اعداد فیبوناچی با روش تکرار بدست آید (یعنی عمل ارزیابی از پایین به بالا انجام شود). یادآوری می‌کنیم که هر عدد فیبوناچی مجموع دو عدد فیبوناچی قبل از خودش است. با شروع از F_{11} و F_{12} داریم:

$$F_{13} = 89 + 144 = 233, \quad F_{14} = 144 + 233 = 377, \quad F_{15} = 233 + 377 = 610$$

و در نتیجه:

$$F_{16} = 377 + 610 = 987$$

Procedure P6.16: FIBONACCI(F, N)

(ب)

این زیربرنامه نخستین N عدد فیبوناچی را پیدا می‌کند و آنها را در آرایه F قرار می‌دهد.

1. Set $F[1] := 1$ and $F[2] := 1$.
2. Repeat for $L = 3$ to N :
 Set $F[L] := F[L-1] + F[L-2]$.
 [End of loop.]
3. Return.

تأکید می‌کنیم که این زیربرنامه با روش تکرار بسیار کاراتر از زیربرنامه بازگشتی 6.8 است.

مسئله ۱۷-۶: با استفاده از تعریف تابع آکرمان (تعریف ۳-۶)، $A(1, 3)$ را بدست آورید.

حل : ما 15 مرحله زیر را داریم :

- (1) $A(1, 3) = A(0, A(1, 2))$
- (2) $A(1, 2) = A(0, A(1, 1))$
- (3) $A(1, 1) = A(0, A(1, 0))$
- (4) $A(1, 0) = A(0, 1)$
- (5) $A(0, 1) = 1 + 1 = 2$
- (6) $A(1, 0) = 2$
- (7) $A(1, 1) = A(0, 2)$
- (8) $A(0, 2) = 2 + 1 = 3$
- (9) $A(1, 1) = 3$
- (10) $A(1, 2) = A(0, 3)$
- (11) $A(0, 3) = 3 + 1 = 4$
- (12) $A(1, 2) = 4$
- (13) $A(1, 3) = A(0, 4)$
- (14) $A(0, 4) = 4 + 1 = 5$
- (15) $A(1, 3) = 5$

حالت پله‌ای به طرف جلو بیان‌گر آن است که یک ارزیابی را به تعویق انداختیم و می‌خواهیم از تعریف استفاده کنیم و حالت پله‌ای به عقب بیان‌گر آن است که می‌خواهیم از انتها به ابتدا برگردیم و ملاحظه می‌کنید که از فرمول اول تعریف 6،3 در مرحله‌های 5، 8، 11 و 14 استفاده شده است و از فرمول دوم در مرحله 4 و از فرمول سوم در مرحله‌های 1، 2 و 3 استفاده شده است. در مراحل دیگر با جایگزینی‌ها به ابتدا و عقب برمی‌گردیم.

مسأله ۱۸-۶ : فرض کنید یک زیربرنامه بازگشتی P تنها یک بار فراخوانی بازگشتی دارد :

Step K. Call P.

دلیلی ارائه دهید که چرا به پشته STADD (برای آدرسهای بازگشتی) احتیاج نیست.

حل : از آنجا که تنها یک فراخوانی بازگشتی وجود دارد کنترل کار همیشه به مرحله $K+1$ برای یک بازگشت Return منتقل می‌شود، به استثنای بازگشت نهایی که به برنامه اصلی است. بنابراین به عوض نگهداری پشته STADD (و متغیر محلی ADD) فقط به جای

(c) Go to Step K + 1

در تبدیل " Step J. Return " می‌نویسیم. (بخش ۸-۶ را ببینید) :

(c) Go to Step ADD

مسأله ۱۹-۶ : راه حل مسأله برجهای هانوی را به گونه‌ای بازنویسی کنید که در آن به جای دو فراخوانی بازگشتی تنها از یک فراخوانی استفاده شود.

حل : یک راه آن است که میله‌های A و B را به صورت متقارن در نظر بگیریم، یعنی مراحل زیر را بکار

بندیم:

تعداد $N-1$ دیسک را از A به B منتقل کنید و آنگاه $A \rightarrow C$ را بکار بندید.

تعداد $N-2$ دیسک را از B به A منتقل کنید و آنگاه $B \rightarrow C$ را بکار بندید.

تعداد $N-3$ دیسک را از A به B منتقل کنید و آنگاه $A \rightarrow C$ را بکار بندید.

تعداد $N-4$ دیسک را از B به A منتقل کنید و آنگاه $B \rightarrow C$ را بکار بندید.

و الی آخر. بنابراین می‌توانیم تنها یک فراخوانی بازگشتی را تکرار کنیم که پس از هر تکرار جای BEG و AUX را عوض می‌کند به صورت زیر:

Procedure P6.19: TOWER(N , BEG , AUX , END)

1. If $N = 0$, then: Return.
2. Repeat Steps 3 to 5 for $K = N, N-1, N-2, \dots, 1$.
3. Call TOWER($K-1$, BEG , END , AUX).
4. Write: $BEG \rightarrow END$.
5. [Interchange BEG and AUX .]
Set $TEMP := BEG$, $BEG := AUX$, $AUX := TEMP$.
[End of Step 2 loop.]
6. Return.

ملاحظه می‌کنید که ما در اینجا به جای $N = 1$ از $N = 0$ به عنوان مقدار پایه برای بازگشت استفاده می‌کنیم.

مسئله ۲۰-۶: پیاده‌سازی پشته‌ای الگوریتم بخش ۸-۶ را برای تبدیل یک زیربرنامه بازگشتی به یک برنامه غیربازگشتی در نظر بگیرید. یادآوری می‌کنیم که در زمان فراخوانی بازگشتی به جای آدرس بازگشت جاری، آدرس بازگشت جدید را به داخل پشته $STADD$ ، $Push$ می‌کنیم.

فرض کنید خواسته باشیم آدرس بازگشت جاری را به داخل پشته $STADD$ ، $Push$ کنیم. (در بسیاری از متنها و کتابها اینگونه عمل می‌کنند) چه تغییری لازم است در الگوریتم تبدیل داده شود؟

حل: تغییر اصلی عبارت است از آن که در زمان بازگشت به سطح اجرای قبلی، مقدار جاری ADD مکان بازگشت را تعیین می‌کند نه مقدار ADD را پس از POP شدن مقادیر پشته‌ها. بنابراین مقدار ADD باید با دستور $ADD := SAVE$ نگهداری شود، آنگاه مقادیر پشته‌ها POP می‌شوند و بدنبال آن کنترل به مرحله $SAVE$ منتقل می‌شود. تغییر دیگر آن است که باید از ابتدا دستور جایگزینی $ADD = Main$ را داشته باشیم و وقتی $ADD = Main$ به برنامه فراخواننده اصلی بازگشت $Return$ کنیم نه وقتی که پشته‌ها خالی هستند. الگوریتم به صورت رسمی به شرح زیر است:

(۱) "آماده‌سازی"

(الف) یک پشته $STPAR$ برای هر پارامتر PAR ، یک پشته $STVAR$ برای هر متغیر محلی VAR و یک متغیر محلی ADD و یک پشته $STADD$ برای نگهداری آدرسهای بازگشتی تعریف کنید.

(ب) قرار دهید $ADD := NULL$ و $TOP := Main$.

(۲) تبدیل "مرحله K، فراخوانی P"

(الف) مقادیر جاری پارامترها و متغیرهای محلی و آدرس بازگشت جاری ADD را به داخل پشته‌های مربوطه Push کنید.

(ب) با استفاده از مقادیر آرگومان جدید پارامترها را مقداردهی کنید و قرار دهید $ADD := [Step] K+1$.

(ج) Go to Step 1 [ابتدای زیربرنامه P]

(۳) تبدیل "مرحله J، بازگشت Return"

(الف) اگر $ADD = Main$ آنگاه Return [کنترل به برنامه اصلی منتقل می‌شود].

(ب) قرار دهید $SAVE := ADD$.

(ج) مقادیر بالای پشته‌ها را برگردانید، یعنی پارامترها و متغیرهای محلی را برابر مقادیر بالای پشته‌ها قرار دهید و ADD را برابر مقدار بالای پشته $STADD$ قرار دهید.

(د) Go to Step SAVE .

این الگوریتم تبدیل را با الگوریتم بخش ۸-۶ مقایسه کنید.

صفها، صفهای دوسره Deque

مسئله ۲۱-۶: صف کاراکترهای زیر را در نظر بگیرید که در آن QUEUE یک آرایه چرخشی یا حلقوی است که شش خانه حافظه به آن اختصاص داده شده است:

FRONT = 2, REAR = 4 QUEUE: $\rightarrow A, C, D, \rightarrow$

جهت سهولت در نمادگذاری از "-" برای نمایش خانه حافظه خالی استفاده می‌کنیم. وضعیت صف را به محض انجام هر یک از عملیات زیر شرح دهید:

- | | |
|-----------------------------------|------------------------|
| (الف) F به صف اضافه می‌شود. | (و) دو حرف حذف می‌شود. |
| (ب) دو حرف حذف می‌شوند. | (ز) S صف اضافه می‌شود. |
| (ج) K, L و M به صف اضافه می‌شوند. | (ح) دو حرف حذف می‌شود. |
| (د) دو حرف حذف می‌شود. | (ط) یک حرف حذف می‌شود. |
| (ه) R به صف اضافه می‌شود. | (ی) یک حرف حذف می‌شود. |

حل: (الف) F به انتهای صف اضافه می‌شود، در نتیجه

FRONT = 2, REAR = 5 QUEUE: $\rightarrow A, C, D, F, \rightarrow$

توجه دارید که REAR به اندازه یک واحد افزایش می‌یابد.

(ب) دو حرف A و C حذف می‌شوند، باقی می‌ماند:

FRONT = 4, REAR = 5 QUEUE: — — — D, F, —

توجه دارید که FRONT دو واحد افزایش می‌یابد.

(ج) K, L و M به انتهای صف اضافه می‌شوند. از آنجا که K در آخرین خانه حافظه QUEUE قرار می‌گیرد L و M در دو خانه اول قرار می‌گیرند. در نتیجه:

FRONT = 4, REAR = 2 QUEUE: L, M, — D, F, K

توجه دارید که REAR به اندازه 3 واحد افزایش می‌یابد که حساب با باقیمانده 6 است.

$$\text{REAR} = 5 + 3 = 8 = 2 \pmod{6}$$

(د) دو حرف ابتدایی D و F حذف می‌شوند، باقی می‌ماند:

FRONT = 6, REAR = 2 QUEUE: L, M, — — — K

(ه) R به انتهای صف اضافه می‌شود، در نتیجه:

FRONT = 6, REAR = 3 QUEUE: L, M, R, — — — K

(و) دو حرف ابتدایی K و L حذف می‌شوند، باقی می‌ماند:

FRONT = 2, REAR = 3 QUEUE: — — — M, R, — — —

توجه دارید که FRONT به اندازه 2 واحد افزایش می‌یابد که حساب با باقیمانده 6 است:

$$\text{FRONT} = 6 + 2 = 8 = 2 \pmod{6}$$

(ز) S به انتهای صف اضافه می‌شود، در نتیجه:

FRONT = 2, REAR = 4 QUEUE: — — — M, R, S, — —

(ح) دو حرف ابتدایی M و R حذف می‌شود، باقی می‌ماند:

FRONT = 4, REAR = 4 QUEUE: — — — S, — — —

(ط) حرف ابتدا S حذف می‌شود. چون FRONT = REAR در نتیجه صف خالی است. از این رو NULL را در FRONT و REAR جایگزین می‌کنیم. بنابراین

FRONT = 0, REAR = 0 QUEUE: — — — — —

(ی) چون FRONT = NULL، هیچ عمل حذفی نمی‌تواند صورت گیرد، زیرریزی اتفاق می‌افتد.

مسئله ۲۲-۶: فرض کنید هر ساختمان داده در یک آرایه چرخشی با N خانه حافظه ذخیره می‌شود.

(الف) تعداد عناصر NUMB صف را برحسب FRONT و REAR تعیین کنید.

(ب) تعداد عناصر NUMB صف دوسره یا Deque را برحسب LEFT و RIGHT تعیین کنید.

(ج) چه وقت آرایه پر خواهد شد؟

FRONT = 3, REAR = 9 **QUEUE:** *, *, *, *, *, *, *

اگر $REAR < FRONT$ ، آنگاه $FRONT - REAR - 1$ تعداد خانه خالی می باشد، بنابراین:

$$\text{NUMB} = \text{N} - (\text{FRONT} - \text{REAR} - 1) = \text{N} + \text{REAR} - \text{FRONT} + 1$$

برای مثال صف زیر با $N = 12$ را در نظر بگیرید :

FRONT = 9, REAR = 4 QUEUE: *, *, *, *, _ _ _ _ *, *, *, *

آنگاه، $NUMB = 12 + 4 - 9 + 1 = 8$ ، که در تصویر نشان داده شده است.

با استفاده از حساب با باقیمانده N تنها به یک فرمول زیر احتیاج داریم:

$$\text{NUMB} = \text{REAR} - \text{FRONT} + 1 \pmod{N}$$

(ب) همان نتیجه برای صفهای دوسره یا Deque ها نیز بدست می آید با این تفاوت که در اینجا به جای RIGHT ، FRONT جایگزین می شود یعنی

$$\text{NUMB} = \text{RIGHT} - \text{LEFT} + 1 \pmod{N}$$

(ج) زمانی کہ

FRONT = REAR + 1 (ii) REAR = N , FRONT = 1 (i)

با یک صف آرایه پر است.

به همین ترتیب، وقتی

LEFT = RIGHT + 1 (ii) RIGHT = N , LEFT = 1 (i)

با یک صف دوسره یا **Deque** آرایه پیراست.

از هر یک از این شرایط نتیجه می شود $NUMB = N$.

مسئله ۲۳- ۶: صف دوسره Deque کاراکترهای زیر را درنظر بگیرید که در آن DEQUE یک آرایه چرخشی یا حلقوی است و شش خانه حافظه به آن اختصاص داده شده است.

LEFT = 2, RIGHT = 4 DEQUE: , A, C, D,

وضعیت صف دوسره Deque را به محض انجام هر یک از عملیات زیر شرح دهید.

(الف) F در سمت راست به صف دوسره اضافه می‌شود.

(ب) دو حرف از سمت راست حذف می‌شوند.

(ج) K, L و M در سمت چپ به صف دوسره اضافه می شوند.

(د) یک حرف از سمت چپ حذف می‌شود.

(ه) R در سمت چپ به صف دوسره اضافه می‌شود.

(و) S در سمت راست به صف دوسره اضافه می‌شود.

(ز) T در سمت راست به صف دوسره اضافه می‌شود.

حل: (الف) F در سمت راست اضافه می‌شود، در نتیجه:

LEFT = 2, RIGHT = 5 DEQUE: \rightarrow A, C, D, F, \rightarrow

توجه دارید که RIGHT به اندازه واحد اضافه می‌شود.

(ب) دو حرف سمت راست، F و D حذف می‌شوند، در نتیجه

LEFT = 2, RIGHT = 3 DEQUE: \rightarrow A, C, \rightarrow \rightarrow

توجه دارید که RIGHT دو واحد افزایش می‌یابد.

(ج) K، L و M در سمت چپ اضافه می‌شوند. چون K اولین خانه حافظه و L آخرین خانه حافظه و M

یک خانه مانده به آخرین خانه حافظه است. در نتیجه

LEFT = 5, RIGHT = 3 DEQUE: K, A, C, \rightarrow M, L

در نتیجه توجه دارید که LEFT به 3 واحد افزایش می‌یابد که حساب با باقیمانده 6 است:

$$\text{LEFT} = 2 - 3 = -1 = 5 \pmod{6}$$

(د) حرف چپ، M، حذف می‌شود و باقی می‌ماند:

LEFT = 6, RIGHT = 3 DEQUE: K, A, C, \rightarrow \rightarrow L

توجه دارید که LEFT به اندازه واحد افزایش می‌یابد.

(ه) R در سمت چپ اضافه می‌شود، در نتیجه:

LEFT = 5, RIGHT = 3 DEQUE: K, A, C, \rightarrow R, L

توجه دارید که LEFT به اندازه واحد افزایش می‌یابد.

(و) S در سمت راست به صف دوسره اضافه می‌شود، در نتیجه:

LEFT = 5, RIGHT = 4 DEQUE: K, A, C, S, R, L

(ز) چون $\text{LEFT} = \text{RIGHT} + 1$ ، آرایه پر است و از این رو T نمی‌تواند به صف دوسره اضافه شود،

سرریزی اتفاق می‌افتد.

مسئله ۲۴-۶: یک صف دوسره Deque را در نظر بگیرید که در یک آرایه چرخشی با N خانه حافظه

نگهداری می‌شود.

(الف) فرض کنید یک عنصر به صف دوسره Deque اضافه شده است LEFT یا RIGHT چگونه تغییر می‌کنند؟

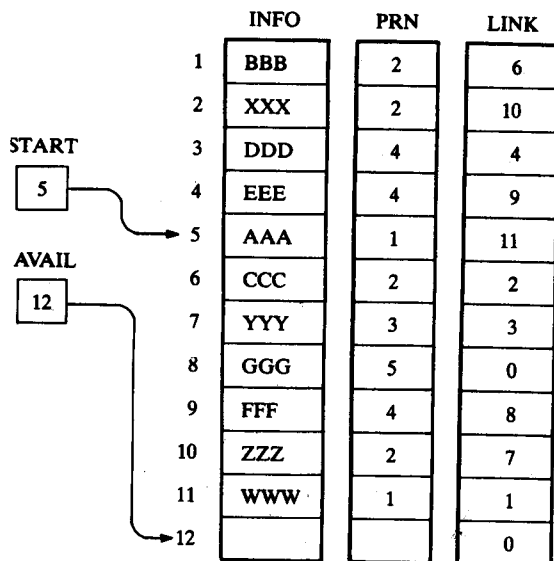
(ب) فرض کنید یک عنصر از صف دوسره حذف می‌شود. LEFT یا RIGHT چگونه تغییر می‌کنند؟
 حل: (الف) اگر این عنصر در سمت چپ اضافه شود، آنگاه LEFT به اندازه واحد (mod N) اضافه می‌شود. از طرف دیگر، اگر این عنصر در سمت راست اضافه شود، آنگاه RIGHT به اندازه واحد (mod N) اضافه می‌شود.

(ب) اگر این عنصر از سمت چپ حذف شود، آنگاه LEFT به اندازه واحد (mod N) افزایش می‌یابد و اگر این عنصر از سمت راست حذف شود، آنگاه RIGHT به اندازه واحد (mod N) کاهش می‌یابد. درحالی‌که $LEFT = RIGHT$ قبل از عمل حذف (یعنی وقتی که صف Deque تنها یک عنصر دارد)، آنگاه هم LEFT و هم RIGHT، جایگزین می‌شود که بیانگر آن هستند صف دوسره، خالی است.

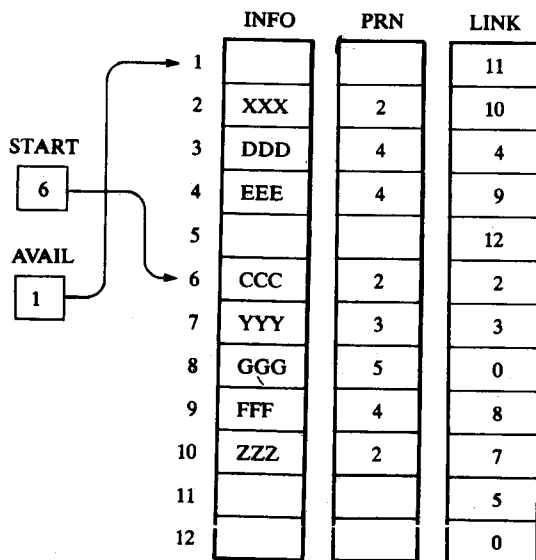
صفهای اولویت

مسأله ۲۵-۶: صف اولویت شکل ۲۰-۶ را در نظر بگیرید که به صورت یک لیست یکطرفه نگهداری می‌شود. (الف) این ساختمان داده را پس از اضافه‌شدن (2, ZZZ), (3, YYY), (2, XXX) و (1, WWW) به صف توصیف کنید. (ب) اگر پس از عملیات اضافه‌شدن قبلی، سه عنصر از این ساختمان داده حذف شوند وضعیت آن را توصیف کنید.

حل: (الف) لیست را پیمایش کرده اولین عنصری را که عدد اولویت آن بزرگتر از عدد اولویت XXX است پیدا می‌کنیم. این عنصر DDD است. از این رو XXX را قبل از DDD (بعد از CCC) در خانه حافظه خالی اول INFO[2] اضافه می‌کنیم. آنگاه لیست را پیمایش کرده اولین عنصری را که عدد اولویت آن بزرگتر از عدد اولویت YYY است پیدا می‌کنیم. این بار نیز این عنصر، DDD است. از این رو YYY را قبل از DDD (بعد از XXX) در خانه خانه خالی بعدی، INFO[7] اضافه می‌کنیم. آنگاه لیست را پیمایش کرده اولین عنصری را که عدد اولویت آن بزرگتر از عدد اولویت ZZZ است پیدا می‌کنیم. این عنصر، YYY است. از این رو ZZZ را قبل از YYY (بعد از XXX) در خانه حافظه بعدی، INFO[10] اضافه می‌کنیم. بالاخره، لیست را پیمایش کرده اولین عنصری را که عدد اولویت آن بزرگتر از عدد اولویت WWW است پیدا می‌کنیم. این عنصر، BBB است. از این رو WWW را قبل از BBB (بعد از AAA) در خانه حافظه خالی بعدی، INFO[11] اضافه می‌کنیم. نهایتاً ساختمان داده شکل ۲۶-۶ (الف) نتیجه می‌شود.



(الف)



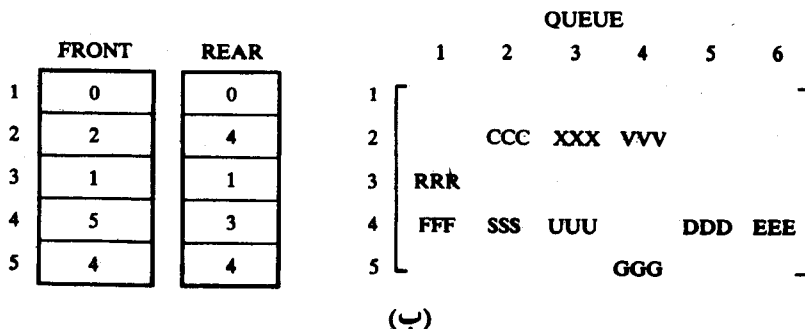
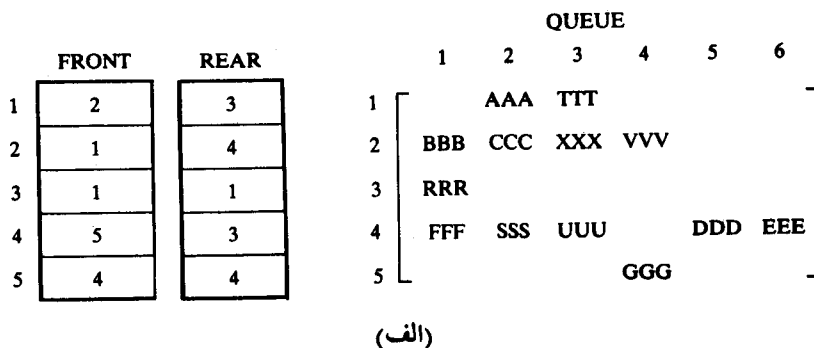
(ب)

(ب) سه عنصر اول از لیست یکطرفه حذف می‌شوند. به‌طور مشخص، نخست AAA حذف می‌شود و خانه حافظه آن INFO[5] به لیست AVAIL اضافه می‌شود. آنگاه WWW حذف می‌شود و خانه حافظه آن INFO[11] به لیست AVAIL اضافه می‌شود. بالاخره BBB حذف می‌شود و خانه حافظه آن INFO[1] به لیست AVAIL اضافه می‌شود. نهایتاً ساختمان داده شکل ۲۶-۶ (ب) نتیجه می‌شود.

توجه کنید: ملاحظه می‌کنید که START و AVAIL با توجه به عملیات مسأله، تغییر می‌کنند.

مسأله ۲۶-۶: صف اولویت شکل ۲۲-۶ را در نظر بگیرید که در آرایه دویعدی QUEUE نگهداری می‌شود. (الف) وضعیت این ساختمان داده را پس از اضافه‌شدن (TTT, 1), (SSS, 4), (RRR, 3), (UUU, 4) و (VVV, 2) به صف توضیح دهید. (ب) اگر پس از عملیات اضافه‌شدن قبلی، سه عنصر از این ساختمان داده حذف شوند وضعیت صف را توضیح دهید.

حل: (الف) هر عنصر را در ردیف اولویت مربوطه‌اش اضافه می‌کنیم، یعنی RRR را به عنوان عنصر انتهای ردیف ۳، SSS را به عنوان عنصر انتهای ردیف ۴، و TTT را به عنوان عنصر انتهای ردیف ۱، UUU را به عنوان عنصر انتهای ردیف ۴، و VVV را به عنوان عنصر انتهای ردیف ۲ اضافه می‌کنیم با این عملیات به ساختمان داده شکل ۲۷-۶ (الف) می‌رسیم. همانگونه که قبل از این متذکر شدیم، عملیات اضافه‌کردن در نمایش آرایه‌ای معمولاً ساده‌تر از عملیات اضافه‌کردن در نمایش لیست یکطرفه است.



(ب) نخست عناصر ردیف 1 را که دارای بیشترین الویت هستند حذف می‌کنیم. چون در ردیف 1 تنها دو عنصر، AAA و TTT وجود دارد، آنگاه عنصر ابتدای ردیف 2، BBB، نیز باید حذف شود. نهایتاً این عملیات به ساختمان داده شکل ۲۷-۶ (ب) منتهی می‌شود.

توجه کنید: در هر دو حالت ملاحظه می‌کنید که FRONT و REAR باتوجه به عملیات مسأله، تغییر می‌کنند.

مسأله‌های تکمیلی

پشته‌ها

مسأله ۲۷-۶: پشته زیر متشکل از نام شهرها را در نظر بگیرید:

STACK: London, Berlin, Rome, Paris, _____, _____

(الف) وضعیت پشته را به محض انجام عملیات زیر توضیح دهید.

PUSH(STACK, Madrid) (iv) PUSH(STACK, Athens) (i)

PUSH(STACK, Moscow) (v) POP(STACK, ITEM) (ii)

POP(STACK, ITEM) (vi) POP(STACK, ITEM) (iii)

(ب) اگر عمل POP(STACK, ITEM) لندن را حذف کند وضعیت پشته را توضیح دهید.

مسأله ۲۸-۶: پشته زیر را در نظر بگیرید که در آن به STACK، $N = 4$ خانه حافظه اختصاص داده شده است.

STACK: AAA, BBB, _____, _____

وضعیت پشته را به محض انجام عملیات زیر توضیح دهید.

POP(STACK, ITEM) (د) POP(STACK, ITEM) (الف)

POP(STACK, ITEM) (ه) POP(STACK, ITEM) (ب)

PUSH(STACK, GGG) (و) PUSH(STACK, EEE) (ج)

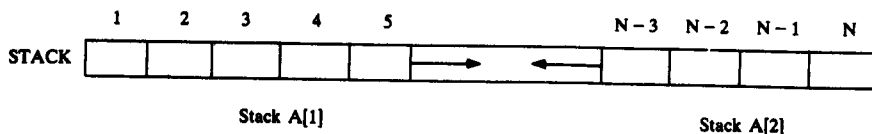
مسأله ۲۹-۶: پشته زیر متشکل از اعداد صحیح را در حافظه در نظر بگیرید که در آن به STACK، $N = 6$ خانه حافظه اختصاص داده شده است.

TOP = 3 STACK: 5, 2, 3, → → →

خروجی قطعه برنامه زیر را مشخص کنید.

1. Call POP(STACK, ITEM).
Call POP(STACK, ITEMB).
Call PUSH(STACK, ITEMB + 2).
Call PUSH(STACK, 8).
Call PUSH(STACK, ITEMA + ITEMB).
2. Repeat while TOP \neq 0:
Call POP(STACK, ITEM).
Write: ITEM.
[End of loop.]

مسأله ۳۰-۶: فرض کنید پشته‌های A[1] و A[2] در آرایه خطی STACK با N عنصر مانند شکل ۲۸-۶ ذخیره شده‌اند. فرض کنید TOP[K] بالای پشته A[K] نمایش می‌دهد.
(الف) یک زیربرنامه PUSH(STACK, N, TOP, ITEM, K) بنویسید تا ITEM را به داخل پشته A[K]، Push کند.
(ب) یک زیربرنامه POP(STACK, TOP, ITEM, K) بنویسید تا عنصر بالای پشته A[K] را حذف کند و این عنصر را در متغیر ITEM جایگزین کند.



شکل ۲۸-۶

عبارت‌های محاسباتی، عبارت‌های لهستانی

مسأله ۳۱-۶: با بررسی و روش دستی، هر عبارت میانوندی زیر را به عبارت پسوندی معادل آن تبدیل کنید:

$$(A - B) / ((D + E) * F) \quad \text{(الف)} \quad ((A + B) / D) \uparrow ((E - F) * G) \quad \text{(ب)}$$

مسأله ۳۲-۶: با بررسی و روش دستی، هر عبارت میانوندی مسأله ۳۱-۶ را به عبارت پیشوندی معادل آن تبدیل کنید.

مسأله ۳۳-۶: هر یک از عبارت محاسباتی بدون پرانتز زیر را ارزیابی کنید.

$$5 + 3 \uparrow 2 - 8 / 4 * 3 + 6 \quad \text{(الف)}$$

$$6 + 2 \uparrow 3 + 9 / 3 - 4 * 5 \quad \text{(ب)}$$

مسأله ۳۴-۶: عبارت محاسباتی بدون پرانتز زیر را در نظر بگیرید:

$$E: \quad 6 + 2 \uparrow 3 \uparrow 2 - 4 * 5$$

با فرض‌های زیر E را ارزیابی کنید: (الف) همانگونه که در عبارتهای بالا داشتید عمل توان‌رسانی از چپ به راست اجرا شود. (ب) عمل توان‌رسانی از راست به چپ اجرا شود.

مسئله ۳۵-۶: هر یک از عبارتهای پسوندی زیر را درنظر بگیرید:

$$\begin{aligned} P_1: & 5, 3, +, 2, *, 6, 9, 7, -, /, - \\ P_2: & 3, 5, +, 6, 4, -, *, 4, 1, -, 2, \uparrow, + \\ P_3: & 3, 1, +, 2, \uparrow, 7, 4, -, 2, *, +, 5, - \end{aligned}$$

با بررسی و روش دستی، هر عبارت داده شده را به نماد میانوندی تبدیل کنید و آنگاه مقدار آنها را ارزیابی کنید.

مسئله ۳۶-۶: هر عبارت پسوندی مسئله ۳۵-۶ را با استفاده از الگوریتم 6.3 ارزیابی کنید.

مسئله ۳۷-۶: با استفاده از الگوریتم 6.4 هر عبارت میانوندی را به عبارت پسوندی معادل آن تبدیل کنید.

$$(A - B) / ((D + E) * F) \quad \text{(الف)} \quad ((A + B) / D) \uparrow ((E - F) * G) \quad \text{(ب)}$$

این مسئله را با مسئله ۳۱-۶ مقایسه کنید.

زیربرنامه‌های بازگشتی

مسئله ۳۸-۶: فرض کنید J و K دو عدد صحیح باشند و Q(J, K) به صورت بازگشتی زیر

$$Q(J, K) = \begin{cases} 5 & \text{if } J < K \\ Q(J - K, K + 2) + J & \text{if } J \geq K \end{cases}$$

تعریف شده است Q(5, 3), Q(2, 7), و Q(15, 2) را محاسبه کنید.

مسئله ۳۹-۶: فرض کنید A و B دو عدد صحیح نامنفی باشند. فرض کنید تابع GCD به صورت بازگشتی زیر تعریف شده است.

$$\text{GCD}(A, B) = \begin{cases} \text{GCD}(B, A) & \text{if } A < B \\ A & \text{if } B = 0 \\ \text{GCD}(B, \text{MOD}(A, B)) & \text{otherwise} \end{cases}$$

در اینجا MOD(A, B) را به صورت "A modulo B" بخوانید که نمایش باقیمانده A تقسیم بر B است.

(الف) GCD(6, 15), GCD(20, 28) و GCD(540, 168) را محاسبه کنید. (ب) این تابع چه عملی انجام می‌دهد.

مسئله ۴۰-۶: فرض کنید N یک عدد صحیح است و H(N) به صورت بازگشتی زیر تعریف شده است:

$$H(N) = \begin{cases} 3 * N & \text{if } N < 5 \\ \text{otherwise} \end{cases}$$

(الف) معیار پایه H را پیدا کنید و (ب) $H(2)$, $H(8)$ و $H(24)$ را محاسبه کنید.

مسئله ۴۱-۶: با استفاده از تعریف 6.3 برای تابع آکرمان، $A(2, 2)$ را تعیین کنید.

مسئله ۴۲-۶: فرض کنید M و N دو عدد صحیح باشند و $F(M, N)$ به صورت بازگشتی زیر تعریف شده است.

$$F(M, N) = \begin{cases} 1 & \text{if } M = 0 \text{ or } M \geq N \geq 1 \\ F(M-1, N) + F(M-1, N-1) & \text{otherwise} \end{cases}$$

(الف) $F(4, 2)$, $F(1, 5)$ و $F(2, 4)$ را پیدا کنید. (ب) چه وقت $F(M, N)$ قابل تعریف نیست؟

مسئله ۴۳-۶: فرض کنید A یک آرایه N عنصری از اعداد صحیح باشد. فرض کنید X یک تابع صحیح تعریف شده به صورت زیر باشد:

$$X(K) = X(A, N, K) = \begin{cases} 0 & \text{if } K = 0 \\ X(K-1) + A(K) & \text{if } 0 < K \leq N \\ X(K-1) & \text{if } K > N \end{cases}$$

برای هر یک از آرایه‌های زیر $X(5)$ را پیدا کنید:

(الف) $N = 8, A: 3, 7, -2, 5, 6, -4, 2, 7$ (ب) $N = 3, A: 2, 7, -4$

این تابع چه عملی انجام می‌دهد؟

مسئله ۴۴-۶: نشان دهید برای n دیسک راه حل بازگشتی مسئله برج‌های هانوی بخش ۷-۶ مستلزم $f(n) = 2^n - 1$ انتقال یا جابجایی است. نشان دهید هیچ راه حل دیگری وجود ندارد که از $f(n)$ کمتری در انتقال استفاده کند.

مسئله ۴۵-۶: فرض کنید S یک رشته N کاراکتری است، و $SUB(S, J, L)$ نمایش زیررشته‌ای از S باشد که از مکان J شروع می‌شود و طول L دارد. و نیز فرض کنید $A // B$ نمایش اتصال دو رشته A و B باشد و $REV(S, N)$ به صورت بازگشتی زیر تعریف شده است:

$$REV(S, N) = \begin{cases} S & \text{if } N = 1 \\ SUB(S, N, 1) // REV(SUB(S, 1, N-1), N-1) & \text{otherwise} \end{cases}$$

(الف) وقتی $N = 3, S = abc$ (i) و $N = 5, S = ababc$ (ii) است $REV(S, N)$ را محاسبه کنید. (ب) این تابع چه عملی انجام می‌دهد.

صفها، صفهای دوسره Deque

مسئله ۴۶-۶: صف زیر را در نظر بگیرید که در آن به QUEUE شش خانه حافظه اختصاص داده شده است:

FRONT = 2, REAR = 5 QUEUE: _____, London, Berlin, Rome, Paris, _____

به محض انجام عملیات زیر وضع صف و وضع FRONT و REAR را توضیح دهید.
 (الف) Athens اضافه می‌شود. (ب) دو شهر حذف می‌شوند. (ج) Madrid اضافه می‌شود.
 (د) Moscow اضافه می‌شود. (ه) سه شهر حذف می‌شوند (و) Oslo اضافه می‌شود.
 مسأله ۴۷-۶: صف دوسره Deque زیر را در نظر بگیرید که در آن به DEQUE، ۶ خانهٔ اختصاص داده شده است.

LEFT = 2, RIGHT = 5 DEQUE: _____, London, Berlin, Rome, Paris, _____

به محض انجام عملیات زیر وضع صف و وضع LEFT و RIGHT را توضیح دهید.
 (الف) Athens در سمت چپ اضافه می‌شود. (ه) دو شهر از سمت راست حذف می‌شوند.
 (ب) دو شهر از سمت راست حذف می‌شوند. (و) یک شهر از سمت چپ حذف می‌شود.
 (ج) Madrid در سمت چپ اضافه می‌شود. (ز) Oslo در سمت چپ اضافه می‌شود.
 (د) Moscow در سمت راست اضافه می‌شود.
 مسأله ۴۸-۶: فرض کنید یک صف در آرایهٔ چرخشی یا حلقوی QUEUE با $N = 12$ خانهٔ حافظه نگهداری می‌شود. تعداد عناصر صف QUEUE را در هر یک از حالات زیر محاسبه کنید.
 (الف) FRONT = 4, REAR = 8; (ب) FRONT = 10, REAR = 3; و (ج) FRONT = 5, REAR = 6
 و آنگاه دو عنصر حذف می‌شوند.

مسأله ۴۹-۶: صف اولویت شکل ۲۶-۶ (ب) را در نظر بگیرید که در لیست یکطرفه نگهداری می‌شود.
 (الف) اگر دو عنصر حذف شوند وضعیت این ساختمان داده را توضیح دهید.
 (ب) اگر قبل از عمل حذف کردن، عنصرهای (TTT, 3), (SSS, 1), (RRR, 3) و (UUU, 2) به صف اضافه شوند وضعیت این ساختمان داده را توضیح دهید.
 (ج) اگر قبل از عمل اضافه کردن، سه عنصر حذف شوند وضعیت این ساختمان داده را توضیح دهید.
 مسأله ۵۰-۶: صف اولویت شکل ۲۷-۶ (ب) را در نظر بگیرید که در آرایهٔ دوبعدی QUEUE نگهداری می‌شود.

(الف) اگر دو عنصر حذف شود وضعیت این ساختمان داده را توضیح دهید.
 (ب) اگر قبل از عمل حذف کردن، عنصرهای (LLL, 4), (KKK, 1), (JJJ, 3) و (MMM, 5) به صف اضافه شوند وضعیت این ساختمان داده را توضیح دهید.
 (ج) اگر پس از عمل اضافه کردن قبلی، شش عنصر حذف شوند وضعیت این ساختمان داده را توضیح دهید.

برای مسأله‌های زیر برنامه بنویسید

مسأله ۵۱-۶: QuickSort را به یک زیربرنامه QUICK(A, N) تبدیل کنید که آرایه N عنصری A را مرتب می‌کند. برنامه را با استفاده از داده‌های زیر آزمایش کنید:

(الف) 44, 33, 11, 55, 77, 99, 40, 60, 99, 22, 88, 66

(ب) D, A, T, A, S, T, R, U, C, T, U, R, E, S

مسأله ۵۲-۶: برنامه‌ای بنویسید تا راه حل مسأله پرجهای هانوی را برای n دیسک به دست دهد. برنامه را با استفاده از (الف) $n = 3$ و (ب) $n = 4$ آزمایش کنید.

مسأله ۵۳-۶: الگوریتم 64 را به یک زیربرنامه POLISH(Q, P) تبدیل کنید تا یک عبارت میانوندی Q را به عبارت پسوندی P معادل آن تبدیل کند. فرض کنید هر عملوند یک کاراکتر القابلی متفرد است و از نمادهای متداول برای جمع (+)، تفریق (-)، ضرب (*), و تقسیم (/) استفاده کنید اما برای توان از نماد \uparrow یا \$ استفاده کنید. (بعضی از زمانهای برنامه‌نویسی نماد \uparrow را برای توان قبول نمی‌کنند) برنامه را با استفاده از

(الف) $(A + B) * (E - F)$ (ب) $A + (B * C - (D / E * F)) * G * H$

آزمایش کنید

مسأله ۵۴-۶: فرض کنید یک صف اولویت مطابق شکل ۲۰-۶ به صورت لیست یکطرفه نگهداری می‌شود.

(الف) یک زیربرنامه Procedure بنویسید:

INSFQ(INFO, FEN, LINK, START, AVAIL, ITEM, N)

تا عنصر ITEM با عدد اولویت N را به صف اضافه کند الگوریتم 614 را ببینید.

(ب) یک زیربرنامه Procedure بنویسید:

DELFQ(INFO, FEN, LINK, START, AVAIL, ITEM)

تا یک عنصر را از صف حذف کند و آن را در متغیر ITEM جایگزین کند الگوریتم 613 را ببینید.

این زیربرنامه‌های Procedure را با استفاده از داده‌های مسأله ۲۵-۶ آزمایش کنید.

مسأله ۵۵-۶: فرض کنید یک صف اولویت مطابق شکل ۲۲-۶ به صورت آرایه دوبعدی نگهداری می‌شود.

(الف) یک زیربرنامه Procedure بنویسید:

INSFQA(QUEUE, FRONT, REAR, ITEM, N)

تا عنصر **ITEM** با عدد اولویت **N** را به صف اضافه کند. الگوریتم 6.16 را ببینید.

(ب) یک زیربرنامه **Procedure** بنویسید:

DELFQ(QUEUE, FRONT, REAR, ITEM)

تا یک عنصر را از صف حذف کند و آن را در متغیر **ITEM** جایگزین کند. الگوریتم 6.15 را ببینید.

این زیربرنامه‌های **Procedure** را با استفاده از داده‌های مسئله ۳۶-۶ آزمایش کنید. فرض کنید

QUEUE تعداد **ROW** سطر و تعداد **COL** ستون دارد که در آن **ROW** و **COL** متغیرهای سرنامی هستند.

فصل ۷

درختها

۷-۱ مقدمه

تا اینجا، انواع مختلف ساختمان داده‌های خطی از قبیل رشته‌ها، آرایه‌ها، لیستها، پشته‌ها و صفها مورد مطالعه و بررسی کامل قرار گرفته است. فصل حاضر یک ساختمان داده غیرخطی موسوم به درخت را تعریف می‌کند. این ساختمان اساساً برای نمایش داده‌هایی که شامل رابطه سلسله مراتبی بین عناصر مانند رکوردها، درختهای خانوادگی و جدول فهرست مطالب کتاب است بکار می‌رود.

نخست یک نوع خاص از درخت موسوم به درخت دودویی را بررسی می‌کنیم که می‌توان آن را به سادگی در کامپیوتر نگهداری یا ذخیره کنیم. هرچند چنین درختی بنظر خیلی محدود می‌آید اما اندکی دیرتر در همین فصل خواهید دید درختهای عمومی‌تر را می‌توان به صورت درختهای دودویی مورد توجه و بررسی قرار داد.

۷-۲ درختهای دودویی

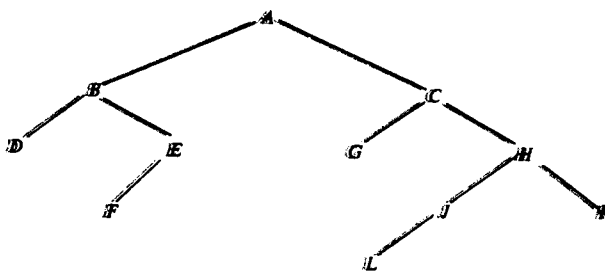
یک درخت دودویی T به صورت مجموعه‌ای متناهی از عناصر بنام گره‌ها تعریف می‌شود به گونه‌ای که :

(الف) T خالی است که به آن درخت پوچ یا درخت تهی می‌گویند یا

(ب) T شامل یک گره خاص R بنام ریشه T است و سایر گره‌های T تشکیل یک زوج مرتب از درخت‌های دودویی مجزا T_1 و T_2 را می‌دهند.

اگر T شامل ریشه R باشد، آنگاه دو درخت T_1 و T_2 به ترتیب زیر درخت‌های چپ و راست R نامیده می‌شوند. اگر T_1 غیر تهی باشد، آنگاه ریشه آن را گره قطعی چپ R می‌گویند به همین ترتیب اگر T_2 غیر تهی باشد آنگاه ریشه آن را گره قطعی راست R می‌گویند.

اغلب اوقات یک درخت دودویی را به وسیله یک نمودار نمایشی می‌دهند. به‌طور مشخص، نمودار شکل ۱-۷ زیر یک درخت دودویی را نشان می‌دهد.



شکل ۱-۷

(i) از T هر گره تشکیل شده است که یا حروف A تا L بیجز N نمایش داده شده است.

(ii) ریشه T گره A است که در بالای نمودار است. (iii) یک خط از گره N که به طرف پائین و متمایل به چپ است میان گره قطعی چپ N است و خط دیگر از گره N که به طرف پائین و متمایل به راست است میان گره قطعی راست N است. ملاحظه می‌کند که:

(الف) B یک گره قطعی چپ و C یک گره قطعی راست گره A است.

(ب) زیر درخت چپ ریشه A متشکل از گره‌های B ، D ، E و F است و زیر درخت راست A متشکل از گره‌های C ، G ، H ، I ، J و K است.

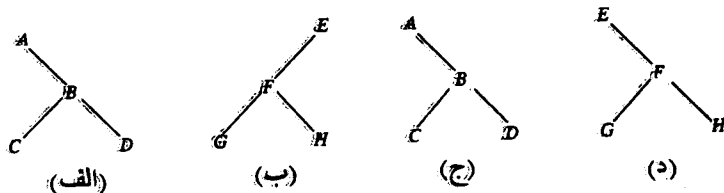
هر گره N در یک درخت دودویی T دارای ۰، ۱ یا ۲ گره قطعی است. گره‌های A ، B ، C و H دو گره قطعی دارند و گره‌های E و I تنها یک گره قطعی دارند و گره‌های D ، F ، G ، L و K هیچ گره قطعی ندارند. گره‌هایی که هیچ گره قطعی ندارند گره‌های انتهایی نام دارند.

تعریف بالا از درخت دودویی T بازگشتی است چون T بر حسب زیر درخت‌های دودویی T_1 و T_2 تعریف می‌شود. به‌ویژه، معنی آن این است که هر گره N از T ، یک زیر درخت چپ و راست دارد. علاوه بر این، اگر N یک گره انتهایی باشد آنگاه زیر درخت‌های چپ و راست آن هر دو خالی هستند.

درختهای دودویی T و T' را مشابه یا مشابه می‌گویند اگر دارای یک ساختمان یا ساختار باشند، به عبارت دیگر اگر این درختها دارای یک شکل باشند. درختها را کپی هم گویند اگر این درختها مشابه بوده و محتوای گره‌های متناظر آنها یکسان باشد.

مثال ۷-۱

چهار درخت دودویی شکل ۷-۲ را در نظر بگیرید. سه درخت (الف)، (ج) و (د) مشابه هستند. به‌ویژه، درختهای (الف) و (ج) کپی هم هستند چون دارای داده‌های مساوی و یکسان در گره‌های متناظر هستند، درخت (ب) نه مشابه درخت (د) است نه کپی آن، زیرا ما در یک درخت دودویی بین یک گره‌بندی چپ و یک گره‌بندی راست حتی وقتی تنها یک گره‌بندی وجود داشته باشد تفاوت و تمایز قائل هستیم.



شکل ۷-۲

مثال ۷-۲ عبارتهای جبری

یک عبارت جبری E نظیر عبارت زیر را که تنها حاوی عملیات دوتایی است، در نظر بگیرید:

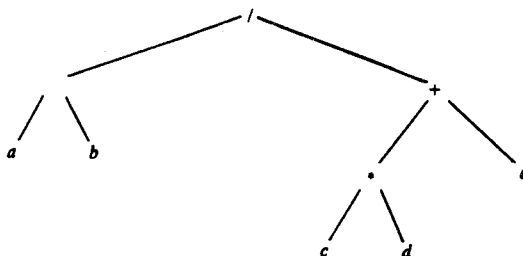
$$E = (a - b) / ((c * d) + e)$$

E را می‌توان به وسیله درخت دودویی T به صورتی که در شکل ۷-۳ آمده است نمایش داد. به عبارت دیگر هر متغیر یا ثابت در E به صورت گره "فاصلی" در T ظاهر شده است که زیر درختهای چپ و راست آن، متناظر با عملوندهای عملگر هستند. برای مثال:

(الف) در آن عبارت E ، عملوندهای $+$ عبارتند از $c * d$ و e

(ب) در درخت T ، زیردرختهای گره $+$ متناظر با زیرعبارتهای $c * d$ و e هستند.

واضح است که هر عبارت جبری متناظر با یک درخت یکتا و منحصر بفرد است و برعکس.



شکل ۳-۷. $E = (a - b) / ((c * d) + e)$.

چند اصطلاح

اصطلاحاتی که روابط خانوادگی را توصیف می‌کنند اغلب برای توصیف روابط بین گره‌ها در یک درخت T نیز بکار گرفته می‌شوند. به‌طور مشخص، فرض کنید N یک گره درخت T با گره‌بعدی چپ S_1 و گره‌بعدی راست S_2 باشد. آنگاه N را پدر S_1 می‌گویند. به‌طور مشابه S_1 بچه (پسر) چپ N و S_2 را بچه (پسر) راست N می‌گویند. علاوه بر این S_1 و S_2 را هم‌ردیف یا برادر گویند. هر گره N در یک درخت دودویی T به‌استثنای ریشه، یک پدر منحصر بفرد دارند که ریشه قبلی N می‌باشد.

اصطلاحات نسل و جذ دارای معنی متداول خودشان هستند. به عبارت دیگر گره L یک نسل گره N است و N یک جد گره L است اگر یک دنباله از بچه‌ها از N به L وجود داشته باشد. به‌ویژه، بسته به اینکه L به زیردرخت چپ تعلق داشته باشد یا زیردرخت راست. L یک نسل چپ یا راست گره N است.

اصطلاحات متداول در نظریه گراف و علم باغبانی نیز، با یک درخت دودویی T بکار می‌رود. بطور مشخص، خطی که از گره N درخت T به یک گره‌بعدی رسم می‌شود یک یال و دنباله‌ای از یالهای متوالی یک مسیر نامیده می‌شود. یک گره انتهایی یک برگ نامیده می‌شود و مسیری که به یک برگ ختم می‌شود یک شاخه نام دارد.

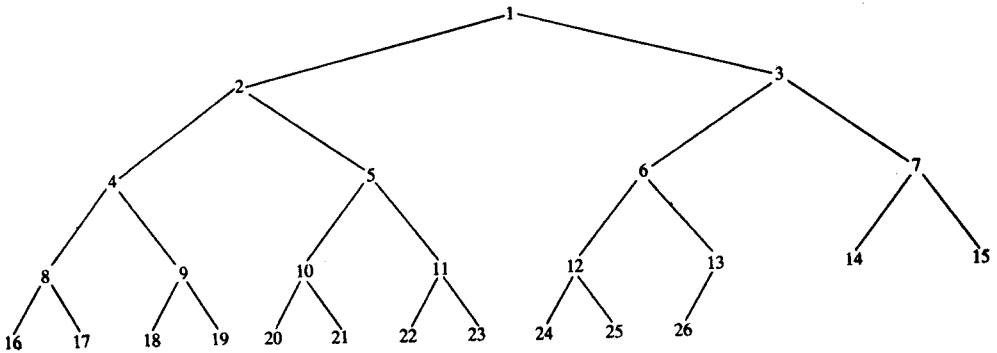
به هر گره در یک درخت دودویی T یک عدد سطح به شرح زیر نسبت داده می‌شود. به ریشه R درخت T عدد سطح 0 نسبت داده می‌شود و به هر گره دیگر عدد سطحی نسبت داده می‌شود که یک واحد بیشتر از عدد سطح پدرش است. علاوه بر این، به آن دسته از گره‌ها که عدد سطح مساوی و یکسان دارند متعلق به یک نسل گویند.

عمق یا ارتفاع درخت T حداکثر تعداد گره‌های یک شاخه T است، ثابت می‌شود که عمق یک درخت یک واحد بیشتر از بزرگترین عدد سطح درخت T است. درخت T در شکل ۱-۷ عمق 5 دارد. درختهای دودویی T و T' مشابه هستند اگر دارای ساختمان یکسان باشند به بیان دیگر شکل

مساوی داشته باشند. درختها را کپی هم می‌گویند اگر مشابه بوده و محتوای گره‌های متناظر آنها یکی باشد.

درختهای دودویی کامل

درخت دودویی دلخواه T را در نظر بگیرید. هر گره T حداکثر می‌تواند دو بچه داشته باشد. بنابراین، می‌توان نشان داد سطح r از درخت T حداکثر می‌تواند 2^r گره داشته باشد. درخت T را کامل گویند اگر تمام سطح‌های آن بجز احتمالاً آخرین سطح، حداکثر تعداد گره ممکن را داشته باشد همچنین اگر تمام گره‌های آخرین سطح تا حد ممکن در سمت چپ و در دورترین مکان آن باشد. بنابراین برای یک درخت منحصراً T_n دقیقاً n گره وجود دارد (البته، بدون در نظر گرفتن محتوای گره‌ها). درخت کامل T_{26} با ۲۶ گره در شکل ۴-۷ رسم شده است.



شکل ۴-۷ درخت کامل T_{26}

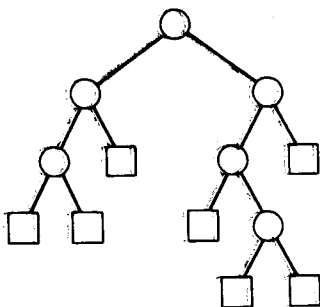
گره‌های درخت دودویی کامل T_{26} شکل ۴-۷ با هدف مشخص، با اعداد صحیح ۱، ۲، ۳، ...، ۲۶ از چپ به راست، نسل به نسل شماره‌گذاری شده است. با این نحوه شماره‌گذاری، می‌توان به سادگی، بچه‌ها و پدر هر گره K را در یک درخت کامل T_n بدست آورد. بطور مشخص بچه‌های چپ و راست گره K به ترتیب $2 * K + 1$ و $2 * K + 2$ هستند و پدر آن گره $\lfloor k/2 \rfloor$ است. برای مثال بچه گره ۹ گره‌های ۱۸ و ۱۹ هستند و پدرشان گره ۴ $\lfloor 9/2 \rfloor$ است. عمق درخت کامل T_n با n گره از رابطه

$$D_n = \lfloor \log_2 n + 1 \rfloor$$

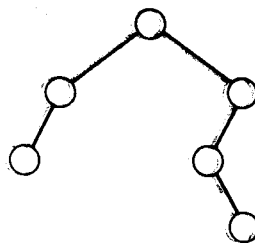
بدست می‌آید. عدد بالا، عدد نسبتاً کوچکی است، برای مثال، اگر درخت کامل T_n دارای $n = 1000\ 000$ گره باشد، آنگاه عمق آن $D_n = 21$ است.

درختهای دودویی گسترش یافته: ۲- درخت

یک درخت دودویی T را یک ۲-درخت یا یک درخت دودویی گسترش یافته گویند اگر هر گره N ، ۰ یا ۲ بچه داشته باشد. در چنین حالتی، گره‌هایی که دو بچه دارند گره‌های داخلی و گره‌هایی که ۰ بچه دارند گره‌های خارجی نامیده می‌شوند. گاهی اوقات گره‌ها را در نمودار به صورت زیر از هم تمیز می‌دهند: برای نمایش گره‌های داخلی از دایره و برای نمایش گره‌های خارجی از مربع استفاده می‌کنند. اصطلاح "درخت دودویی کامل" از عمل زیرمشتاق گرفته است. یک درخت دودویی دلخواه T نظیر درخت شکل ۵۷ (الف) را در نظر بگیرید. آنگاه T را می‌توان با جانشین‌سازی هر زیردرخت خالی توسط یک گره جدید، مانند نمودار شکل ۵۷ (ب)، به یک ۲-درخت تبدیل کرد. ملاحظه می‌کنید که درخت جدید، واقعاً یک ۲-درخت است. علاوه بر این، گره‌های درخت اصلی T اکنون گره‌های داخلی در درخت گسترش یافته هستند و گره‌های جدید گره‌های خارجی در درخت گسترش یافته هستند.



(ب) ۲-درخت گسترش یافته



(الف) درخت دودویی T

شکل ۵۷ تبدیل یک درخت دودویی T به یک ۲-درخت

یک مثال مهم و قابل توجه از یک ۲-درخت، درخت T متناظر با یک عبارت جبری دلخواه E است که تنها از عملیات دوتایی استفاده می‌کند. همانگونه که در شکل ۵۸-۷ نشان داده شده است، متغیرهایی که داخل E هستند به صورت گره‌های خارجی در شکل ظاهر می‌شوند و عملیات داخل E به صورت گره‌های خارجی ظاهر خواهند شد.

۳-۷ نمایش درختهای دودویی در حافظه

فرض کنید T یک درخت دودویی باشد. این بخش دو روش نمایش T را در حافظه مورد بحث و بررسی قرار می‌دهد. روش اول و معموله نمایش پیوندی درخت T است و مشابه روش لیست‌های

پیوندی است که در حافظه تمایش داده می شود. روش دوم که تنها از یک آرایه استفاده می کند نمایش ترتیبی Sequential درخت T است. اصلی ترین موضوع در هر نمایش درخت T، آن است که به ریشه R درخت T دسترسی مستقیم داشته باشیم و با معلوم بودن هر گره N از T، باید بتوان به هر بچه N دسترسی پیدا کرد.

تمایش پیوندی درختهای دودویی

درخت دودویی T را در نظر بگیرید. درخت T در حافظه بوسیله یک تمایش پیوندی نگهداری می شود که از سه آرایه موازی LEFT، INFO و RIGHT و یک متغیر اشاره گر به شرح زیر استفاده می کند، مگر آن که خلاف آن به صورت صریح یا ضمنی بیان شود.

قبل از هر چیز، متذکر می شویم که هر گره N متناظر با یک مکان K است به گونه ای که:

(۱) $INFO[K]$ حاوی داده گره N است.

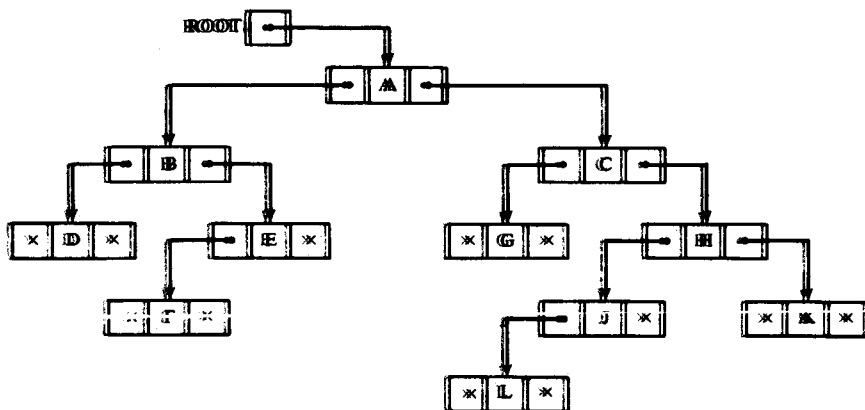
(۲) $LEFT[K]$ حاوی مکان بچه چپ گره N است.

(۳) $RIGHT[K]$ حاوی مکان بچه راست گره N است.

علاوه بر این، ROOT حاوی مکان ریشه R درخت T است. اگر هر زیردرخت - باشد، آنگاه

اشاره گر متناظر آن دارای مقدار پوچ NULL خواهد بود. اگر خود درخت T خالی :

دارای مقدار پوچ NULL خواهد بود.



	INFO	LEFT	RIGHT
1	K	0	0
2	C	3	6
3	G	0	0
4		14	
5	A	10	2
6	H	17	1
7	L	0	0
8		9	
9		4	
10	B	18	13
11		19	
12	F	0	0
13	E	12	0
14		15	
15		16	
16		11	
17	J	7	0
18	D	0	0
19		20	
20		0	

ROOT

5

AVAIL

8

شکل ۷-۷

تذکر ۱: اکثر مثالهای ما یک عنصر اطلاعاتی را در هر گره N از یک درخت دودویی T نشان خواهند داد. در کاربردهای عملی، ممکن است در گره N یک رکورد ذخیره شود. به بیان دیگر، INFO واقعاً ممکن است یک آرایه خطی از رکوردها یا مجموعه‌ای از آرایه‌های موازی باشد.

تذکر ۲: چون ممکن است گره‌ها به درختهای دودویی اضافه شوند یا از درختهای دودویی حذف شوند ما صراحتاً فرض می‌کنیم که مکانهای خالی در آرایه‌های INFO، LEFT و RIGHT تشکیل یک لیست پیوندی با اشاره گر AVAIL را می‌دهند که در رابطه با لیستهای پیوندی در فصل ۵ مورد بحث و بررسی قرار گرفت. معمولاً فرض می‌کنند آرایه LEFT دارای اشاره گرهایی برای لیست AVAIL است.

تذکر ۳: هر آدرس غیرمجازی که ممکن است برای اشاره گر پوچ NULL انتخاب شود با NULL نمایش داده می شود. در کاربردهای عملی، برای NULL از 0 یا یک عدد منفی استفاده می شود.

مثال ۷-۳

درخت دودویی T شکل ۷-۱ را در نظر بگیرید. نمودار نمایش پیوندی T در شکل ۷-۶ نشان داده شده است. ملاحظه می کنید که هر گره با سه فیلد آن و زیردرختهای خالی با استفاده از X برای ورودی های پوچ به تصویر درآمده است. شکل ۷-۷ چگونگی نمایش این لیست پیوندی را در حافظه نشان می دهد. انتخاب 20 عنصر برای آرایه ها، دلخواه و اختیاری است. ملاحظه می کنید که لیست AVAIL با استفاده از آرایه LEFT به صورت لیست یکطرفه نگهداری می شود.

مثال ۷-۴

فرض کنید فایل پرسنلی یک شرکت کوچک با 9 کارمند از فیلدهای زیر تشکیل شده است:

Name, Social Security Number, Sex, Monthly Salary

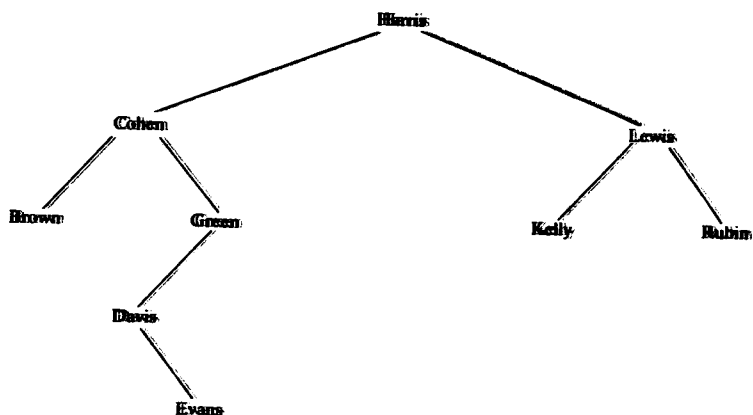
شکل ۷-۸ چگونگی نگهداری فایل را در حافظه به صورت یک درخت دودویی نشان می دهد. این ساختمان داده را با شکل ۵-۱۲ مقایسه کنید که در آن دقیقاً همین داده ها به صورت یک لیست یکطرفه سازماندهی شده است.

	NAME	SSN	SEX	SALARY	LEFT	RIGHT
1					0	
2	Davis	192-38-7282	Female	22 800	0	12
3	Kelly	165-64-3351	Male	19 000	0	0
4	Green	175-56-2251	Male	27 200	2	0
5					1	
6	Brown	178-52-1065	Female	14 700	0	0
7	Lewis	181-58-9939	Female	16 400	3	10
8					11	
9	Cohen	177-44-4557	Male	19 000	6	4
10	Rubin	135-46-6262	Female	15 500	0	0
11					13	
12	Evans	168-56-8113	Male	34 200	0	0
13					5	
14	Harris	208-56-1654	Female	22 800	9	7

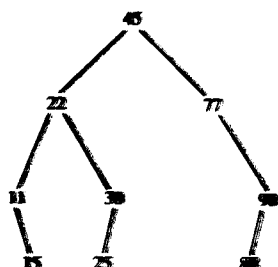
Diagram illustrating the linked list structure for the employee data:

- ROOT points to node 14.
- AVAIL points to node 8.
- Node 14 points to node 8.
- Node 8 points to node 14.

شکل ۷-۸



شکل ۷-۹



(ب)

TABLE

1	45
2	22
3	77
4	11
5	30
6	
7	90
8	
9	15
10	25
11	
12	
13	
14	88
15	
16	
...	
20	

(الف)

شکل ۷-۱۰

فرض کنید بخواهیم نمودار یک درخت را رسم کنیم که متناظر با درخت دودویی شکل ۸-۷ است. جهت سهولت در نمادگذاری، گره‌های نمودار درخت را تنها یا مقادیر کلیدی **NAME** شماره‌گذاری می‌کنیم. درخت را به شرح زیر می‌سازیم:

(الف) مقدار $ROOT = 14$ بیانگر آن است که **Harris** ریشه درخت است.

(ب) $LEFT[14] = 9$ بیانگر آن است که **Cohen** بچه راست **Harris** و $RIGHT[14] = 7$ بیانگر آن است که **Lewis** بچه راست **Harris** است.

برای هر گره جدید داخل نمودار، با تکرار مرحله (ب) شکل ۹-۷ بدست می‌آید.

نمایش ترتیبی درختهای دودویی

فرض کنید **T** یک درخت دودویی باشد که کامل یا تقریباً کامل است. آنگاه روش کارایی برای نگهداری **T** در حافظه وجود دارد که نمایش ترتیبی **T** نام دارد. این نمایش تنها از یک آرایه خطی **TREE** به صورت زیر استفاده می‌کند.

(الف) ریشه **R** درخت **T** در $TREE[1]$ ذخیره می‌شود.

(ب) اگر گره **N**، $TREE[K]$ را اشغال کند آنگاه بچه چپ آن در $TREE[2 * K]$ و بچه راست آن در $TREE[2 * K + 1]$ ذخیره می‌شود. مجدداً در **NULL** برای بیان یک زیردرخت خالی مورد استفاده قرار می‌گیرد. به‌ویژه $TREE[1] = NULL$ بیانگر آن است که درخت خالی است.

نمایش ترتیبی درخت دودویی **T** در شکل ۲۰-۷ (الف) در شکل ۱۰-۷ (ب) نشان داده شده است. ملاحظه می‌کنید که حتی اگر **T** تنها ۹ گره داشته باشد در آرایه **TREE** به ۱۴ خانه احتیاج است. در واقع، اگر دودویی یوج برای گره‌بندی گره‌های انتهایی اختیار شود آنگاه واقعاً برای گره **یعلی** $TREE[29]$ به $TREE[14]$ احتیاج خواهیم داشت. به بیان کلی‌تر، نمایش ترتیبی یک درخت به عمق **h**، نیازمند آرایه‌ای با تقریباً 2^{h+1} عنصر خواهد بود. برطبق آن، این نمایش ترتیبی معمولاً از کارایی لازم برخوردار نیست همانگونه که در بالا بیان شده است. درخت دودویی **T** کامل یا تقریباً کامل است، برای مثال، درخت **T** در شکل ۱-۷ دارای ۱۱ گره و عمق ۵ است. معنی آن، این است که نیازمند یک آرایه با تقریباً $2^6 = 64$ عنصر است.

۷-۴ پیمایش درختهای دودویی

سه روش استاندارد برای پیمایش یک درخت دودویی **T** با ریشه **R** وجود دارد. این سه الگوریتم که

PreOrder، **InOrder** و **PostOrder** نامیده می‌شوند به شرح زیر می‌باشند:

روش **PreOrder**:

(۱) ریشه R را پردازش کنید.

(۲) زیردرخت چپ R را به روش **PreOrder** پیمایش کنید.

(۳) زیردرخت راست R را به روش **PreOrder** پیمایش کنید.

روش Inorder :

(۱) زیردرخت چپ را به روش **InOrder** پیمایش کنید.

(۲) ریشه R را پردازش کنید.

(۳) زیردرخت راست را به روش **InOrder** پیمایش کنید.

روش PostOrder :

(۱) زیردرخت چپ R را به روش **PostOrder** پیمایش کنید.

(۲) زیردرخت راست R را به روش **PostOrder** پیمایش کنید.

(۳) ریشه R را پردازش کنید.

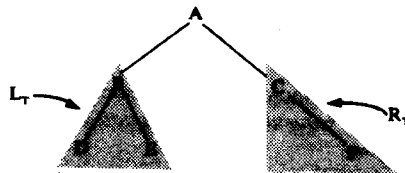
ملاحظه می‌کنید هر الگوریتم دارای همین سه مرحله است و زیردرخت چپ R همیشه قبل از زیردرخت راست پیمایش می‌شود. تفاوت بین این سه الگوریتم، در زمانی است که در آن ریشه R پردازش می‌شود. بطور مشخص، در الگوریتم دارای "Pre"، ریشه R قبل از پیمایش زیردرخت‌ها پردازش می‌شود. در الگوریتم دارای "In"، ریشه R مابین پیمایش زیردرخت‌ها پردازش می‌شود و در الگوریتم دارای "Post" ریشه R بعد از پیمایش زیردرخت‌ها پردازش می‌شود.

گاهی اوقات این سه الگوریتم را به ترتیب پیمایش گره - چپ - راست (**NLR**) پیمایش چپ - گره - راست (**LNR**) و پیمایش چپ - راست - گره (**LRN**) می‌گویند.

ملاحظه می‌کنید که هر یک از الگوریتم‌های پیمایش بالا به صورت بازگشتی تعریف می‌شود چون الگوریتم‌ها حاوی پیمایش زیردرخت‌ها با ترتیب داده شده **Given Order** است. بنابراین، انتظار داریم که هنگام پیاده‌سازی الگوریتم‌ها در کامپیوتر از یک پشته استفاده شود.

مثال ۵-۷

درخت دودویی شکل ۷-۱۱ را در نظر بگیرید.



شکل ۷-۱۱

ملاحظه می‌کنید که A ریشه این درخت است و زیردرخت چپ آن L_T از گره‌های B، D و E و زیردرخت راست آن R_T از گره‌های C و F تشکیل شده است.

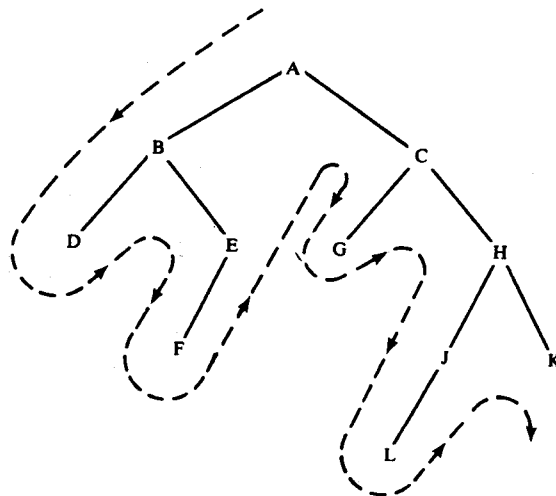
(الف) پیمایش PreOrder درخت T، A را پردازش می‌کند، L_T را پیمایش می‌کند و R_T را پیمایش می‌کند. با وجود این، پیمایش PreOrder زیردرخت L_T ریشه B را پردازش می‌کند و آنگاه D و E را پردازش می‌کند و پیمایش PreOrder زیردرخت R_T ریشه C را پردازش می‌کند و آنگاه F را پردازش می‌کند. از این رو ABDECF پیمایش PreOrder درخت T است.

(ب) پیمایش InOrder درخت T زیردرخت L_T را پردازش می‌کند، A را پردازش می‌کند و R_T را پیمایش می‌کند. با وجود این، پیمایش InOrder از زیردرخت L_T ، D، E و آنگاه E را پردازش می‌کنند و پیمایش InOrder زیردرخت R_T ، C و آنگاه F را پردازش می‌کند. از این رو DBEACF پیمایش InOrder درخت T است.

(ج) پیمایش PostOrder درخت T، زیردرخت L_T را پیمایش می‌کند، R_T را پیمایش می‌کند و A را پردازش می‌کند. پیمایش PostOrder زیردرخت L_T ، D، E و آنگاه B را پردازش می‌کند و پیمایش PostOrder زیردرخت R_T ، F و آنگاه C را پردازش می‌کند. بنابراین، DEBFCA پیمایش PostOrder درخت T است.

مثال ۶-۷

درخت دودویی شکل ۷-۱۲ را در نظر بگیرید.



شکل ۷-۱۲

پیمایش **PreOrder** درخت **T**، **ABDEFCGHJLK** است. این ترتیب، همان ترتیبی است که با جستجو و خواندن درخت از چپ، به صورتی که به وسیلهٔ مسیر شکل ۱۲-۷ مشخص شده است به دست می‌آید یعنی عمل پیمایش را به طرف پائین در سمت چپ‌ترین شاخه انجام می‌دهیم تا گرهٔ انتهایی را ملاقات کنیم، آنگاه به عقب برمی‌گردیم تا به شاخهٔ بعدی برسیم و الی آخر. در پیمایش **PreOrder** سمت راست‌ترین گرهٔ انتهایی، گرهٔ **K**، آخرین گره‌ای است که خوانده می‌شود. ملاحظه می‌کنید که زیردرخت چپ ریشهٔ **A** قبل از زیردرخت راست پیمایش می‌شود و هر دو بعد از **A** پیمایش می‌شوند. این مطلب برای هر گرهٔ دیگر زیردرختها برقرار است که خاصیت عمدهٔ یک پیمایش **PreOrder** است.

خواننده با بررسی می‌تواند تحقیق کند که دو روش دیگر پیمایش درخت دودویی شکل ۱۲-۷ به صورت زیر هستند:

(Inorder) D B F E A G C L J H K
(Postorder) D F E B G L J K H C A

ملاحظه می‌کنید که گره‌های انتهایی **D**، **F**، **G**، **L** و **K** با همان ترتیب، در تمام سه پیمایش از چپ به راست پیمایش می‌شوند. تأکید می‌کنیم که این مطلب برای هر درخت دودویی **T** برقرار است.

مثال ۷-۷

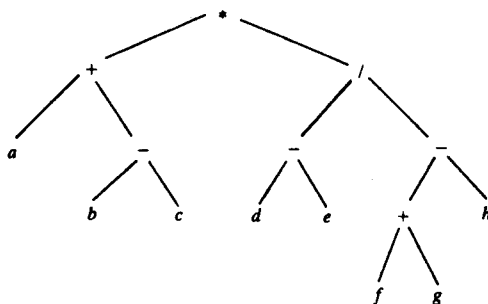
فرض کنید **E** نمایش عبارت جبری زیر باشد:

$$[a + (b - c)] * [(d - e)/(f + g - h)]$$

درخت دودویی **T** مربوط به آن در شکل ۱۳-۷ نشان داده شده است. دانشجو با بررسی می‌تواند تحقیق کند که پیمایش **PreOrder** و **PostOrder** درخت **T** به شرح زیر است:

(Preorder) * + a - b c / - d e - + f g h
(Postorder) a b c - + d e - f g + h - / *

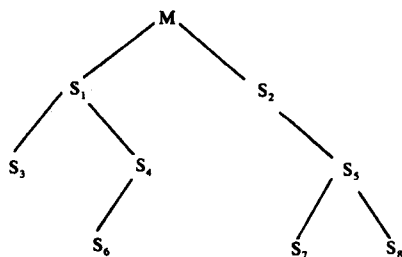
علاوه بر این دانشجو می‌تواند تحقیق کند که این ترتیبها دقیقاً متناظر با نماد پیشوندی و نماد لهستانی پسوندی **E** است که در بخش ۴-۶ مورد بحث و بررسی قرار گرفت. تأکید می‌کنیم که برای هر عبارت جبری **E** این ترتیب برقرار است.



شکل ۷-۱۳

مثال ۷-۸

درخت دودویی T شکل ۷-۱۴ را در نظر بگیرید:



شکل ۷-۱۴

دانشجو می تواند تحقیق کند که نمایش PostOrder درخت T به شرح زیر است:

$S_3, S_6, S_4, S_1, S_7, S_8, S_5, S_2, M$

یک خاصیت اصلی این الگوریتم پیمایش، آن است که هر نسل از هر گره N قبل از گره N پردازش می شود. برای مثال، S_6 قبل از S_4 و S_6 قبل از S_1 پردازش می شود. بطور مشابه S_7 و S_8 قبل از S_5 و S_7 و S_8 قبل از S_2 پردازش می شوند. علاوه بر این، تمام گره های S_1, S_2, S_8, \dots قبل از ریشه M پردازش می شوند.

توجه کنید: اگر درختی مانند دو مثال بالا تعداد نسبتاً کمی گره داشته باشد، دانشجو می تواند با بررسی سه پیمایش مختلف درخت دودویی T را پیاده سازی کند. هرگاه درخت T صدها یا هزارها گره داشته باشد پیاده سازی با بررسی، ممکن است امکان پذیر نباشد، به بیان دیگر، نیازمند روش منظم و اصولی

برای پیمایش‌هایی هستیم که به صورت بازگشتی تعریف می‌شوند. پشته یک ساختمان طبیعی برای پیاده‌سازی به این صورت می‌باشد. بحث و بررسی الگوریتم‌های پشته‌ای برای این منظور، در بخش بعد گنجانده شده است.

۷-۵ الگوریتم‌های پیمایش به کمک پشته‌ها

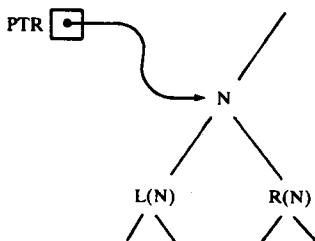
فرض کنید درخت دودویی T به وسیله نمایش پیوندی در حافظه نگهداری می‌شود:

TREE(INFO, LEFT, RIGHT, ROOT)

این بخش پیاده‌سازی سه پیمایش استاندارد T را توضیح می‌دهد که در بخش گذشته به وسیله زیربرنامه‌های غیربازگشتی و با استفاده از پشته‌ها به صورت بازگشتی تعریف شده بود. سه پیمایش را به صورت مستقل مورد بحث و بررسی قرار می‌دهیم.

پیمایش PreOrder

الگوریتم پیمایش PreOrder از یک متغیر (اشاره‌گر) PTR استفاده می‌کند که حاوی مکان گره N ای است که درحال حاضر جستجو و خوانده شد. این وضعیت در شکل ۷-۱۵ به تصویر درآمده است که در آن $L(N)$ بچه چپ گره N و $R(N)$ بچه راست گره N را نشان می‌دهد. الگوریتم از آرایه STACK نیز استفاده می‌کند، که آدرس گره‌ها را برای پردازش بعدی نگه می‌دارد.



شکل ۷-۱۵

الگوریتم: در آغاز کار NULL را به داخل STACK، push کنید و بدنبال آن قرار دهید $PTR := ROOT$.
 آنگاه مراحل زیر را تکرار کنید تا وقتی که $PTR = NULL$ یا معادل آن $PTR \neq NULL$ است.

(الف) کار پردازش را در سمت چپ‌ترین میسر از ریشه PTR به طرف پائین انجام می‌دهیم، هر گره N در طول مسیر را پردازش کرده و بچه راست $R(N)$ را در صورت وجود، به داخل STACK، Push می‌کنیم. پس از آن که برای یک گره N هیچ بچه چپ $L(N)$ پردازش نشده موجود نباشد پیمایش به پایان می‌رسد.

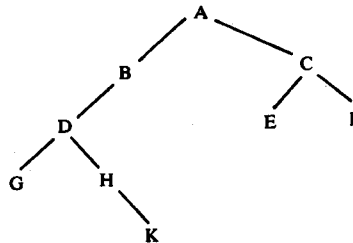
بنابراین PTR با استفاده از دستور جایگزینی $PTR := LEFT[PTR]$ تازه می‌شود و وقتی $LEFT[PTR] = NULL$ است پیمایش متوقف می‌شود.

(ب) [بازگشت به عقب BackTracking]. POP کنید و در PTR عنصر بالای پشته STACK را جایگزین کنید. اگر $PTR \neq NULL$ ، آنگاه به مرحله (الف) برگردید، در غیر اینصورت کار به پایان می‌رسد Exit. یادآور می‌شویم که عنصر اولیه NULL در پشته STACK به صورت یک نگهبان مورد استفاده قرار گرفته است.

این الگوریتم را در مثال بعد شبیه‌سازی می‌کنیم. اگرچه مثال با خود گره‌ها کار می‌کند اما در کاربردهای عملی، مکان گره‌ها در PTR جایگزین می‌شود و به داخل پشته STACK، Push می‌شود.

مثال ۷-۹

درخت دودویی T شکل ۷-۱۶ را در نظر بگیرید.



شکل ۷-۱۶

الگوریتم بالا را با درخت T شبیه‌سازی می‌کنیم، محتوای STACK را در هر مرحله نشان می‌دهیم.

۱- NULL را در آغاز به داخل STACK، Push کنید. $STACK: \emptyset$.

آنگاه قرار دهید $PTR := A$ ، که ریشه درخت T است.

۲- از سمت چپ‌ترین مسیر ریشه $PTR = A$ به طرف پائین و به شرح زیر پیش بروید.

(i) A را پردازش کنید و بچه سمت راست آن، C را به داخل پشته STACK، Push کنید. $STACK: \emptyset, C$.

(ii) B را پردازش کنید. هیچ بچه راست وجود ندارد.

(iii) D را پردازش کنید و بچه راست آن، H را به داخل پشته STACK، Push کنید.

$STACK: \emptyset, C, H$

(iv) G را پردازش کنید. هیچ بچه راست وجود ندارد.

از آنجا که G بچه چپ ندارد، هیچ گره دیگری پردازش نمی‌شود.

۳- [بازگشت به عقب BackTracking] عنصر بالا H را از پشته STACK، pop کنید و قرار دهید $H := PTR$.
در نتیجه:

STACK: \emptyset, C

چون $PTR \neq NULL$ ، به مرحله (الف) الگوریتم برگردید.

۴- از سمت چپ‌ترین مسیر ریشه $PTR = H$ به طرف پائین و به شرح زیر پیش بروید.
(v) H را پردازش کنید و بچه راست آن K، را به داخل پشته STACK، Push کنید: از آنجا که H بچه چپ ندارد. هیچ گره پردازش نشده دیگری وجود ندارد،

STACK: \emptyset, C, K

۵- [بازگشت به عقب BackTracking] K را از پشته STACK، pop کنید و قرار دهید $K := PTR$ در نتیجه:

STACK: \emptyset, C

چون $PTR \neq NULL$ ، به مرحله (الف) الگوریتم برگردید.

۶- از سمت چپ‌ترین مسیر ریشه $PTR = K$ به طرف پائین و به شرح زیر پیش بروید.
(vi) K را پردازش کنید. بچه راست وجود ندارد.

از آنجا که K بچه چپ ندارد، هیچ گره پردازش نشده دیگری وجود ندارد.

۷- [بازگشت به عقب BackTracking] K را از پشته STACK، pop کنید و قرار دهید $C := PTR$ در نتیجه:

STACK: \emptyset

چون $PTR \neq NULL$ به مرحله (الف) الگوریتم برگردید.

۸- از سمت چپ‌ترین مسیر ریشه $PTR = C$ به طرف پائین و به شرح زیر پیش بروید:
(vii) C را پردازش کنید و بچه راست آن F را به داخل پشته STACK، Push کنید:

STACK: \emptyset, F

(viii) E را پردازش کنید. بچه راست وجود ندارد.

۹- [بازگشت به عقب BackTracking] F را از پشته STACK، pop کنید و قرار دهید $F := PTR$ در نتیجه:

STACK: \emptyset

قرار دهید $PTR \neq NULL$ به مرحله (الف) الگوریتم برگردید.

۱۰- از سمت چپ‌ترین مسیر ریشه $PTR = F$ به طرف پائین و به شرح زیر پیش بروید:
(ix) F را پردازش کنید. بچه راست وجود ندارد.

از آنجا که F بچه چپ ندارد، هیچ گره پردازش نشده دیگری وجود ندارد.

۱۱- [بازگشت به عقب BackTracking]. عنصر بالا NULL را از پشته STACK، pop کنید و قرار دهید PTR := NULL چون PTR = NULL الگوریتم به پایان رسیده است.

همانگونه که از مرحله های ۲، ۴، ۶، ۸، ۱۰ نتیجه می شود. گره های پردازش شده به ترتیب A, B, D, G, H, K, C, E, F هستند. این همان پیمایش PreOrder موردنظر درخت T است. نمایش رسمی الگوریتم پیمایش preOrder به صورت زیر است:

Algorithm 7.1: PREORD(INFO, LEFT, RIGHT, ROOT)

A binary tree T is in memory. The algorithm does a preorder traversal of T, applying an operation PROCESS to each of its nodes. An array STACK is used to temporarily hold the addresses of nodes.

1. [Initially push NULL onto STACK, and initialize PTR.]
Set TOP := 1, STACK[1] := NULL and PTR := ROOT.
2. Repeat Steps 3 to 5 while PTR ≠ NULL:
3. Apply PROCESS to INFO[PTR].
4. [Right child?]
If RIGHT[PTR] ≠ NULL, then: [Push on STACK.]
Set TOP := TOP + 1, and STACK[TOP] := RIGHT[PTR].
[End of If structure.]
5. [Left child?]
If LEFT[PTR] ≠ NULL, then:
Set PTR := LEFT[PTR].
Else: [Pop from STACK.]
Set PTR := STACK[TOP] and TOP := TOP - 1.
[End of If structure.]
[End of Step 2 loop.]
6. Exit.

پیمایش InOrder

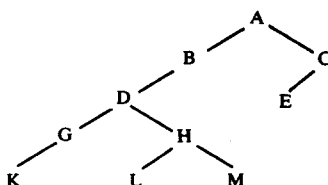
الگوریتم پیمایش InOrder نیز از متغیر اشاره گر PTR استفاده می کند که حاوی مکان گره N ای است که به تازگی جستجو و خوانده شد و نیز از یک آرایه STACK استفاده می کند که آدرس گره ها را برای پردازش بعدی نگه می دارد. درواقع، با این الگوریتم یک گره تنها وقتی پردازش می شود که از STACK، pop شود. الگوریتم: در آغاز کار NULL را به داخل STACK (به عنوان نگهدارنده) Push کنید و آنگاه قرار دهید PTR := ROOT آنگاه مراحل زیر را تکرار کنید تا وقتی که NULL از STACK، pop شود.

(الف) از سمت چپ ترین مسیر ریشه PTR به طرف پائین پیش بروید، هر گره N را به داخل STACK، push کنید و این کار را هنگامی متوقف کنید تا گره N هیچ بچه چپ جهت Push شدن در STACK نداشته باشد.

(ب) [بازگشت به عقب BackTracking]. pop کنید و گره‌های STACK را پردازش کنید. اگر NULL، pop شد آنگاه از الگوریتم خارج شوید Exit. اگر بخواهید گره N با یک بچه راست R(N) را پردازش کنید قرار دهید PTR = R(N) (با دستور جایگزینی PTR := RIGHT[PTR]) و به مرحله (الف) برگردید. تأکید می‌کنیم که گره N تنها وقتی پردازش می‌شود که از STACK، pop شده باشد.

مثال ۱۰-۷

درخت دودویی شکل ۱۷-۷ را در نظر بگیرید.



شکل ۱۷-۷

الگوریتم بالا را با T شبیه‌سازی می‌کنیم و محتوای STACK را نشان می‌دهیم.

۱- در آغاز کار NULL را به داخل STACK، Push کنید :

STACK: \emptyset

آنگاه قرار دهید PTR := A که ریشه درخت T است.

۲- از سمت چپ‌ترین مسیر ریشه PTR = A به طرف پائین پیش بروید، گره‌های A، B، D، G و K را به داخل STACK، Push کنید:

STACK: \emptyset, A, B, D, G, K

از آنجا که K بچه چپ ندارد، هیچ گره دیگری به داخل STACK، Push نمی‌شود.

۳- [بازگشت به عقب BackTracking]. گره‌های K و G، D، pop شده پردازش می‌شوند. در نتیجه :

STACK: \emptyset, A, B

چون D بچه راست ندارد، پردازش را در D متوقف می‌کنیم. آنگاه قرار دهید PTR := H که بچه راست

D است.

۴- از سمت چپ‌ترین مسیر ریشه PTR = H به طرف پائین پیش بروید و گره‌های H و L را به داخل

Push ، STACK کنید.

از آنجا که L بچهٔ چپ ندارد. هیچ گرهٔ دیگری وجود ندارد که به داخل Push ، STACK نشده باشد.

STACK: ϕ , A, B, H, L

۵- [بازگشت به عقب BackTracking]. گره‌های L و H ، pop شده و پردازش می‌شود. در نتیجه :

STACK: ϕ , A, B

از آنجا که H بچهٔ راست دارد، پردازش را در H متوقف می‌کنیم. آنگاه قرار دهید $M := PTR$ که بچهٔ راست H است.

۶- از سمت چپ‌ترین مسیر ریشهٔ $M = PTR$ به طرف پائین پیش بروید، گرهٔ M را به داخل STACK ، Push کنید.

STACK; ϕ , A, B, M

چون M بچهٔ چپ ندارد، هیچ گرهٔ دیگری به داخل Push ، STACK نمی‌شود.

۷- [بازگشت به عقب BackTracking]. گره‌های M ، B و A ، pop شده پردازش می‌شوند. در نتیجه :

STACK; ϕ

چون A بچهٔ راست دارد، هیچ عنصر دیگری از STACK ، pop نمی‌شود. قرار دهید $C := PTR$ ، که بچهٔ راست A است.

۸- از سمت چپ‌ترین مسیر ریشهٔ $C = PTR$ به طرف پائین پیش بروید، گره‌های C و E را داخل STACK ، Push کنید.

STACK: ϕ , C, E

۹- [بازگشت به عقب BackTracking]. گرهٔ E ، pop شده پردازش می‌شود. چون E هیچ بچهٔ راست ندارد، گرهٔ C ، pop شده و پردازش می‌شود. از آنجا که C بچهٔ راست ندارد، عنصر بعدی یعنی NULL ، از STACK ، pop می‌شود.

الگوریتم اکنون به پایان رسیده است، چون NULL از STACK ، pop شده است. همانگونه که از مرحله‌های ۳، ۵، ۷ و ۹ ملاحظه می‌شود گره‌ها با ترتیب A, B, M, H, L, D, G, K, E, C پردازش می‌شوند. این همان پیمایش InOrder مورد نظر درخت دودویی T است.

نمایش رسمی الگوریتم پیمایش InOrder به صورت زیر است :

Algorithm 7.2: INORD(INFO, LEFT, RIGHT, ROOT)

A binary tree is in memory. This algorithm does an inorder traversal of T, applying an operation PROCESS to each of its nodes. An array STACK is used to temporarily hold the addresses of nodes.

1. [Push NULL onto STACK and initialize PTR.]
Set TOP := 1, STACK[1] := NULL and PTR := ROOT.
2. Repeat while PTR ≠ NULL: [Pushes left-most path onto STACK.]
 - (a) Set TOP := TOP + 1 and STACK[TOP] := PTR. [Saves node.]
 - (b) Set PTR := LEFT[PTR]. [Updates PTR.]
 [End of loop.]
3. Set PTR := STACK[TOP] and TOP := TOP - 1. [Pops node from STACK.]
4. Repeat Steps 5 to 7 while PTR ≠ NULL: [Backtracking.]
5. Apply PROCESS to INFO[PTR].
6. [Right child?] If RIGHT[PTR] ≠ NULL, then:
 - (a) Set PTR := RIGHT[PTR].
 - (b) Go to Step 3.
 [End of If structure.]
7. Set PTR := STACK[TOP] and TOP := TOP - 1. [Pops node.]
- [End of Step 4 loop.]
8. Exit.

پیمایش PostOrder

الگوریتم پیمایش PostOrder اندکی پیچیده‌تر از دو الگوریتم قبلی است، زیرا در اینجا لازم است گره N را در دو وضعیت مختلف ذخیره کنیم. مابین این دو حالت از طریق Push کردن N یا N - به داخل STACK تمایز قائل می‌شویم، در کاربردهای عملی، مکان N داخل STACK، Push می‌شود، از این رو N - دارای معنی واضحی است. مجدداً از متغیر (اشاره‌گر) PTR که حاوی مکان گره N است استفاده می‌شود که اخیراً خوانده شده است، این وضعیت در شکل ۱۵-۷ نشان داده شده است.

الگوریتم: در آغاز کار NULL را به داخل STACK به عنوان نگه‌بان Push کنید و آنگاه قرار دهید PTR := ROOT بدنبال آن مراحل زیر را تکرار کنید تا NULL از STACK، pop شود.

(الف) از سمت چپ‌ترین مسیر ریشه PTR به طرف پائین پیش بروید. در هر گره N از مسیر، N را به داخل STACK، Push کنید و اگر N بچه راست R(N) دارد، R(N) - را به داخل STACK، Push کنید.

(ب) [بازگشت به عقب BackTracking] pop کنید و گره‌های مثبت داخل STACK را پردازش کنید. اگر NULL، pop شد، آنگاه از الگوریتم خارج شوید Exit. اگر یک گره منفی pop شد، یعنی اگر به‌ازای بعضی گره N، PTR = N، قرار دهید PTR = N (با جایگزینی PTR := - PTR) و به مرحله (الف) برگردید. تأکید می‌کنیم که گره N تنها وقتی پردازش می‌شود که از STACK، pop شود و مثبت باشد.

مثال ۷-۱۱

بار دیگر درخت دودویی شکل ۷-۱۷ را در نظر بگیرید. الگوریتم بالا را با T شبیه‌سازی می‌کنیم و محتوای $STACK$ را نشان می‌دهیم.

۱- در آغاز $NULL$ را به داخل $STACK$ ، $Push$ کنید و قرار دهید $A = PTR$ که ریشه T است.

$STACK: \phi$

۲- از سمت چپ‌ترین مسیر ریشه $A = PTR$ به طرف پائین پیش بروید، گره‌های A, B, D, G و K را به داخل $STACK$ ، $Push$ کنید. علاوه بر این، چون A بچه راست C دارد، C را پس از A اما قبل از B به داخل $STACK$ ، $Push$ کنید و چون D بچه راست H دارد، H را پس از D اما قبل از G به داخل $STACK$ ، $Push$ کنید. در نتیجه:

$STACK: \phi, A, -C, B, D, -H, G, K$

۳- [بازگشت به عقب BackTracking]. pop کنید و K را پردازش کنید همچنین pop کنید و G پردازش کنید. چون H منفی است، تنها $-H$ ، pop می‌شود. در نتیجه:

$STACK: \phi, A, -C, B, D$

اکنون $H = PTR$. مجدداً قرار دهید $H = PTR$ و به مرحله (الف) برگردید.
۴- از سمت چپ‌ترین مسیر ریشه $H = PTR$ به طرف پائین پیش بروید، نخست H را به داخل $STACK$ ، $Push$ کنید. چون H بچه راست M دارد، M را پس از H داخل $STACK$ ، $Push$ کنید. بالاخره، L را داخل $STACK$ ، $Push$ کنید. در نتیجه:

$STACK: \phi, A, -C, B, D, H, -M, L$

۵- [بازگشت به عقب BackTracking]. pop کنید و L را پردازش کنید، اما فقط M را pop کنید. در نتیجه:

$STACK: \phi, A, -C, B, D, H$

حال $M = PTR$. قرار دهید $M = PTR$ و به مرحله (الف) برگردید.
۶- از سمت چپ‌ترین مسیر ریشه $M = PTR$ به طرف پائین پیش بروید. اکنون، تنها M را داخل $STACK$ ، $Push$ کنید. در نتیجه:

$STACK: \phi, A, -C, B, D, H, M$

۷- [بازگشت به عقب BackTracking]. pop کنید و M, H, D و B را پردازش کنید اما فقط C را pop کنید. در نتیجه:

$STACK: \phi, A$

حال $PTR = -C$. قرار دهید $PTR = C$ و به مرحله (الف) برگردید.

۸- از سمت چپ‌ترین مسیر ریشه $PTR = C$ به طرف پائین پیش بروید. نخست C به داخل $STACK$ ، $Push$ می‌شود و آنگاه E ، در نتیجه :

$STACK: \phi, A, C, E$

۹- [بازگشت به عقب BackTracking]. pop کنید و E ، C و A را پردازش کنید. وقتی $NULL$ ، pop می‌شود، $STACK$ خالی است و الگوریتم کامل می‌شود.

همانگونه که از مراحل ۳، ۵، ۷ و ۹ ملاحظه می‌شود، گره‌ها با ترتیب $A, C, E, B, D, H, M, L, G, K$ پردازش می‌شوند. این همان پیمایش $PostOrder$ موردنظر درخت دودویی T است. نمایش رسمی الگوریتم پیمایش $Postorder$ به شرح زیر است:

Algorithm 7.3: POSTORD(INFO, LEFT, RIGHT, ROOT)

A binary tree T is in memory. This algorithm does a postorder traversal of T , applying an operation $PROCESS$ to each of its nodes. An array $STACK$ is used to temporarily hold the addresses of nodes.

1. [Push $NULL$ onto $STACK$ and initialize PTR .]
Set $TOP := 1$, $STACK[1] := NULL$ and $PTR := ROOT$.
2. [Push left-most path onto $STACK$.]
Repeat Steps 3 to 5 while $PTR \neq NULL$:
3. Set $TOP := TOP + 1$ and $STACK[TOP] := PTR$.
[Pushes PTR on $STACK$.]
4. If $RIGHT[PTR] \neq NULL$, then: [Push on $STACK$.]
Set $TOP := TOP + 1$ and $STACK[TOP] := -RIGHT[PTR]$.
[End of If structure.]
5. Set $PTR := LEFT[PTR]$. [Updates pointer PTR .]
[End of Step 2 loop.]
6. Set $PTR := STACK[TOP]$ and $TOP := TOP - 1$.
[Pops node from $STACK$.]
7. Repeat while $PTR > 0$:
(a) Apply $PROCESS$ to $INFO[PTR]$.
(b) Set $PTR := STACK[TOP]$ and $TOP := TOP - 1$.
[Pops node from $STACK$.]
[End of loop.]
8. If $PTR < 0$, then:
(a) Set $PTR := -PTR$.
(b) Go to Step 2.
[End of If structure.]
9. Exit.

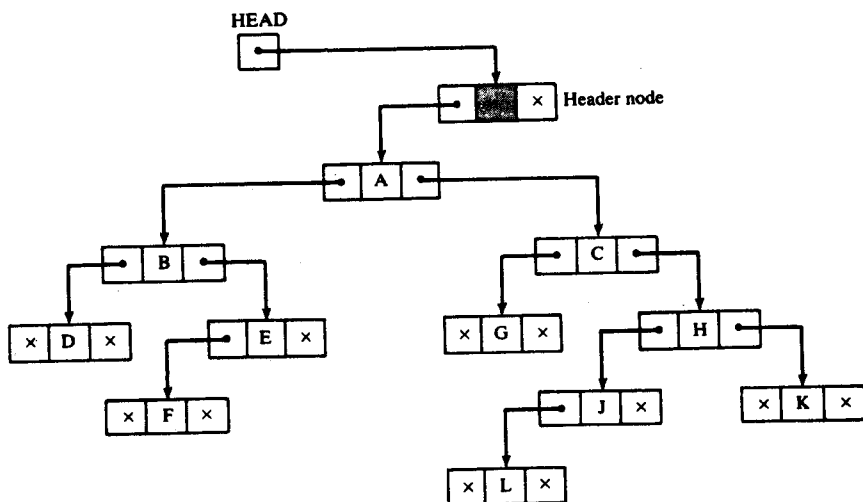
۶- ۷ سرگره‌ها، گره‌های نخ‌کشی شده

درخت دودویی T را درنظر بگیرید. اغلب انواع مختلف از نمایش پیوندی درخت T مورد استفاده

قرار می‌گیرد. زیرا برخی از عملیات اصلاح شده روی T، به منظور پیاده‌سازی ساده‌تر می‌باشند. برخی از این انواع نمایش که مشابه لیستهای دارای سرگره و لیستهای پیوندی چرخشی یا حلقوی است در این بخش مورد بحث و بررسی قرار می‌گیرد.

سرگره‌ها

درخت دودویی T را در نظر بگیرید که به وسیله یک نمایش پیوندی در حافظه نگهداری می‌شود. گاهی اوقات گره اضافی خاصی موسوم به سرگره به ابتدای T اضافه می‌شود. هنگامی که این گره اضافی مورد استفاده قرار می‌گیرد، سه متغیر اشاره‌گر که آنها را HEAD (به جای ROOT) می‌نامیم و به سرگره اشاره می‌کند همچنین اشاره‌گر چپ سرگره که به ریشه T اشاره می‌کند. شکل ۱۸-۷ تصویر درخت دودویی شکل ۱-۷ را نشان می‌دهد که از نمایش پیوندی با یک سرگره استفاده می‌کند، آن را با شکل ۶-۷ مقایسه کنید.



شکل ۱۸-۷

فرض کنید درخت دودویی T خالی است. آنگاه T همچنان حاوی یک سرگره است، اما اشاره‌گر چپ سرگره حاوی مقدار پوچ NULL است. بدین ترتیب شرط

$$\text{LEFT}[\text{HEAD}] = \text{NULL}$$

بیان می‌کند که درخت خالی است.

روش دیگر نمایش بالا برای یک درخت دودویی T، از سرگروه به عنوان نگهبان استفاده می‌کند. به بیان دیگر، اگر یک گره زیردرخت خالی داشته باشد، آنگاه فیلد اشاره‌گر زیر درخت حاوی آدرس سرگروه به عوض مقدار پوچ NULL است. برطبق آن، هیچ اشاره‌گری آدرس غیرمجاز ندارد و شرط

$$\text{LEFT[HEAD]} = \text{HEAD}$$

بیان می‌کند که زیردرخت خالی است.

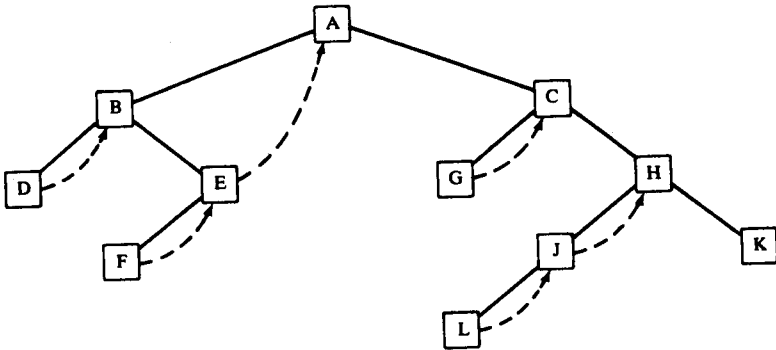
نخ‌کشی‌ها، نخ‌کشی InOrder

بار دیگر نمایش پیوندی درخت دودویی T را در نظر بگیرید. تقریباً نصف ورودیهای فیلدهای اشاره‌گر LEFT و RIGHT شامل عناصر پوچ NULL است. این فضا با قراردادن نوع دیگری از اطلاعات به جای ورودیهای پوچ می‌تواند به شکل کاراتری مورد استفاده قرار گیرد. بطور مشخص ما اشاره‌گرهای خاصی را جانشین ورودیهای پوچ می‌کنیم که به گره‌های بالاتر درخت اشاره می‌کند. این اشاره‌گرهای خاص را نخ‌کشی‌ها و درخت دودویی با این اشاره‌گرها را درختهای نخ‌کشی شده می‌گویند.

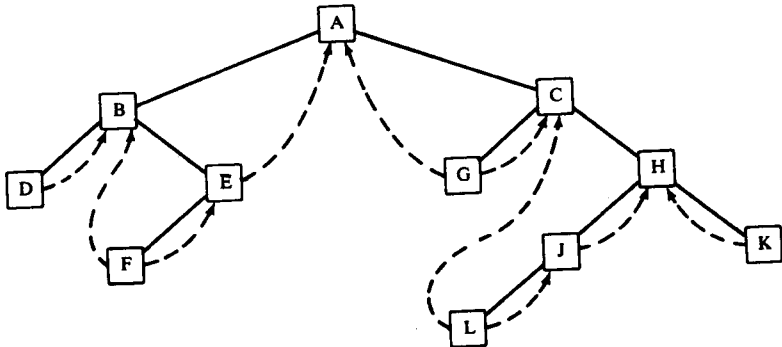
نخ‌کشی‌ها در یک درخت نخ‌کشی شده، باید به طریقی از اشاره‌گرهای معمولی تمیز داده شوند. در نمودار یک درخت نخ‌کشی شده، نخ‌کشی‌ها را معمولاً با خط‌چینها نمایش می‌دهند. در حافظه کامپیوتر یک فیلد TAG، یک بیتی اضافی را می‌توان برای تمایز نخ‌کشی از اشاره‌گرهای معمولی، مورد استفاده قرار داد. یا به بیان دیگر، نخ‌کشی‌ها را وقتی اشاره‌گرهای معمولی با اعداد صحیح مثبت نمایش داده می‌شوند می‌توان با اعداد صحیح منفی نشان داد.

برای نخ‌کشی یک درخت دودویی راههای متعدد وجود دارد اما هر نخ‌کشی متناظر با یک پیمایش خاص T است. علاوه بر این می‌توان نخ‌کشی یکطرفه یا نخ‌کشی دوطرفه را انتخاب کرد. نخ‌کشی ما متناظر با پیمایش InOrder درخت T است مگر آن که خلاف آن بیان شود. بنابراین در نخ‌کشی یکطرفه T، یک نخ‌کشی در فیلد RIGHT راست یک گره ظاهر می‌شود و به گره بعدی در پیمایش InOrder اشاره خواهد کرد و در نخ‌کشی دوطرفه T، یک نخ‌کشی نیز در فیلد LEFT یک گره ظاهر می‌شود و به گره قبلی در پیمایش InOrder اشاره خواهد کرد. علاوه بر این وقتی T سرگروه ندارد اشاره‌گر چپ گره اول و اشاره‌گر راست گره آخر (در پیمایش InOrder درخت T) حاوی مقدار پوچ NULL است، اما وقتی T یک سرگروه دارد به سرگروه اشاره می‌کند.

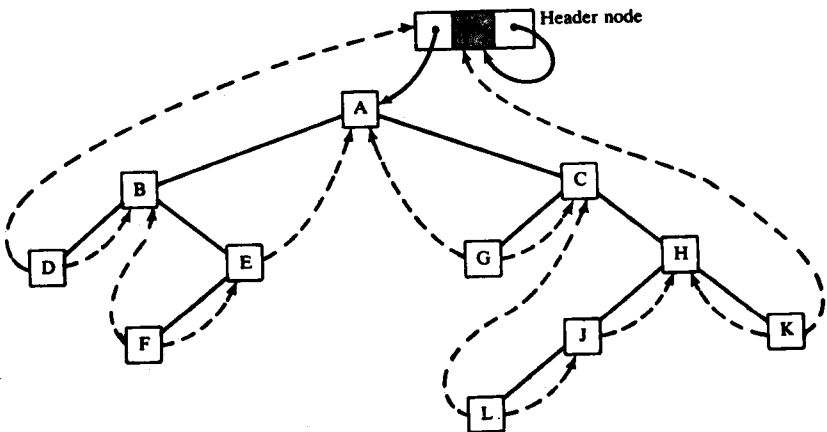
مشابه نخ‌کشی یکطرفه یک درخت دودویی T، نخ‌کشی‌ای وجود دارد که متناظر با پیمایش PreOrder درخت T است. مسأله ۱۳-۷ را ببینید. از طرف دیگر، هیچ نخ‌کشی‌ای وجود ندارد که متناظر با پیمایش PostOrder درخت T باشد.



(الف) نخ‌کشی InOrder یکطرفه



(ب) نخ‌کشی InOrder دوطرفه



(ج) نخ‌کشی دوطرفه با سرگره

مثال ۷-۱۲

درخت دودویی T شکل ۷-۱ را در نظر بگیرید.

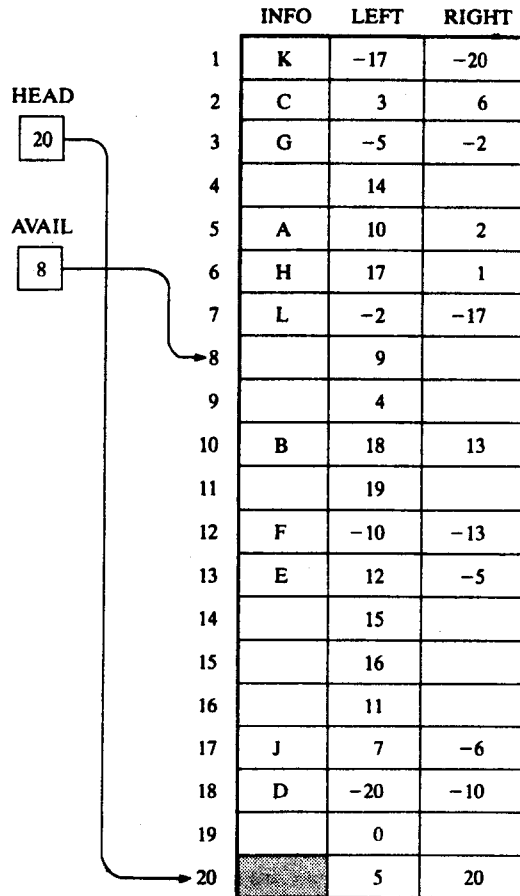
(الف) نخ‌کشی InOrder یکطرفه T در شکل ۷-۱۹ (الف) رسم شده است. از آنجا که در پیمایش InOrder درخت T، به A می‌توان پس از E دسترسی پیدا کرد، یک نخ‌کشی از گره E به گره A وجود دارد. ملاحظه می‌کنید یک نخ به استثنای گره K جانشین هر اشاره‌گر راست پوچ شده است که گره آخر در پیمایش InOrder درخت T است.

(ب) نخ‌کشی Inorder دوطرفه T در شکل ۷-۱۹ (ب) رسم شده است. از آنجا که در پیمایش InOrder درخت T، به L می‌توان پس از C دسترسی پیدا کرد، یک نخ‌کشی چپ از گره L به گره C وجود دارد. ملاحظه می‌کنید که یک نخ به استثنای گره D جانشین هر اشاره‌گر چپ پوچ شده است که نخستین گره در پیمایش InOrder درخت T است. تمام نخ‌کشی‌های راست همانند شکل ۷-۱۹ (الف) هستند.

(ج) نخ‌کشی InOrder دوطرفه درخت T وقتی T یک سرگرمه دارد در شکل ۷-۱۹ (ج) رسم شده است. در اینجا نخ‌کشی چپ D و نخ‌کشی راست K به سرگرمه اشاره می‌کنند. نخ‌کشی‌های دیگر به همان صورتی است که در شکل ۷-۱۹ (ب) ارائه شده است.

(د) شکل ۷-۷ چگونه نگهداری T را در حافظه با استفاده از یک نمایش پیوندی نشان می‌دهد. شکل ۷-۲۰ نشان می‌دهد که چگونه این نمایش باید اصلاح شود تا T با استفاده از INFO[20] به عنوان یک سرگرمه یک درخت نخ‌کشی شده InOrder دوطرفه باشد.

ملاحظه می‌کنید که $LEFT[12] = -10$ ، به بیان دیگر یک نخ‌کشی چپ از گره F به گره B وجود دارد. بطور مشابه، $RIGHT[17] = -6$ به این معنی است که یک نخ‌کشی راست از گره J به گره H وجود دارد. بالاخره ملاحظه می‌کنید که $RIGHT[20] = 20$ به عبارت دیگر یک اشاره‌گر راست معمولی از سرگرمه به خودش وجود دارد. اگر T خالی باشد، آنگاه قرار دهید $LEFT[20] = -20$ و به این معنی است که یک نخ‌کشی چپ از سرگرمه به خودش وجود دارد.



شکل ۷-۲۰

۷-۷ درختهای جستجوی دودویی

این بخش یکی از مهم‌ترین ساختمان داده علم کامپیوتر یعنی یک درخت جستجوی دودویی را مورد بحث و بررسی قرار می‌دهد. این ساختمان به ما امکان می‌دهد تا یک عنصر را جستجو کنیم و آن را با زمان اجرای میانگین $f(n) = O(\log_2 n)$ پیدا کنیم. علاوه بر این به سادگی می‌توان عنصر را در این ساختمان داده اضافه کرد یا از آن حذف کرد. این ساختمان داده در مقابل ساختمان‌های زیر قرار دارد:

(الف) آرایه مرتب‌شده خطی. در اینجا می‌توان یک عنصر را جستجو کرد و آن را با زمان اجرای میانگین

$f(n) = O(\log_2^n)$ پیدا کرد اما اضافه کردن و حذف عنصر پرهزینه است.

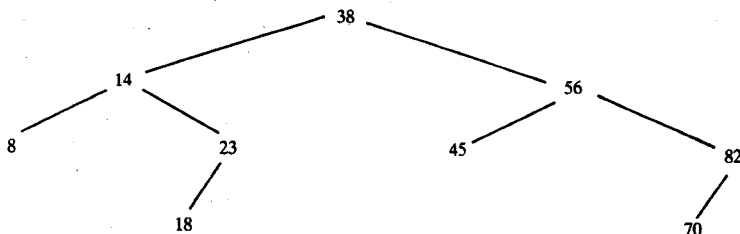
(ب) لیست پیوندی. در اینجا به سادگی می‌توان عناصر را اضافه یا حذف کرد، اما در این روش جستجوی عنصر و پیدا کردن آن پرهزینه است، چون باید از جستجوی خطی با زمان اجرای $f(n) = O(n)$ استفاده کرد.

هرچند هر گره در یک درخت جستجوی دودویی می‌تواند شامل تمام رکورد داده‌ها باشد اما تعریف درخت دودویی بستگی به فیلد داده شده دارد که مقادیر آن متمایز هستند و می‌تواند مرتب شده باشد. فرض کنید T یک درخت دودویی باشد. آنگاه T یک درخت جستجوی دودویی (یا درخت مرتب‌شده دودویی) نامیده می‌شود اگر هر گره N درخت T دارای خاصیت زیر باشد:

مقدار در N بزرگتر از هر مقدار در زیردرخت چپ N و کوچکتر از هر مقدار در زیردرخت راست N است. به آسانی ملاحظه می‌شود که این خاصیت تضمین می‌کند که پیمایش InOrder درخت T باعث می‌شود لیست عناصر T مرتب‌شده باشند.

مثال ۷-۱۳

درخت دودویی T شکل ۷-۲۱ را در نظر بگیرید.



شکل ۷-۲۱

T یک درخت جستجوی دودویی است، یعنی هر گره N در T از هر عدد زیردرخت چپ آن بزرگتر و از هر عدد زیردرخت راست آن کوچکتر است. فرض کنید عدد 35 جانشین عدد 23 شده است آنگاه T همچنان یک درخت جستجوی دودویی خواهد بود. از طرف دیگر اگر عدد 40 را جایگزین عدد 23 کنیم T یک درخت جستجوی دودویی نخواهد بود، چون در زیردرخت چپ عدد 38 بزرگتر از 40 نیست.

(ب) فایل شکل ۷-۸ را در نظر بگیرید. همانگونه که در شکل ۷-۹ گفته شد، این فایل نسبت به کلید NAME یک درخت جستجوی دودویی است. از طرف دیگر این فایل نسبت به کلید شماره تأمین اجتماعی SSN یک درخت جستجوی دودویی نیست. این وضعیت مشابه یک آرایه از رکوردها است که

نسبت به یک کلید مرتب شده اما نسبت به هیچ کلید دیگر مرتب شده نباشد. تعریف یک درخت جستجوی دودویی داده شده در این بخش بر این فرض استوار است که مقادیر تمام گره‌ها متمایز هستند. تعریف مشابه‌ای از یک درخت جستجوی دودویی وجود دارد که اجازهٔ مساوی بودن دو مقدار را به ما می‌دهد به بیان دیگر، هر گره N در آن دارای خاصیت زیر است:

مقدار در N بزرگتر از هر مقدار در زیردرخت چپ N و کوچکتر یا مساوی هر مقدار در زیردرخت راست N است. هنگام استفاده از این تعریف، عملیات بخش بعد باید براساس آن تغییر کند.

۸-۷ جستجو و واردکردن یک عنصر در درختهای جستجوی دودویی

فرض کنید T یک درخت جستجوی دودویی باشد. این بخش عملیات اصلی و پایه جستجو و واردکردن یک عنصر را در T توضیح می‌دهد. درواقع، جستجوکردن و واردکردن یک عنصر، تنها با یک الگوریتم جستجو و واردکردن انجام می‌شود. عمل حذف عنصر در بخش بعد بررسی می‌شود. پیمایش درخت T دقیقاً مانند پیمایش هر درخت دودویی است، این مبحث در بخش ۴-۷ گنجانده شده است.

فرض کنید عنصر اطلاعاتی $ITEM$ داده شده است. الگوریتم زیر مکان $ITEM$ را در درخت جستجوی دودویی پیدا می‌کند یا $ITEM$ را به عنوان یک گرهٔ جدید در مکان مربوطه‌اش در درخت اضافه می‌کند.

(الف) $ITEM$ را با N گرهٔ ریشهٔ درخت مقایسه کنید.

(i) اگر $ITEM < N$ ، به طرف بچهٔ چپ N پیش بروید.

(ii) اگر $ITEM > N$ ، به طرف بچهٔ راست N پیش بروید.

(ب) مرحلهٔ (الف) را تکرار کنید تا یکی از حالت‌های زیر اتفاق بیفتد:

(i) گرهٔ N را وقتی $ITEM = N$ است ملاقات کنید. در این حالت جستجو موفق است.

(ii) یک زیردرخت خالی را ملاقات کنید که بیان می‌کند جستجو موفق نیست و $ITEM$ را به جای زیردرخت خالی اضافه کنید.

به بیان دیگر، از ریشهٔ R در درخت T به طرف پائین پیش بروید تا $ITEM$ در T پیدا شود یا $ITEM$ را به عنوان گرهٔ انتهایی در T اضافه کنید.

مثال ۱۴-۷

(الف) درخت جستجوی دودویی T شکل ۲۱-۷ را در نظر بگیرید. فرض کنید $ITEM = 20$ داده شده است. با شبیه‌سازی الگوریتم بالا به مرحله‌های زیر می‌رسیم:

۱- $ITEM = 20$ را با ریشهٔ درخت T یعنی ۳۸ مقایسه کنید. چون $20 < 38$ به طرف بچهٔ چپ ۳۸ که ۱۴

است پیش بروید.

۲- $ITEM = 20$ را با 14 مقایسه کنید. چون $20 > 14$ به طرف بچه راست 14 که 23 است پیش بروید.

۳- $ITEM = 20$ را با 23 مقایسه کنید. چون $20 < 23$ به طرف بچه چپ 23 که 18 است پیش بروید.

۴- $ITEM = 20$ را با 18 مقایسه کنید. چون $20 > 18$ و 18 بچه راست ندارد، 20 را به عنوان بچه راست 18 اضافه کنید.

شکل ۷-۲۲ درخت جدیدی را نشان می‌دهد که عنصر $ITEM = 20$ به آن اضافه شده است.



شکل ۷-۲۲ $ITEM = 20$ اضافه شده است.

بالهای هاشورخورده و سایه‌دار، بیان می‌کنند که این مسیر هنگام اجرای الگوریتم تا پائین طی می‌شود.

(ب) درخت جستجوی دودویی T شکل ۹-۷ را در نظر بگیرید. فرض کنید $ITEM = Davis$ داده شده است. با شبیه‌سازی الگوریتم بالا، مراحل زیر حاصل می‌شود:

۱- $ITEM = Davis$ را با ریشه درخت، Harris مقایسه کنید. چون $Davis < Harris$ ، به طرف بچه چپ Harris که Cohen است پیش بروید.

۲- $ITEM = Davis$ را با Cohen مقایسه کنید. چون $Davis > Cohen$ ، به طرف بچه راست Cohen که Green است پیش بروید.

۳- $ITEM = Davis$ را با Green مقایسه کنید. چون $Davis < Green$ ، به طرف بچه چپ Green که در Davis است پیش بروید.

۴- $ITEM = Davis$ را با بچه چپ Davis مقایسه کنید. از این رو مکان Davis در درخت پیدا شده است.

مثال ۱۵-۷

فرض کنید شش عدد زیر به ترتیب در یک درخت جستجوی دودویی خالی اضافه شده است :

40, 60, 50, 33, 55, 11

شکل ۲۳-۷ شش مرحله از درخت را نشان می‌دهد. تأکید می‌کنیم که اگر شش عدد داده شده با ترتیب مختلف داده شده باشد، آنگاه درخت‌ها ممکن است با هم فرق کنند و عمق مختلف داشته باشند. نمایش رسمی الگوریتم جستجو و اضافه کردن از زیربرنامه Procedure زیر استفاده می‌کند، که مکان یک ITEM داده شده و پدر آن را پیدا می‌کند. زیربرنامه با استفاده از اشاره گر PTR و اشاره گر SAVE برای گره پدر به طرف پائین درخت را پیمایش می‌کند. این زیربرنامه در بخش بعد هنگام حذف عناصرها مورد استفاده قرار خواهد گرفت:

Procedure 7.4: FIND(INFO, LEFT, RIGHT, ROOT, ITEM, LOC, PAR)

A binary search tree T is in memory and an ITEM of information is given. This procedure finds the location LOC of ITEM in T and also the location PAR of the parent of ITEM. There are three special cases:

- (i) LOC = NULL and PAR = NULL will indicate that the tree is empty.
 - (ii) LOC \neq NULL and PAR = NULL will indicate that ITEM is the root of T.
 - (iii) LOC = NULL and PAR \neq NULL will indicate that ITEM is not in T and can be added to T as a child of the node N with location PAR.
1. [Tree empty?]

If ROOT = NULL, then: Set LOC := NULL and PAR := NULL, and Return.
 2. [ITEM at root?]

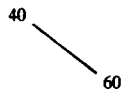
If ITEM = INFO[ROOT], then: Set LOC := ROOT and PAR := NULL, and Return.
 3. [Initialize pointers PTR and SAVE.]

If ITEM < INFO[ROOT], then:
Set PTR := LEFT[ROOT] and SAVE := ROOT.
Else:
Set PTR := RIGHT[ROOT] and SAVE := ROOT.
[End of If structure.]
 4. Repeat Steps 5 and 6 while PTR \neq NULL:
 5. [ITEM found?]

If ITEM = INFO[PTR], then: Set LOC := PTR and PAR := SAVE, and Return.
 6. If ITEM < INFO[PTR], then:
Set SAVE := PTR and PTR := LEFT[PTR].
Else:
Set SAVE := PTR and PTR := RIGHT[PTR].
[End of If structure.]
[End of Step 4 loop.]
 7. [Search unsuccessful.] Set LOC := NULL and PAR := SAVE.
 8. Exit.

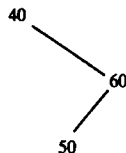
در مرحله ۶ ملاحظه می‌کنید که بسته به این که $ITEM < INFO[PTR]$ یا $ITEM > INFO[PTR]$ به طرف بچه چپ یا بچه راست حرکت می‌کنیم.

40

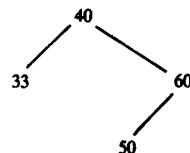


(1) ITEM = 40.

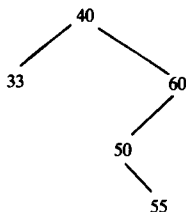
(2) ITEM = 60.



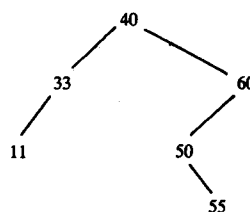
(3) ITEM = 50.



(4) ITEM = 33.



(5) ITEM = 55.



(6) ITEM = 11.

شکل ۲۳-۷

بیان رسمی الگوریتم جستجو و اضافه کردن به شرح زیر است :

Algorithm 7.5: INSBST(INFO, LEFT, RIGHT, ROOT, AVAIL, ITEM, LOC)

A binary search tree T is in memory and an ITEM of information is given. This algorithm finds the location LOC of ITEM in T or adds ITEM as a new node in T at location LOC.

1. Call FIND(INFO, LEFT, RIGHT, ROOT, ITEM, LOC, PAR).
[Procedure 7.4.]
2. If $LOC \neq \text{NULL}$, then Exit.
3. [Copy ITEM into new node in AVAIL list.]
 - (a) If $AVAIL = \text{NULL}$, then: Write: OVERFLOW, and Exit.
 - (b) Set $\text{NEW} := AVAIL$, $AVAIL := \text{LEFT}[AVAIL]$ and $\text{INFO}[\text{NEW}] := \text{ITEM}$.
 - (c) Set $\text{LOC} := \text{NEW}$, $\text{LEFT}[\text{NEW}] := \text{NULL}$ and $\text{RIGHT}[\text{NEW}] := \text{NULL}$.
4. [Add ITEM to tree.]

If $\text{PAR} = \text{NULL}$, then:
Set $\text{ROOT} := \text{NEW}$.

Else if $\text{ITEM} < \text{INFO}[\text{PAR}]$, then:
Set $\text{LEFT}[\text{PAR}] := \text{NEW}$.

Else:
Set $\text{RIGHT}[\text{PAR}] := \text{NEW}$.

[End of If structure.]
5. Exit.

در مرحله 4 ملاحظه می‌کنید که سه حالت ممکن وجود دارد: (۱) درخت خالی باشد (۲) ITEM به عنوان یک بچه چپ اضافه شود و (۳) ITEM به عنوان یک بچه راست اضافه شود.

پیچیدگی الگوریتم جستجوی عنصر

فرض کنید در یک درخت جستجوی دودویی T می‌خواهیم یک عنصر اطلاعاتی را جستجو کنیم. ملاحظه می‌کنید که تعداد مقایسه‌ها محدود به عمق درخت می‌شود. این موضوع از این واقعیت ناشی می‌شود که ما از یک مسیر درخت به طرف پائین پیش می‌رویم. بنابراین، زمان اجرای جستجو متناسب با عمق درخت است.

فرض کنید n عنصر اطلاعاتی A_1, A_2, \dots, A_n داده شده است و فرض کنید عناصر به ترتیب در یک درخت جستجوی دودویی T اضافه می‌شوند. یادآوری می‌کنیم که برای n عنصر تعداد $n!$ جایگشت وجود دارد (بخش ۲-۲). هر یک از چنین جایگشتی باعث به وجود آمدن درخت مربوط به خود می‌شود. می‌توان نشان داد که عمق میانگین $n!$ درخت تقریباً برابر $c \log_2 n$ است که در آن $c = 1.4$. بنابراین، زمان اجرای میانگین $f(n)$ جستجو یک عنصر در درخت دودویی T با n عنصر متناسب با $\log_2 n$ است یعنی $f(n) = O(\log_2 n)$.

کاربرد درختهای جستجوی دودویی

مجموعه‌ای از n عنصر اطلاعاتی A_1, A_2, \dots, A_n را در نظر بگیرید. فرض کنید بخواهیم تمام عناصر تکراری را که در این مجموعه وجود دارند پیدا کرده آنها را حذف کنیم. یک راه ساده برای این منظور به شرح زیر است:

الگوریتم A: عناصر را از A_1 تا A_n یعنی از چپ به راست بخوانید.

(الف) برای هر عنصر A_k, A_k را با A_1, A_2, \dots, A_{k-1} مقایسه کنید یعنی A_k را با عناصری که قبل از A_k هستند مقایسه کنید.

(ب) اگر A_k در بین A_1, A_2, \dots, A_{k-1} وجود داشت، آنگاه A_k را حذف کنید.

پس از آن که تمام عناصر خوانده شده و مورد بررسی قرار گرفت، آنگاه در این مجموعه عناصر تکراری نخواهد بود.

مثال ۱۶-۷

فرض کنید الگوریتم A بر لیست ۱۵ عددی زیر بکار گرفته شد:

14, 10, 17, 12, 10, 11, 20, 12, 18, 25, 20, 8, 22, 11, 23

ملاحظه می‌کنید که چهار عدد اول یعنی 14، 10، 17 و 12 حذف نمی‌شوند. بنابراین:

$$A_5 = A_2 \text{ حذف می‌شود چون } A_5 = 10$$

$$A_8 = A_4 \text{ حذف می‌شود چون } A_8 = 12$$

$$A_{11} = A_7 \text{ حذف می‌شود چون } A_{11} = 20$$

$$A_{14} = A_6 \text{ حذف می‌شود چون } A_{14} = 11$$

هنگامی که اجرای الگوریتم A به پایان می‌رسد، ۱۱ عدد

$$14, 10, 17, 12, 11, 20, 18, 25, 8, 22, 23$$

که همگی متمایز هستند باقی می‌ماند.

حال پیچیدگی زمانی الگوریتم A را در نظر بگیرید که به وسیله تعداد مقایسه‌ها تعیین می‌شود. قبل از همه، فرض می‌کنیم که d تعداد عناصر دوتایی تکراری در مقایسه با n تعداد عناصر اطلاعاتی بسیار کوچک است. ملاحظه می‌کنید مرحله‌ای که شامل A_k است به طور تقریبی به $K-1$ مقایسه احتیاج دارد چون A_k با عنصرهای A_1, A_2, \dots, A_{K-1} (کمتر ممکن است تا بحال حذف شده باشند) مقایسه می‌شود. بنابراین، $f(n)$ تعداد مقایسه‌ها مورد نیاز در الگوریتم A تقریباً برابر

$$0 + 1 + 2 + 3 + \dots + (n-2) + (n-1) = \frac{(n-1)n}{2} = O(n^2)$$

است. برای مثال، برای $n = 1000$ عنصر، الگوریتم A تقریباً به 500 000 مقایسه احتیاج دارد. به بیان دیگر، زمان اجرای الگوریتم A متناسب با n^2 است.

با استفاده از یک درخت جستجوی دودویی می‌توان الگوریتم دیگر نوشت که عناصر دوتایی تکراری را از یک مجموعه n عنصری A_1, A_2, \dots, A_n پیدا کند.

الگوریتم B: با استفاده از عناصر A_1, A_2, \dots, A_n یک درخت جستجوی دودویی بسازید. هنگام ساختن درخت، در صورتی که مقدار A_k قبلاً در درخت ظاهر شده باشد A_k را از لیست حذف کنید.

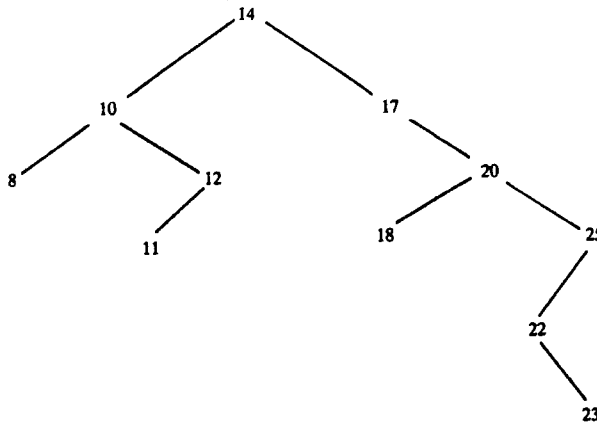
مزیت اصلی الگوریتم B آن است که هر عنصر A_k تنها با عنصرهای یک شاخه درخت مقایسه می‌شود. می‌توان نشان داد که طول میانگین چنین شاخه‌ای تقریباً برابر $c \log_2 K$ است که در آن $c = 1.4$. بنابراین $f(n)$ تعداد کل مقایسه‌های مورد نیاز در الگوریتم B تقریباً به $n \log_2 n$ مقایسه نیاز دارد. برای مثال، برای $n = 1000$ ، الگوریتم B مستلزم تقریباً 10000 مقایسه است که در الگوریتم A، تعداد مقایسه‌ها برابر 500000 است. متذکر می‌شویم که در بدترین حالت، تعداد مقایسه‌های الگوریتم B، برابر تعداد مقایسه‌های الگوریتم A است.

مثال ۱۷-۷

مجدداً لیست ۱۵ عددی زیر را در نظر بگیرید:

$$14, 10, 17, 12, 10, 11, 20, 12, 18, 25, 20, 8, 22, 11, 23$$

با اعمال الگوریتم B بر این لیست عددی، درخت شکل ۷-۲۴ به دست می آید:



شکل ۷-۲۴

تعداد دقیق مقایسه‌ها برابر است با:

$$0 + 1 + 1 + 2 + 2 + 3 + 2 + 3 + 3 + 3 + 3 + 2 + 4 + 4 + 5 = 38$$

از طرف دیگر الگوریتم A نیازمند

$$0 + 1 + 2 + 3 + 2 + 4 + 5 + 4 + 6 + 7 + 6 + 8 + 9 + 5 + 10 = 27$$

مقایسه است.

۹-۷ حذف یک عنصر از یک درخت جستجوی دودویی

فرض کنید T یک درخت جستجوی دودویی است و عنصر اطلاعاتی ITEM داده شده است. این بخش الگوریتمی را ارائه می‌دهد که عنصر ITEM را از درخت T حذف می‌کند.

الگوریتم حذف در وهله اول از زیربرنامه Procedure 7.4 استفاده می‌کند تا مکان گره N را که حاوی عنصر ITEM است و همچنین مکان گره پدر P(N) را پیدا می‌کند. روشی که با آن N از درخت حذف می‌شود در درجه اول بستگی به تعداد بچه‌های N دارد. سه حالت وجود دارد:

حالت ۱: N بچه‌ای ندارد. آنگاه تنها با جایگزین شدن مکان N در گره پدر P(N) به وسیله اشاره گر پوچ null گره N از درخت حذف می‌شود.

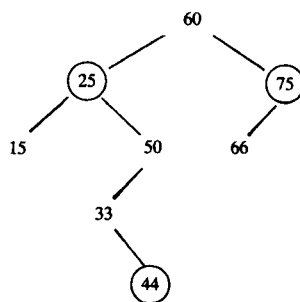
حالت ۲: N دقیقاً یک بچه دارد. آنگاه تنها با جایگزین شدن مکان N در P(N) به وسیله مکان تنها بچه N، گره N از درخت حذف می‌شود.

حالت ۳: N دو بچه دارد. فرض کنید $S(N)$ نمایش ریشه بعدی پیمایش **InOrder**، گره N باشد. دانشجو می‌تواند تحقیق کند که $S(N)$ بچه چپ ندارد. آنگاه نخست با حذف $S(N)$ از T (با استفاده از حالت ۱ یا حالت ۲) و سپس با جانشین کردن گره $S(N)$ به جای گره N در درخت T ، گره N از T حذف می‌شود. ملاحظه می‌کنید که حالت سوم پیچیده‌تر از دو حالت اول است. در تمام سه حالت بالا، فضای حافظه گره حذف شده N به لیست **AVAIL** برگردانده می‌شود.

مثال ۷-۱۸

درخت جستجوی دودویی شکل ۷-۲۵ (الف) را در نظر بگیرید. فرض کنید T به صورت شکل ۷-۲۵ (ب) در حافظه قرار می‌گیرد.

		INFO	LEFT	RIGHT
ROOT	1	33	0	9
<div>3</div>	2	25	8	10
AVAIL	3	60	2	7
<div>5</div>	4	66	0	0
	5		6	
	6		0	
	7	75	4	0
	8	15	0	0
	9	44	0	0
	10	50	1	0



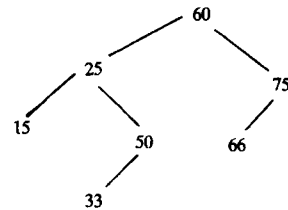
(ب) نمایش پیوندی

(الف) قبل از حذف

شکل ۷-۲۵

(الف) فرض کنید گره 44 از درخت T شکل ۷-۲۵ حذف شده است. توجه دارید که گره 44 بچه‌ای ندارد. شکل ۷-۲۶ (الف) این درخت را پس از حذف 44 نشان می‌دهد و شکل ۷-۲۶ (ب) نمایش پیوندی آن را در حافظه نشان می‌دهد.

	INFO	LEFT	RIGHT
ROOT	1	33	0
3	2	25	10
AVAIL	3	60	7
9	4	66	0
	5		6
	6		0
	7	75	4
	8	15	0
	9		
	10	50	1



(ب) نمایش پیوندی

(الف) گره 44 حذف می شود.

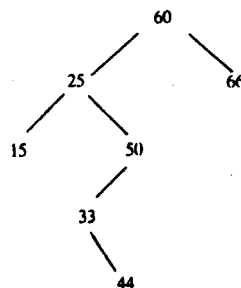
شکل ۲۶-۷

عمل حذف تنها با جایگزینی NULL در گره پدر یعنی 33 انجام شده است. مکانهای هاشورخورده بیانگر این تغییرات است.

(ب) فرض کنید به جای گره 44، گره 75 از درخت T شکل ۲۵-۷ حذف می شود. توجه دارید که گره 75 تنها یک بچه دارد. شکل ۲۷-۷ (الف) این درخت را پس از حذف گره 75 نشان می دهد و شکل ۲۷-۷ (ب) نمایش پیوندی آن را نشان می دهد. عمل حذف تنها با تغییر اشاره گر راست گره پدر 60 انجام می شود که در آغاز به 75 اشاره می کرد، درحالی که اکنون به گره 66 اشاره می کند که تنها بچه گره 75 است. مکانهای هاشورخورده بیانگر این تغییرات است.

(ج) فرض کنید به جای گره 44 یا گره 75، گره 25 از درخت T شکل ۲۵-۷ حذف می شود. توجه دارید که گره 25 دو بچه دارد. علاوه بر این ملاحظه می کنید که گره 33 ریشه بعدی پیمایش InOrder گره 25 است. شکل ۲۸-۷ (الف) این درخت را پس از حذف 25 نشان می دهد و شکل ۲۸-۷ (ب) نمایش پیوندی آن را نشان می دهد. عمل حذف نخست با حذف 33 از درخت و بدنبال آن با جانشینی گره 33 به جای گره 25 انجام می شود. تأکید می کنم که جانشینی گره 33 به جای 25، در حافظه تنها با تغییر اشاره گرها انجام می شود نه با جابجایی محتوای یک گره از یک مکان به مکان دیگر. بدین ترتیب 33 همچنان مقدار INFO[1] است.

		INFO	LEFT	RIGHT
ROOT	1	33	0	9
3	2	25	8	10
AVAIL	3	60	2	4
7	4	66	0	0
	5		6	
	6		0	
	7		9	
	8	15	0	0
	9	44	0	0
	10	50	1	0



(ب) نمایش پیوندی

(الف) گره 75 حذف می‌شود.

شکل ۷-۲۷

الگوریتم حذف ما، برحسب زیربرنامه‌های Procedure 7.6 و Procedure 7.7 به شرح زیر بیان می‌شود. اولین زیربرنامه به حالت‌های ۱ و ۲ مربوط می‌شود که در آن گره حذف‌شده N دو بچه ندارد و زیربرنامه دوم به حالت ۳ مربوط می‌شود که در آن N دو بچه دارد. حالت‌های کوچک متعددی وجود دارد که منعکس‌کننده این واقعیت است که N می‌تواند "بچه چپ" یا "بچه راست" یا ریشه باشد. همچنین در حالت ۲، N می‌تواند یک بچه چپ یا یک بچه راست داشته باشد.

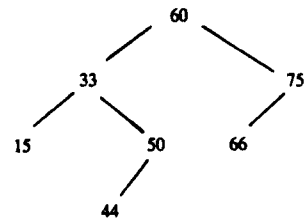
زیربرنامه Procedure 7.7 حالتی را مورد بررسی قرار می‌دهد که گره حذف‌شده N دو بچه دارد. متذکر می‌شویم که ریشه بعدی پیمایش InOrder را می‌توان با جابجایی بچه راست N بدست آورد و آنگاه به طور مکرر به طرف چپ جابجا می‌کنیم تا گره‌ای با زیردرخت چپ خالی ملاقات شود.

		INFO	LEFT	RIGHT
ROOT	1	33		10
	2			
3	3	60		7
4	4	66	0	0
5	5		6	
6	6		0	
7	7	75	4	0
8	8	15	0	0
9	9	44	0	0
10	10	50		0

ROOT

3

AVAIL



(ب) نمایش پیوندی

(الف) گره 25 حذف می شود.

شکل ۲۸-۷

Procedure 7.6: CASEA(INFO, LEFT, RIGHT, ROOT, LOC, PAR)

This procedure deletes the node N at location LOC, where N does not have two children. The pointer PAR gives the location of the parent of N, or else PAR = NULL indicates that N is the root node. The pointer CHILD gives the location of the only child of N, or else CHILD = NULL indicates N has no children.

1. [Initializes CHILD.]
 If LEFT[LOC] = NULL and RIGHT[LOC] = NULL, then:
 Set CHILD := NULL.
 Else if LEFT[LOC] ≠ NULL, then:
 Set CHILD := LEFT[LOC].
 Else
 Set CHILD := RIGHT[LOC].
 [End of If structure.]
2. If PAR ≠ NULL, then:
 If LOC = LEFT[PAR], then:
 Set LEFT[PAR] := CHILD.
 Else:
 Set RIGHT[PAR] := CHILD.
 [End of If structure.]
 Else:
 Set ROOT := CHILD.
 [End of If structure.]
3. Return.

Procedure 7.7: CASEB(INFO, LEFT, RIGHT, ROOT, LOC, PAR)

This procedure will delete the node N at location LOC, where N has two children. The pointer PAR gives the location of the parent of N, or else PAR = NULL indicates that N is the root node. The pointer SUC gives the location of the inorder successor of N, and PARSUC gives the location of the parent of the inorder successor.

1. [Find SUC and PARSUC.]
 - (a) Set PTR := RIGHT[LOC] and SAVE := LOC.
 - (b) Repeat while LEFT[PTR] ≠ NULL:
 - Set SAVE := PTR and PTR := LEFT[PTR].
 [End of loop.]
 - (c) Set SUC := PTR and PARSUC := SAVE.
2. [Delete inorder successor, using Procedure 7.6.]
Call CASEA(INFO, LEFT, RIGHT, ROOT, SUC, PARSUC).
3. [Replace node N by its inorder successor.]
 - (a) If PAR ≠ NULL, then:
 - If LOC = LEFT[PAR], then:
 - Set LEFT[PAR] := SUC.
 - Else:
 - Set RIGHT[PAR] := SUC.
 [End of If structure.]
 - Else:
 - Set ROOT := SUC.
 [End of If structure.]
 - (b) Set LEFT[SUC] := LEFT[LOC] and
RIGHT[SUC] := RIGHT[LOC].
4. Return.

اکنون می‌توانیم با استفاده از زیربرنامه‌های پایه و اصلی 7.6 و 7.7 به عنوان آجرهای ساختمانی و سنگ بنا، الگوریتم حذف را به صورت رسمی بیان کنیم:

Algorithm 7.8: DEL(INFO, LEFT, RIGHT, ROOT, AVAIL, ITEM)

A binary search tree T is in memory, and an ITEM of information is given. This algorithm deletes ITEM from the tree.

1. [Find the locations of ITEM and its parent, using Procedure 7.4.]
Call FIND(INFO, LEFT, RIGHT, ROOT, ITEM, LOC, PAR).
2. [ITEM in tree?]
If LOC = NULL, then: Write: ITEM not in tree, and Exit.
3. [Delete node containing ITEM.]
If RIGHT[LOC] ≠ NULL and LEFT[LOC] ≠ NULL, then:
 - Call CASEB(INFO, LEFT, RIGHT, ROOT, LOC, PAR).
 Else:
 - Call CASEA(INFO, LEFT, RIGHT, ROOT, LOC, PAR).
 [End of If structure.]
4. [Return deleted node to the AVAIL list.]
Set LEFT[LOC] := AVAIL and AVAIL := LOC.
5. Exit.

۱۰-۷ Heap Sort ، Heap

این بخش ساختمان درخت دیگری را مورد بحث و بررسی قرار می‌دهد که **Heap** نامیده می‌شود. **Heap** در یک الگوریتم مرتب‌کردن جالب و زیبا موسوم به **HeapSort** بکار برده می‌شود. اگرچه روشهای مرتب‌کردن به‌طور اساسی در فصل ۹ بررسی می‌شود اما در این بخش الگوریتم **HeapSort** ارائه می‌شود و پیچیدگی آن با الگوریتم مرتب‌کردن حبابی و الگوریتم **QuickSort** که به ترتیب در فصل‌های ۴ و ۶ توضیح داده شدند مقایسه می‌شود.

فرض کنید **H** یک درخت دودویی کامل با n عنصر باشد. فرض می‌کنیم که **H** در حافظه به وسیله آرایه خطی **TREE** و با استفاده از نمایش ترتیبی **H** نگهداری می‌شود نه با نمایش پیوندی، مگر آن که خلاف آن بیان شود آنگاه **H** یک **Heap** یا یک **MaxHeap** نامیده می‌شود مشروط بر این که هر گره **N** از **H** دارای خاصیت زیر باشد:

مقدار در **N** بزرگتر یا مساوی با مقدار در هر بچه **N** است. بنابراین مقدار در **N** بزرگتر یا مساوی با مقدار در هر نسل **N** است. یک **MinHeap** به صورت مشابه تعریف می‌شود: مقدار در **N** کوچکتر یا مساوی با مقدار در هر بچه **N** است.

مثال ۱۹-۷

درخت کامل **H** شکل ۷-۲۹ (الف) را در نظر بگیرید. ملاحظه می‌کنید که **H** یک **Heap** است. در حالت خاص، بزرگترین عنصر در **H** در "بالای" **Heap** یعنی در ریشه درخت است. شکل ۷-۲۹ (ب) نمایش ترتیبی **H** را به وسیله آرایه **TREE** نشان می‌دهد. به بیان دیگر، **TREE[1]** ریشه درخت **H** همچنین بچه چپ و راست گره **TREE[K]** به ترتیب **TREE[2K]** و **TREE[2K + 1]** هستند. در حالت خاص پدر هر گره غیر ریشه **TREE[J]** گره $J \div 2$ است که در آن منظور از $J \div 2$ تقسیم صحیح است. ملاحظه می‌کنید که گره‌های هم‌سطح در **H** یکی پس از دیگری در آرایه **TREE** ظاهر می‌شود.

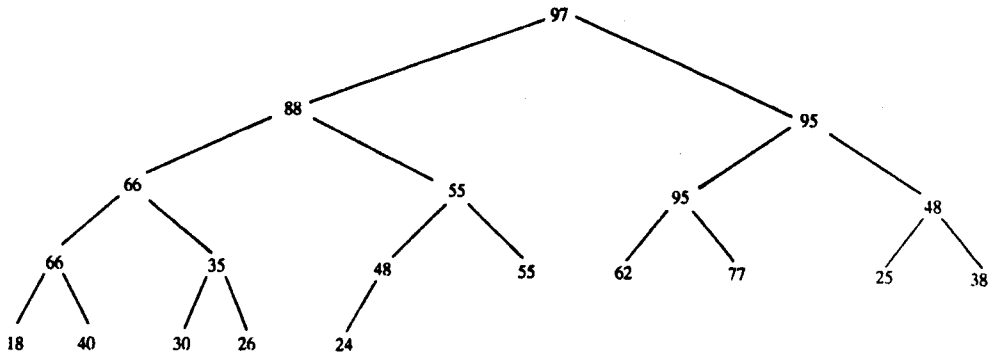
اضافه کردن یک عنصر در **Heap**

فرض کنید **H** یک **Heap** با N عنصر باشد همچنین فرض کنید یک عنصر اطلاعاتی **ITEM** داده شده است. عنصر **ITEM** را به داخل **Heap** به صورت زیر اضافه می‌کنیم:

(۱) نخست عنصر **ITEM** را به انتهای **H** طوری اضافه می‌کنیم که **H** همچنان یک درخت کامل باشد، اما الزاماً یک **Heap** نیست.

(۲) آنگاه اجازه دهید **ITEM** به جای مربوطه‌اش در **H** طوری بالا رود که **H** نهایتاً یک **Heap** باشد.

قبل از آن که زیربرنامه **Procedure** را بیان کنیم چگونگی کار این زیربرنامه را توضیح می‌دهیم.



Heap (الف)

TREE

97	88	95	66	55	95	48	66	35	48	55	62	77	25	38	18	40	30	26	24
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20

Sequential نمایش ترتیبی (ب)

شکل ۲۹-۷

مثال ۲۰-۷

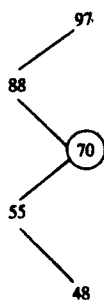
Heap H شکل ۲۹-۷ را در نظر بگیرید. فرض کنید بخواهیم $ITEM = 70$ را به **H** اضافه کنیم. نخست 70 را به عنوان عنصر بعدی در درخت کامل اضافه می‌کنیم، یعنی قرار می‌دهیم $TREE[21] = 70$ آنگاه 70 بچهٔ راست 48 $TREE[10] = 48$ است. مسیر از 70 تا ریشهٔ **H** در شکل ۳۰-۷ (الف) به تصویر درآمده است. اکنون مکان مربوط به 70 را در **Heap** به شرح زیر پیدا می‌کنیم:

(الف) 70 را با پدرش، 48 مقایسه کنید. از آنجا که 70 بزرگتر از 48 است، جای 70 و 48 را عوض کنید، مسیر اکنون به شکل ۳۰-۷ (ب) درخواهد آمد.

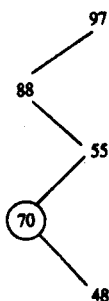
(ب) 70 را با پدر جدیدش، 55 مقایسه کنید از آنجا که 70 بزرگتر از 55 است، جای 70 و 55 را عوض کنید، مسیر اکنون به شکل ۳۰-۷ (ج) درخواهد آمد.

(ج) 70 را با پدر جدیدش، 88 مقایسه کنید. از آنجا که 70 بزرگتر از 88 نیست، $ITEM = 70$ به مکان مربوطه‌اش در **H** رسیده است.

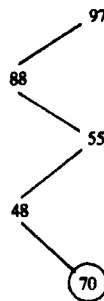
شکل ۳۰-۷ (د) درخت نهایی را نشان می‌دهد. خط‌چین بیانگر آن است که یک جابجایی صورت گرفته است.



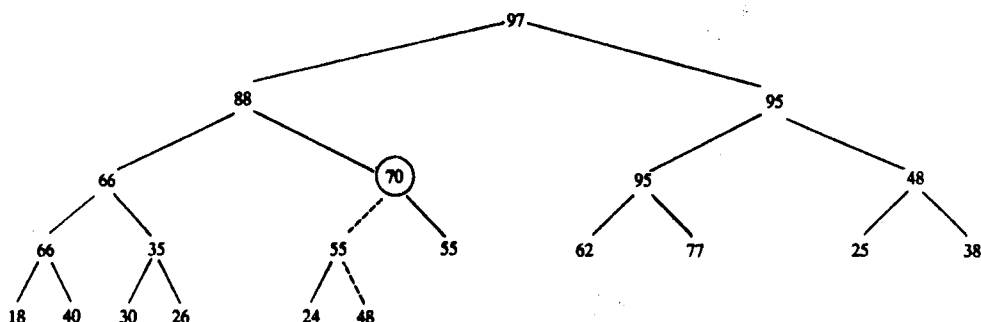
(ج)



(ب)



(الف)



(د)

شکل ۳۰-۷ ITEM اضافه می‌شود.

توجه کنید: می‌توان تحقیق کرد که زیربرنامه Procedure بالا در نهایت همیشه منتهی به یک درخت Heap می‌شود. به عبارت دیگر هیچ چیز دیگری اتفاق نمی‌افتد. این مطلب به سادگی ثابت می‌شود و ما اثبات آن را به عنوان تمرین به دانشجو واگذار می‌کنیم.

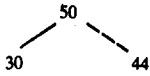
مثال ۲۱-۷

فرض کنید بخواهیم یک Heap H از لیست عددی زیر بسازیم:

44, 30, 50, 22, 60, 55, 77, 55

این کار را می‌توان با اضافه کردن هشت عدد یکی پس از دیگری در Heap H خالی با استفاده از زیربرنامه Procedure بالا اضافه کرد. شکل از ۳۱-۷ (الف) تا (ج) تصویرهای مربوطه Heap را پس از اضافه شدن هر یک از هشت عنصر نشان می‌دهد. مجدداً خط چین بیانگر آن است که در طی اضافه کردن عنصر

اطلاعاتی داده شده ITEM یک جابجایی صورت گرفته است.



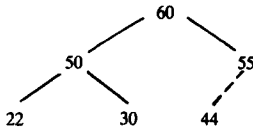
ITEM = 50 (ج)



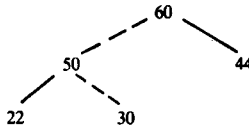
ITEM = 30 (ب)

44

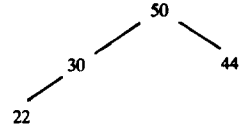
ITEM = 44 (الف)



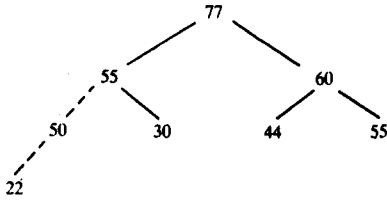
ITEM = 55 (و)



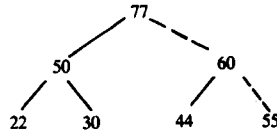
ITEM = 60 (ا)



ITEM = 22 (د)



ITEM = 55 (ح)



ITEM = 77 (ز)

شکل ۷-۳۱ ساختمان یک Heap

بیان رسمی زیر برنامه Procedure برای اضافه کردن یک عنصر اطلاعاتی به صورت زیر است :

Procedure 7.9: INSHEAP(TREE, N, ITEM)

A heap H with N elements is stored in the array TREE, and an ITEM of information is given. This procedure inserts ITEM as a new element of H. PTR gives the location of ITEM as it rises in the tree, and PAR denotes the location of the parent of ITEM.

1. [Add new node to H and initialize PTR.]
Set $N := N + 1$ and $PTR := N$.
2. [Find location to insert ITEM.]
Repeat Steps 3 to 6 while $PTR < 1$.
3. Set $PAR := \lfloor PTR/2 \rfloor$. [Location of parent node.]
4. If $ITEM \leq TREE[PAR]$, then:
Set $TREE[PTR] := ITEM$, and Return.
[End of If structure.]
5. Set $TREE[PTR] := TREE[PAR]$. [Moves node down.]
6. Set $PTR := PAR$. [Updates PTR.]
[End of Step 2 loop.]
7. [Assign ITEM as the root of H.]
Set $TREE[1] := ITEM$.
8. Return.

ملاحظه می‌کنید که تا وقتی مکان مناسبی برای ITEM پیدا نشود TREE در یک عنصر آرایه ITEM جایگزین می‌شود. مرحله 7 حالت خاصی را که ITEM تا ریشه TREE[1] بالا می‌رود در نظر می‌گیرد. فرض کنید آرایه A با N عنصر داده شده است. با استفاده مکرر از زیر برنامه 7.9 با آرایه A، یعنی با اجرای

Call INSHEAP(A, J, A[J + 1])

به ازای $J = 1, 2, \dots, N - 1$ ، می‌توانیم یک Heap H، از آرایه A بسازیم.

حذف ریشه یک Heap

فرض کنید H یک Heap با N عنصر باشد و بخواهیم ریشه R این H را حذف کنیم. این کار به صورت زیر انجام می‌شود:

(۱) ریشه R را در متغیر ITEM جایگزین کنید.

(۲) گره آخر L از H را جانشین گره حذف شده R کنید طوری که H همچنان یک درخت کامل باشد، اما الزاماً یک Heap نباشد.

(۳) (بازسازی Heap) فرض کنید L به مکان مربوطه‌اش طوری پائین رود که نهایتاً H یک Heap باشد.

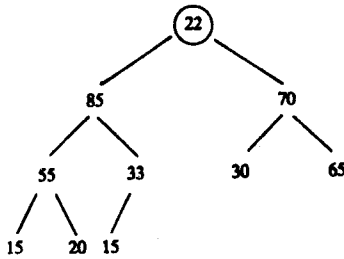
مثال ۲۲-۷

Heap H شکل ۷-۳۲ (الف) را در نظر بگیرید که در آن $R = 95$ ریشه و $L = 22$ آخرین گره درخت است. مرحله ۱ از زیر برنامه بالا، $R = 95$ را حذف می‌کند و در مرحله ۲، $L = 22$ جانشین $R = 95$ می‌شود. با این کار درخت کامل شکل ۷-۳۲ (ب) نتیجه می‌شود که Heap نیست. با وجود این ملاحظه می‌کنید که هر زیر درخت چپ و هم زیر درخت راست 22 همچنان Heap هستند. با بکارگیری مرحله 3، مکان مناسب 22 در Heap به صورت زیر پیدا می‌شود:

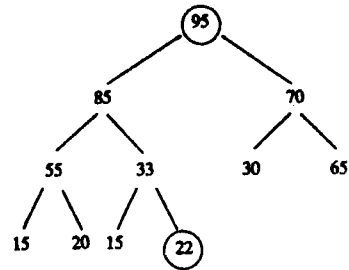
(الف) 22 را با دو بچه‌اش، 85 و 70 مقایسه کنید. چون 22 کوچکتر از بچه بزرگتر، 85 است جای 22 و 85 را عوض کنید تا درخت به صورت شکل ۷-۳۲ (ج) درآید.

(ب) 22 را با دو بچه جدیدش، 55 و 33 مقایسه کنید. چون 22 کوچکتر از بچه بزرگتر، 55 است جای 22 و 55 را عوض کنید تا درخت به شکل ۷-۳۲ (د) درآید.

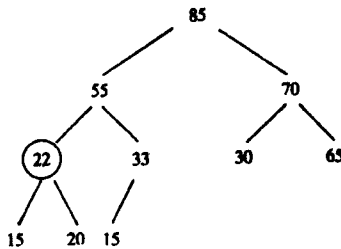
(ج) 22 را با بچه جدیدش 15 و 20 مقایسه کنید. چون 22 بزرگتر از هر دو بچه است. گره 22 به مکان مربوطه‌اش در H افتاده است.



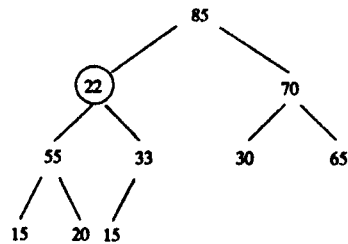
(ب)



(الف)



(د)



(ج)

شکل ۷-۳۲

بدین ترتیب، شکل ۷-۳۲ (د) Heap H خواسته شده بدون ریشه اولیه R می‌باشد. توجه کنید: همانگونه که در قسمت اضافه کردن یک عنصر در Heap بیان شد، می‌توان تحقیق کرد که زیربرنامه Procedure بالا در نهایت همیشه منتهی به یک درخت Heap می‌شود. بار دیگر اثبات آن را به دانشجو واگذار می‌کنیم. علاوه بر این متذکر می‌شویم که ممکن است تا وقتی گره L به پائین درخت نرسیده است یا تا وقتی L بچه‌ای ندارد مرحله 3 ی زیربرنامه به پایان نرسد. بیان رسمی این زیربرنامه به صورت زیر است:

Procedure 7.10: DELHEAP(TREE, N, ITEM)

A heap H with N elements is stored in the array $TREE$. This procedure assigns the root $TREE[1]$ of H to the variable $ITEM$ and then reheaps the remaining elements. The variable $LAST$ saves the value of the original last node of H . The pointers PTR , $LEFT$ and $RIGHT$ give the locations of $LAST$ and its left and right children as $LAST$ sinks in the tree.

1. Set $ITEM := TREE[1]$. [Removes root of H .]
2. Set $LAST := TREE[N]$ and $N := N - 1$. [Removes last node of H .]
3. Set $PTR := 1$, $LEFT := 2$ and $RIGHT := 3$. [Initializes pointers.]
4. Repeat Steps 5 to 7 while $RIGHT \leq N$:
5. If $LAST \geq TREE[LEFT]$ and $LAST \geq TREE[RIGHT]$, then:
Set $TREE[PTR] := LAST$ and Return.
[End of If structure.]
6. IF $TREE[RIGHT] \leq TREE[LEFT]$, then:
Set $TREE[PTR] := TREE[LEFT]$ and $PTR := LEFT$.
Else:
Set $TREE[PTR] := TREE[RIGHT]$ and $PTR := RIGHT$.
[End of If structure.]
7. Set $LEFT := 2 * PTR$ and $RIGHT := LEFT + 1$.
[End of Step 4 loop.]
8. If $LEFT = N$ and if $LAST < TREE[LEFT]$, then: Set $PTR := LEFT$.
9. Set $TREE[PTR] := LAST$.
10. Return.

تا وقتی که $LAST$ یک بچه راست دارد حلقه مرحله 4 تکرار می شود. مرحله 8 حالت خاصی را در نظر می گیرد که در آن $LAST$ یک بچه راست ندارد اما بچه چپ دارد (که باید آخرین گره H باشد). دلیل استفاده از دو دستور IF در مرحله 8 آن است که تا وقتی $LEFT > N$ ، $TREE[LEFT]$ ممکن است تعریف نشود.

کاربرد Heap در مرتب کردن اطلاعات

فرض کنید آرایه A با N عنصر داده شده است. الگوریتم HeapSort که A را مرتب می کند از دو مرحله زیر تشکیل می شود:

مرحله A: یک $Heap H$ از عناصر آرایه A بسازید.

مرحله B: عنصر ریشه H را بطور مکرر حذف کنید.

از آنجا که ریشه H همواره بزرگترین گره H است، مرحله B، عنصرهای آرایه A را به ترتیب نزولی حذف می کند. بیان رسمی این الگوریتم که از زیربرنامه های 7.9 و 7.10 استفاده می کند به شرح زیر است:

Algorithm 7.11: HEAPSORT(A, N)

An array A with N elements is given. This algorithm sorts the elements of A.

1. [Build a heap H, using Procedure 7.9.]
Repeat for J = 1 to N - 1:
 Call INSHEAP(A, J, A[J + 1]).
[End of loop.]
2. [Sort A by repeatedly deleting the root of H, using Procedure 7.10.]
Repeat while N > 1:
 (a) Call DELHEAP(A, N, ITEM).
 (b) Set A[N + 1] := ITEM.
[End of Loop.]
3. Exit.

هدف مرحله 2(b) ذخیره فضای حافظه است. به بیان دیگر، می‌توان از یک آرایه دیگر B برای نگهداری عنصرهای مرتب‌شده A استفاده کرد و به جای مرحله 2(b) چنین نوشت:

Set B[N + 1] := ITEM

بنابراین، دانشجو می‌تواند تحقیق کند که مرحله 2(b) داده شده، در الگوریتم دخالت نمی‌کند چون A[N+1] به Heap H تعلق ندارد.

پیچیدگی HeapSort

فرض کنید الگوریتم HeapSort بر آرایه A با n عنصر اعمال شده است. این الگوریتم دو مرحله دارد همچنین پیچیدگی هر مرحله بطور مستقل تجزیه و تحلیل می‌شود.

مرحله A: فرض کنید H یک Heap باشد. ملاحظه می‌کنید که تعداد مقایسه‌های موردنیاز برای پیدا کردن مکان مربوط به عنصر جدید ITEM در H نمی‌تواند بزرگتر از عمق H باشد. از آنجا که H یک درخت کامل است عمق آن به $\log_2 m$ محدود می‌شود که در آن m تعداد عناصر H است. بنابراین، تعداد کل $g(n)$ مقایسه‌ها برای اضافه کردن n عنصر A در H به عبارت زیر محدود می‌شود:

$$g(n) \leq n \log_2 n$$

در نتیجه، زمان اجرای مرحله A در Heapsort متناسب با $n \log_2 n$ است.

مرحله B: فرض کنید H یک درخت کامل با m عنصر باشد همچنین فرض کنید زیردرختهای چپ و راست H خود Heap باشند و L ریشه H باشد. ملاحظه می‌کنید Heap سازی مجدد از 4 مقایسه استفاده می‌کند تا گره L یک مرحله به طرف پائین درخت H منتقل شود. از آنجا که عمق H بزرگتر از $\log_2 m$ نیست، از این رو Heap سازی مجدد حداکثر از $4 \log_2 m$ مقایسه برای پیدا کردن مکان مناسب L در درخت H استفاده می‌کند. به این معنی که تعداد کل $h(n)$ مقایسه‌ها برای حذف n عنصر A از H که نیازمند n بار

Heap سازی مجدد است به صورت زیر محدود می شود:

$$h(n) \leq 4n \log_2 n$$

بنابراین، زمان اجرای مرحله B در Heapsort نیز متناسب با $n \log_2 n$ است.

از آنجا که هر مرحله از نظر زمانی متناسب با $n \log_2 n$ است، زمان اجرای مرتب کردن n عنصر آرایه A با استفاده از Heapsort متناسب با $n \log_2 n$ است یعنی $f(n) = O(n \log_2 n)$ ملاحظه می کنید که این رابطه پیچیدگی بدترین حالت الگوریتم HeapSort را به دست می دهد. این الگوریتم درمقابل دو الگوریتم مرتب کردن زیر قرار دارد که قبلاً مورد مطالعه قرار گرفت:

(۱) مرتب کردن حبابی (بخش ۶-۴). زمان اجرای مرتب کردن حبابی $O(n^2)$ است.

(۲) QuickSort (بخش ۵-۶)، زمان اجرای میانگین QuickSort برابر $O(n \log_2 n)$ است، که برابر زمان اجرای HeapSort است، اما زمان اجرای بدترین حالت QuickSort برابر $O(n^2)$ است که برابر زمان اجرای مرتب کردن حبابی است.

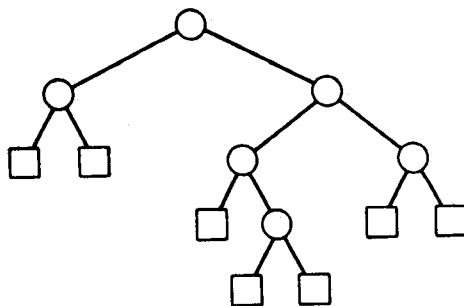
دیگر الگوریتمهای مرتب کردن در فصل ۹ مورد مطالعه قرار می گیرد.

۱۱-۷ طول مسیر، الگوریتم هافمن

یادآوری می کنیم که یک درخت دودویی گسترش یافته یا ۲-درخت، یک درخت دودویی T است که در آن هر گره ۰ یا ۲ بچه دارند. گره هایی که ۰ بچه دارند گره های خارجی نام دارند. همچنین گره هایی که ۲ بچه دارند گره های داخلی نام دارند، شکل ۳۳-۷ یک ۲-درخت را نشان می دهد که در آن گره های داخلی با دایره و گره های خارجی با مربع نشان داده شده است در هر ۲-درخت، تعداد N_E گره های خارجی ۱ واحد بیشتر از N_I گره های داخلی است. یعنی:

$$N_E = N_I + 1$$

برای مثال، برای ۲-درخت شکل ۳۳-۷ داریم $N_I = 6$ و $N_E = N_I + 1 = 7$.



شکل ۳۳-۷

اغلب یک الگوریتم را می‌توان با ۲- درخت T نمایش داد که در آن گره‌های داخلی آزمایشها Tests و گره‌های خارجی، عمل‌ها Actions را نمایش می‌دهند. بنابراین، زمان اجرای الگوریتم می‌تواند به طول مسیرهای داخل درخت بستگی داشته باشد. با توجه به این مطلب، طول مسیر خارجی L_E یک ۲- درخت T به صورت مجموع طولهای تمام مسیرهایی تعریف می‌شود که حاصل جمع طول تمام مسیرها از ریشه R درخت T تا یک گره خارجی است. طول مسیر داخلی L_I درخت T بطور مشابه تعریف می‌شود که در آن به جای گره‌های خارجی، از گره‌های داخلی استفاده می‌شود. برای درخت شکل ۷-۳۳ داریم:

$$L_I = 0 + 1 + 1 + 2 + 3 + 2 = 9 \quad \text{و} \quad L_E = 2 + 2 + 3 + 4 + 4 + 3 + 3 = 21$$

ملاحظه می‌کنید که

$$L_I + 2n = 9 + 2 \cdot 6 = 9 + 12 = 21 = L_E$$

که در آن $n = 6$ تعداد گره‌های داخلی است درواقع، فرمول

$$L_E = L_I + 2n$$

برای هر ۲- درخت با n گره داخلی برقرار است.

فرض کنید T یک ۲- درخت با n گره خارجی است و همچنین فرض کنید به هر گره خارجی یک وزن (غیرمنفی) نسبت داده شده است. طول مسیر وزن داده شده (خارجی) درخت T بنابه تعریف مجموع طول‌های مسیر وزن داده شده است یعنی:

$$P = W_1 L_1 + W_2 L_2 + \dots + W_n L_n$$

که در آن W_i و L_i به ترتیب وزن و طول مسیر یک گره خارجی N_i است.

حال مجموعه تمام ۲- درختهایی را در نظر بگیرید که n گره خارجی دارند. واضح است که درخت کامل درمیان آنها طول مسیر خارجی حداقل L_E (Minimal) دارد. از طرف دیگر فرض کنید به هر درخت همان n وزن مربوط به گره‌های خارجی اش داده شده است. آنگاه روشن نیست که درخت یک طول مسیر وزن داده شده حداقل P را به دست می‌دهد یا خیر؟

مثال ۷-۲۳

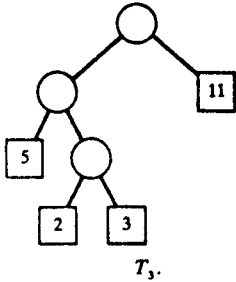
شکل ۷-۳۴ سه ۲- درخت T_1 ، T_2 و T_3 را نشان می‌دهد که هر یک از این درختها گره‌های خارجی با وزن ۲، ۳، ۵ و ۱۱ دارند. طول‌های مسیر وزن داده شده سه درخت به قرار زیرند:

$$P_1 = 2.2 + 3.2 + 5.2 + 11.2 = 42$$

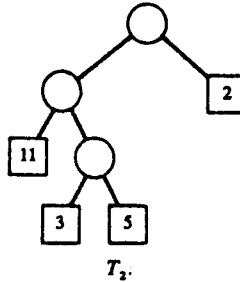
$$P_2 = 2.1 + 3.3 + 5.3 + 11.2 = 48$$

$$P_3 = 2.3 + 3.3 + 5.2 + 11.1 = 36$$

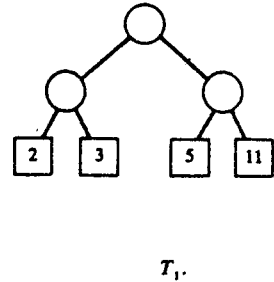
کمیت‌های P_1 و P_3 بیان می‌کنند که درخت کامل لزومی ندارد یک طول حداقل P را به دست دهد و کمیت‌های P_2 و P_3 بیان می‌کنند که درختهای مشابه لزومی ندارند همان طول‌ها را به دست دهند.



(ج)



(ب)



(الف)

شکل ۳۴-۷

مسأله‌ای که ما در حالت کلی مایل به حل آن هستیم به شرح زیر است. فرض کنید یک لیست با n وزن، داده شده است :

$$w_1, w_2, \dots, w_n$$

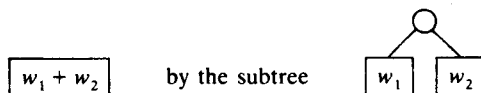
در میان تمام ۲-درختهای دارای n گره خارجی و n وزن داده شده، مطلوب است تعیین یک درخت T با حداقل طول مسیر وزن داده شده. بندرت اتفاق می‌افتد چنین درخت T ای یکتا و منحصر بفرد باشد. هافمن الگوریتمی برای پیدا کردن چنین درخت T ای ارائه داد که ما اکنون آن را بیان می‌کنیم.

ملاحظه می‌کنید که الگوریتم هافمن به صورت بازگشتی برحسب تعداد وزن‌ها و این که جواب برای یک وزن منحصر به یک درخت با یک گره است، تعریف می‌شود. از طرف دیگر در عمل، ما از یک الگوریتم با حالت تکرار و غیربازگشتی معادل الگوریتم هافمن برای ساختن درخت از پائین به بالا (Bottom - Up) به عوض ساخته شدن درخت از بالا به پائین (Top - Down) استفاده می‌کنیم.

Huffman's Algorithm: Suppose w_1 and w_2 are two minimum weights among the n given weights w_1, w_2, \dots, w_n . Find a tree T' which gives a solution for the $n - 1$ weights

$$w_1 + w_2, w_3, w_4, \dots, w_n$$

Then, in the tree T' , replace the external node



The new 2-tree T is the desired solution.

مثال ۲۴-۷

فرض کنید A, B, C, D, E, F, G, H و 8 عنصر اطلاعاتی هستند همچنین فرض کنید به این عناصر وزنهای زیر نسبت داده شده است :

عنصر اطلاعاتی :	A	B	C	D	E	F	G	H
وزن :	22	5	11	19	2	11	25	5

شکل ۳۵-۷ (الف) تا (ح) چگونگی ساخته شدن درخت T را با حداقل طول مسیر وزن داده شده با استفاده از اطلاعات بالا و الگوریتم هافمن نشان می‌دهد. ما هر مرحله را بطور مستقل توضیح می‌دهیم: (الف) در اینجا هر عنصر اطلاعاتی به زیردرخت خودش تعلق دارد. دو زیردرخت با کوچکترین ترکیب وزنی ممکن، یکی به وزن 2 و دیگری به وزن 5 سایه‌دار شده است.

(ب) در اینجا زیردرختهایی که در شکل ۳۵-۷ (الف) سایه‌دار شده‌اند به هم متصل می‌شوند تا تشکیل یک زیردرخت به وزن 7 را بدهند. مجدداً، دو زیردرخت جاری با کمترین وزن سایه‌دار شده‌اند. (ج) تا (ز) هر مرحله دو زیردرخت را به هم متصل می‌کند که کوچکترین وزن موجود را دارند (همیشه زیردرختهایی هستند که در نمودار قبلی سایه‌دار شده‌اند) و مجدداً دو زیردرخت حاصل با کمترین وزن، سایه‌دار شده‌اند.

(ح) درخت نهایی مطلوب T وقتی ساخته می‌شود که دو زیردرخت باقیمانده به هم متصل شده باشد.

پیاده‌سازی الگوریتم هافمن در کامپیوتر

مجدداً اطلاعات مثال ۲۴-۷ را در نظر بگیرید. فرض کنید خواسته باشیم الگوریتم هافمن را با استفاده از کامپیوتر پیاده‌سازی کنیم. قبل از هر چیز، نیازمند یک آرایه اضافی WT برای نگهداری وزن

گره‌ها هستیم یعنی درخت ما توسط چهار آرایه موازی **WT**، **INFO**، **LEFT** و **RIGHT** نگهداری می‌شود. شکل ۳۶-۷ (الف) چگونگی ذخیره‌شدن اطلاعات داده شده را در آغاز در کامپیوتر نشان می‌دهد. ملاحظه می‌کنید که جای کافی برای گره‌های اضافی وجود دارد. دیده می‌شود که برای گره‌های اولیه اشاره گره‌های چپ و راست **NULL** ظاهر شده است زیرا این گره‌ها در درخت نهایی گره‌های انتهایی هستند.

در طی اجرای الگوریتم باید بتوانیم تمام زیردرختهای مختلف را نگهداریم، علاوه بر این باید قادر باشیم زیردرختهایی که حداقل وزن را دارند پیدا کنیم. این کار با نگهداری یک **MinHeap** کمکی انجام می‌شود که هر گره آن شامل وزن و مکان ریشه زیردرخت جاری است. **MinHeap** اولیه در شکل ۳۶-۷ (ب) نشان داده شده است. از آنجا که می‌خواهیم گره با کمترین وزن در بالای **Heap** قرار گیرد به جای **MaxHeap** از **MinHeap** استفاده شده است.

مرحله اول در ساختن **T** درخت هافمن موردنظر شامل جزء مراحل زیر است:

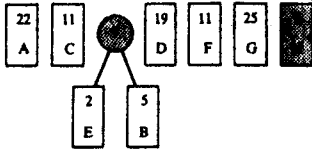
(i) گره $N_1 = [2, 5]$ و گره $N_2 = [5, 2]$ را از **Heap** حذف کنید. هر باری که یک گره حذف می‌شود، **Heap** باید بازسازی شود.

(ii) از N_1 و N_2 و اولین فضای موجود $AVAIL = 9$ برای اضافه کردن گره جدید به صورت زیر استفاده کنید:

$$WT[9] = 2 + 5 = 7 \quad LEFT[9] = 5 \quad RIGHT[9] = 2$$

بدین ترتیب N_1 بچه چپ گره جدید و N_2 بچه راست گره جدید است.

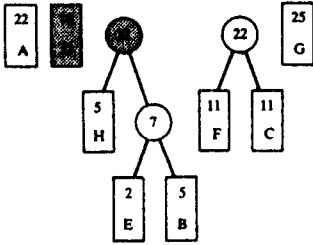
(iii) وزن و مکان گره جدید یعنی $[7, 9]$ را به **Heap** اضافه کنید.



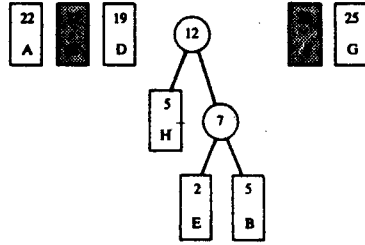
(ب)



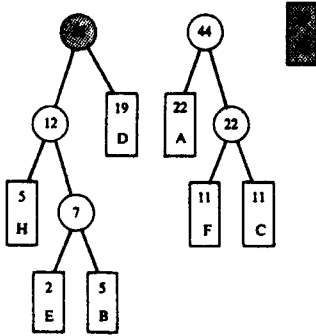
(الف)



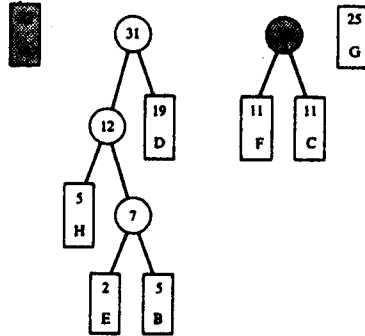
(د)



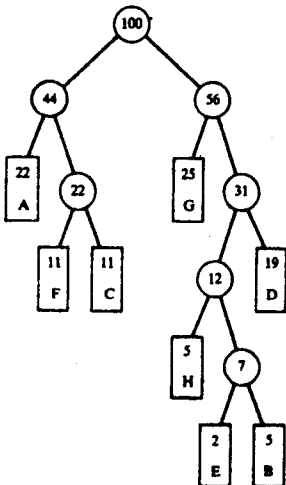
(ج)



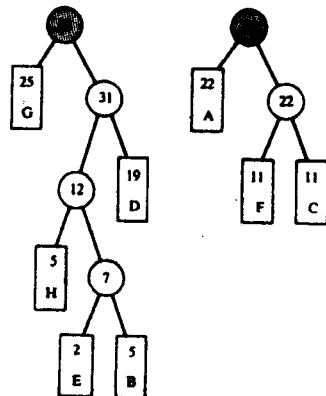
(س)



(ا)



(ح)

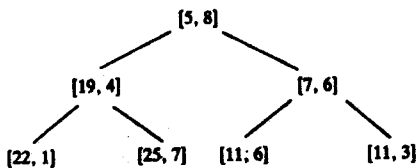


(پ)

	INFO	WT	LEFT	RIGHT
1	A	22	0	0
2	B	5	0	0
3	C	11	0	0
4	D	19	0	0
5	E	2	0	0
6	F	11	0	0
7	G	25	0	0
8	H	5	0	0
9				
10		12	8	9
11		22	6	3
12		31	10	4
13		44	1	11
14		56	7	12
15		100	13	14
16				

ROOT = 15, AVAIL = 16

(ج)

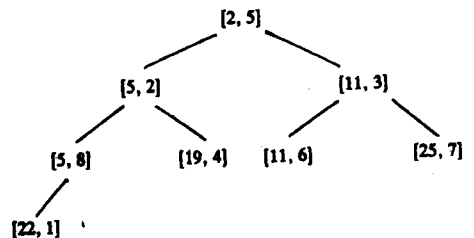


(د)

	INFO	WT	LEFT	RIGHT
1	A	22	0	0
2	B	5	0	0
3	C	11	0	0
4	D	19	0	0
5	E	2	0	0
6	F	11	0	0
7	G	25	0	0
8	H	5	0	0
9			10	
10			11	
11			12	
12			13	
13			14	
14			15	
15			16	
16			0	

AVAIL = 9

(الف)



(ب)

شکل ۷-۳۶ پیاده‌سازی الگوریتم هافمن

منطقه سایه زده شده در شکل ۷-۳۶ (ج) گره‌های جدید را نشان می‌دهد همچنین شکل ۷-۳۶ (د) Heap جدید را نشان می‌دهد که یک عنصر کمتر از Heap شکل ۷-۳۶ (ب) دارد.

مرحلهٔ بالا را تا آنجا ادامه دهید که Heap خالی شود. بدین ترتیب T درخت موردنظر در شکل ۷-۳۶ (ج) به دست می‌آید. باید قرار دهیم $ROOT = 15$ ، چون این مکان آخرین گرهٔ اضافه شده به درخت است.

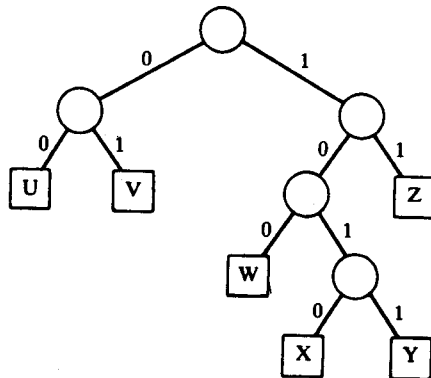
کاربرد الگوریتم هافمن در کدگذاری

فرض کنید خواسته باشیم مجموعه‌ای از n عنصر اطلاعاتی A_1, A_2, \dots, A_n به وسیلهٔ رشته‌هایی از بیت‌ها به صورت کد درآوریم. یک راه برای این منظور آن است که هر عنصر اطلاعاتی را به وسیلهٔ یک رشتهٔ r بیتی کدگذاری کنیم که در آن

$$2^{r-1} < n \leq 2^r$$

برای مثال، یک مجموعه با ۴۸ کاراکتر را اغلب با استفاده از رشته‌های ۶ بیتی در حافظه کدگذاری می‌کنند. برای این مجموعه نمی‌توان از رشته‌های ۵ بیتی استفاده کرد چون $2^5 < 48 < 2^6$.

فرض کنید عنصرهای اطلاعاتی با احتمال مساوی اتفاق نمی‌افتند. آنگاه فضای حافظه را می‌توان با استفاده از رشته‌های با طول متغیر حفظ کرد که در آن عناصری که اغلب اوقات ظاهر می‌شوند در رشته‌های کوتاه‌تر جایگزین می‌شوند و عناصری که بندرت ظاهر می‌شوند در رشته‌های بزرگ‌تر جایگزین می‌شوند. این بخش با استفاده از رشته‌هایی با طول متغیر یک روش کدگذاری را توضیح می‌دهد که بر پایهٔ T درخت هافمن برای عناصر اطلاعاتی وزن داده شده استوار است.



شکل ۷-۳۷

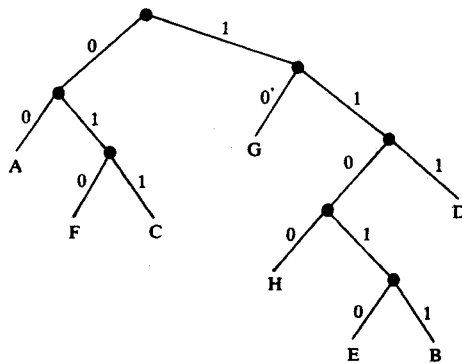
T درخت دودویی گسترش یافته شکل ۳۷-۷ را در نظر بگیریم که گره‌های خارجی آن عناصر V, U, W, X, Y, Z و هستند. ملاحظه می‌کنید که هر یال از گره داخلی تا بجهٔ چپ با بیت 0 و هر یال از گره داخلی به بجهٔ راست با بیت 1 شماره‌گذاری می‌شود. کد هافمن در هر گره خارجی دنباله بیت‌های از ریشه تا آن گره را جایگزین می‌کند. بدین ترتیب درخت T در شکل ۳۷-۷ کد زیر را برای گره‌های خارجی معین می‌کند:

U: 00 V: 01 W: 100 X: 1010 Y: 1011 Z: 11

این کد خاصیت "پیشوندی" دارد یعنی کد هر عنصر اطلاعاتی زیررشتهٔ اولیهٔ کد هر عنصر اطلاعاتی دیگر نیست. به بیان دیگر هیچ ابهامی نمی‌تواند در هنگام از کد درآوردن هر پیغام با استفاده از کد هافمن وجود داشته باشد.

بار دیگر 8 عنصر اطلاعاتی A, B, C, D, E, F, G, H و مثال ۲۴-۷ را در نظر بگیرید. فرض کنید وزن‌ها نمایش درصد احتمالاتی باشد که عنصرها ظاهر می‌شوند. آنگاه درخت T با حداقل طول مسیر وزن داده شده ساخته شده در شکل ۳۷-۷ که با شماره‌گذاری‌های بیتی در شکل ۳۸-۷ نشان داده شده است، یک کدگذاری مؤثر و کارا از عناصر اطلاعاتی را نتیجه می‌دهد. دانشجو می‌تواند تحقیق کند که درخت T کد زیر را بدست می‌دهد:

A: 00 B: 11011 C: 011 D: 111
E: 11010 F: 010 G: 10 H: 1100



شکل ۳۸-۷

۱۲-۷ درختهای عمومی

یک درخت عمومی (که گاهی اوقات یک درخت نامیده می‌شود) بنابه تعریف یک مجموعهٔ متناهی و غیرتهی T از عناصر موسوم به گره‌ها است، به طوری که:

(۱) T یک عنصر متمایز R موسوم به ریشه R داشته باشد.

(۲) عنصرهای باقیمانده T تشکیل یک مجموعه مرتب از صفر یا چند درخت جدا از هم T_1, T_2, \dots, T_m را بدهند.

درختهای T_1, T_2, \dots, T_m زیردرختهای ریشه R نامیده می‌شوند و ریشه‌های T_1, T_2, \dots, T_m گره‌های بعدی R نامیده می‌شوند.

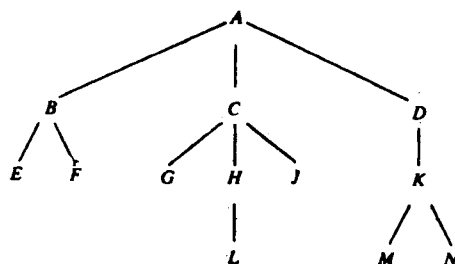
اصطلاحات مربوط به رابطه‌های خانوادگی، نظریه گراف و علم باغبانی به همان صورتی که در درختهای دودویی بکار رفت برای درختهای عمومی نیز مورد استفاده قرار می‌گیرد. به‌ویژه، اگر یک گره N با گره‌های بعدی S_1, S_2, \dots, S_m باشد آنگاه N پدر S_1 ها و S_1 ها بچه‌های N و S_1 ها همدریف یا برادرهای یکدیگر نامیده می‌شوند.

اصطلاح "درخت" با اندکی تغییر در معنی، در بسیاری از شاخه‌های مختلف ریاضی و علم کامپیوتر ظاهر می‌شود. در اینجا فرض می‌کنیم که T درخت عمومی، ریشه دار است یعنی T یک گره متمایز R موسوم به ریشه T دارد و T مرتب است یعنی بچه‌های هر گره N درخت T یک ترتیب مشخص دارد. این دو خاصیت همیشه برای تعریف یک درخت لازم نیستند.

مثال ۲۵-۷

شکل ۳۹-۷ یک درخت عمومی T را با ۳ گره نشان می‌دهد،

$A, B, C, D, E, F, G, H, J, K, L, M, N$



شکل ۳۹-۷

ریشه درخت T گره بالای نمودار است و بچه‌های یک گره از چپ به راست مرتب هستند، مگر آن که خلاف آن بیان شود. بنابراین، A ریشه T و A سه بچه دارد، بچه اول B ، بچه دوم C و بچه سوم D است. ملاحظه می‌کنید که:

(الف) گره C سه بچه دارد.

(ب) هر یک از گره‌های B و K دو بچه دارند.

(ج) هر یک از گره‌های D و H تنها یک بچه دارند.

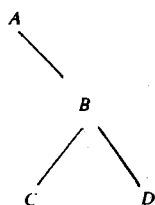
(د) گره‌های E, F, G, L, J, M و N هیچ بچه‌ای ندارند.

به دسته گره‌های آخر که هیچ بچه‌ای ندارند گره‌های انتهایی می‌گویند.

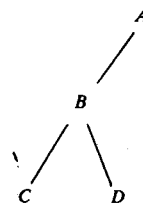
یک درخت دودویی T' حالت خاصی از درخت عمومی T نیست: درختهای دودویی و درختهای عمومی به دو موضوع مختلف تعلق دارند. دو اختلاف اساسی آنها عبارت است از:

(۱) یک درخت دودویی T' می‌تواند خالی باشد اما یک درخت عمومی نمی‌تواند خالی باشد.

(۲) فرض کنید گره N تنها یک بچه دارد. آنگاه این بچه در یک درخت دودویی T' با عنوان بچه چپ و بچه راست از هم متمایز می‌شوند، اما در یک درخت عمومی T هیچگونه تمایزی بین آنها وجود ندارد. اختلاف دوم به وسیله درختهای T_1 و T_2 در شکل ۷-۴۰ توضیح داده می‌شود. به‌طور مشخص، به عنوان درختهای دودویی، T_1 و T_2 درختهای متمایز هستند چون B بچه چپ A در درخت T_1 است اما در درخت T_2 بچه راست A است. از طرف دیگر، به عنوان درختهای عمومی هیچگونه تفاوتی بین درختهای T_1 و T_2 وجود ندارد.



Tree T_2 (ب)



Tree t_1 (الف)

شکل ۷-۴۰

یک جنگل بنابه تعریف مجموعه‌ای مرتب از صفر یا چند درخت متمایز است. به‌وضوح، اگر ریشه R از درخت عمومی T حذف شود، آنگاه جنگل F به دست می‌آید که از زیردرختهای R (که می‌تواند خالی باشد) تشکیل می‌شود. بالعکس، اگر F یک جنگل باشد، آنگاه می‌توان گره R را به F اضافه کرد تا تشکیل یک درخت عمومی T را بدهد که در آن R ریشه T و زیردرختهای R متشکل از درختهای اصلی در F است.

نمایش درختهای عمومی در کامپیوتر

فرض کنید T یک درخت عمومی باشد، T در حافظه به وسیله یک نمایش پیوندی نگهداری می‌شود که از سه آرایه موازی $INFO$ ، $CHILD$ (یا $DOWN$) و $SIBL$ (یا $HORZ$) و یک متغیر اشاره گر $ROOT$ به شرح زیر استفاده می‌کند مگر آن که خلاف آن به صورت صریح یا ضمنی بیان گردد: قبل از همه، هر گره N از درخت T متناظر با یک مکان K است به طوری که:

(۱) $INFO[K]$ شامل اطلاعات گره N است.

(۲) $CHILD[K]$ شامل مکان بچه اول N است. شرط $CHILD[K] = NULL$ بیان می‌کند که N بچه‌ای ندارد.

(۳) $SIBL[K]$ شامل مکان همردیف یا برادر بعدی گره N است. شرط $SIBL[K] = NULL$ بیان می‌کند که N بچه آخر پدرش است.

علاوه بر این، $ROOT$ شامل مکان ریشه R درخت T است. اگرچه این نمایش می‌تواند مصنوعی به نظر رسد، اما دارای این مزیت مهم است که هر گره N از درخت T ، بدون در نظر گرفتن تعداد بچه‌های N ، دقیقاً شامل سه فیلد خواهد بود.

نمایش بالا را می‌توان به سادگی برای نمایش یک جنگل متشکل از درختهای T_1, T_2, \dots, T_m تعمیم داد مشروط بر این که ریشه این درختها همردیف یا برادر باشند. در چنین حالتی، $ROOT$ شامل مکان ریشه R_1 از درخت اول T_1 است، یا وقتی F خالی است $ROOT$ برابر $NULL$ است.

مثال ۲۶-۷

T درخت عمومی شکل ۳۹-۷ را در نظر بگیرید. فرض کنید همانند شکل ۴۱-۷ (الف) اطلاعات گره‌های T در آرایه $INFO$ ذخیره شده‌اند. رابطه‌های ساختاری درخت T با جایگزینی مقادیر در اشاره گر $ROOT$ و آرایه $CHILD$ و $SIBL$ به صورت زیر بدست می‌آید:

(الف) چون ریشه A از درخت T در $INFO[2]$ ذخیره می‌شود قرار دهید $2 := ROOT$.

(ب) چون بچه اول A گره B است که در $INFO[3]$ ذخیره می‌شود قرار دهید $3 := CHIL[2]$. چون گره A همردیفی ندارد، قرار دهید $NULL := SIBL[2]$.

(ج) چون بچه اول B گره E است، که در $INFO[15]$ ذخیره می‌شود قرار دهید $15 := CHILD[3]$. چون گره C همردیف بعدی B است و C در $INFO[4]$ ذخیره می‌شود قرار دهید $4 := SIBL[3]$.

و الی آخر. شکل ۴۱-۷ (ب) مقادیر نهایی $CHILD$ و $SIBL$ را بدست می‌دهد. ملاحظه می‌کنید که لیست گره‌های خالی $AVAIL$ در آرایه اول $CHILD$ نگهداری می‌شود که در آن $1 = AVAIL$.

INFO	
1	
2	A
3	B
4	C
5	
6	G
7	H
8	J
9	N
10	M
11	L
12	K
13	
14	F
15	E
16	D

(ب)

	CHILD	SIBL
1	5	
2	3	0
3	15	4
4	6	16
5	13	
6	0	7
7	11	8
8	0	0
9	0	0
10	0	9
11	0	0
12	10	0
13	0	
14	0	0
15	0	14
16	12	0

ROOT = 2, AVAIL = 13

(الف)

شکل ۴۱-۷

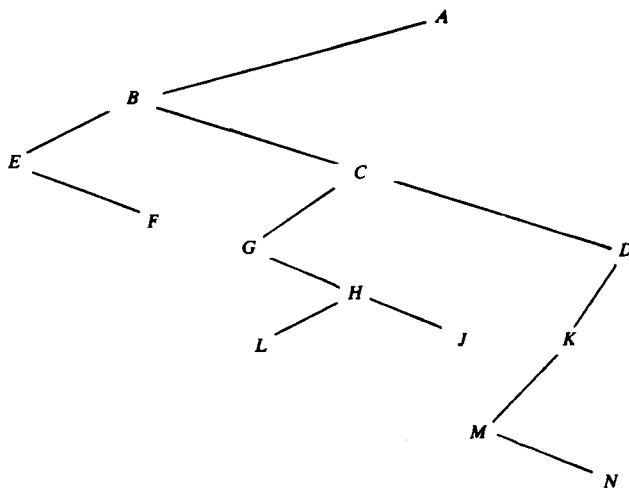
تناظر بین درختهای عمومی و درختهای دودویی

فرض کنید T یک درخت عمومی باشد. آنگاه می توان یک درخت دودویی T' منحصر بفرد و یکتا به شرح زیر به T نسبت داد. قبل از هر چیز، باید گفت که گره های درخت دودویی T' همان گره های درخت عمومی T هستند و ریشه T' ریشه T خواهد بود. فرض کنید N یک گره دلخواه از درخت دودویی T' باشد. آنگاه بچه چپ N در T' بچه اول گره N در درخت عمومی T خواهد بود و بچه راست N در T' همردیف بعدی N در درخت عمومی خواهد بود.

مثال ۲۸-۷

T درخت عمومی شکل ۳۹-۷ را در نظر بگیرید. دانشجو می تواند تحقیق کند که T' درخت دودویی

شکل ۷-۴۲ متناظر با T درخت عمومی است. ملاحظه می‌کنید که با دوران تصویر T' شکل ۷-۴۲ در جهت مثلثاتی تا هنگامی که یالهای مربوط به بچه راست موازی گردند تصویری به دست می‌آید که در آن گره‌ها، همان مکان نسبی گره‌های شکل ۷-۳۹ را اشغال می‌کنند.



شکل ۷-۴۲ درخت دودویی T'

نمایش درخت عمومی T در کامپیوتر و نمایش پیوندی T' درخت دودویی متناظر با آن دقیقاً یکی هستند بجز اینکه نامهای آرایه‌های $CHILD$ و $SIBL$ برای درخت عمومی T متناظر با نامهای آرایه‌های $LEFT$ و $RIGHT$ برای درخت دودویی T' هستند. اهمیت این تناظر در آن است که الگوریتم‌های معینی که بر درختهای دودویی اعمال می‌شوند نظیر الگوریتم‌های پیمایش را اکنون می‌توان بر درختهای عمومی اعمال کرد.

مسأله‌های حل شده

درختهای دودویی

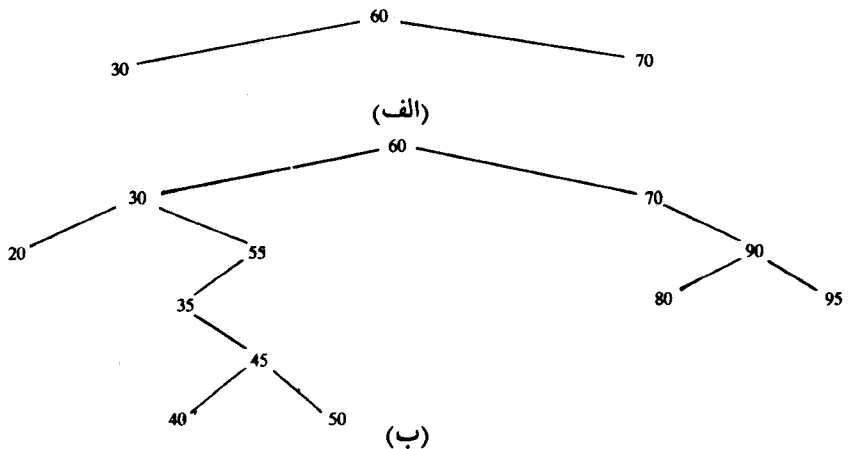
مسأله ۷-۱: فرض کنید درخت دودویی T به صورت شکل ۷-۴۳ در حافظه ذخیره شده است. نمودار درخت T را رسم کنید.

حل: درخت T از ریشه‌اش R به طرف پائین به صورت زیر رسم می‌شود.

(الف) ریشه R از مقدار اشاره گر ROOT به دست می آید. توجه دارید که $ROOT = 5$ از این رو $INFO[5] = 60$ ریشه R درخت T است.

	INFO	LEFT	RIGHT
ROOT	1	20	0
5	2	30	13
AVAIL	3	40	0
9	4	50	0
	5	60	2
	6	70	0
	7	80	0
	8	90	7
	9		10
	10		0
	11	35	0
	12	45	3
	13	55	11
	14	95	0

شکل ۷-۴۳



شکل ۷-۴۴

(ب) بچه چپ R از فیلد اشاره گر چپ R بدست می‌آید. توجه دارید که $LEFT[5] = 2$ از این‌رو $INFO[2] = 30$ بچه چپ R است.

(ج) بچه راست R از فیلد اشاره گر R بدست می‌آید. توجه دارید که $RIGHT[5] = 6$ از این‌رو $INFO[6] = 70$ بچه راست R است.

اکنون می‌توانیم قسمت بالای درخت را به صورت شکل ۷-۴۴ (الف) رسم کنیم. با تکرار پردازش بالا با هر گره جدید، نهایتاً درخت مطلوب در شکل ۷-۴۴ (ب) به دست می‌آید.
مسئله ۷-۲: درخت دودویی T دارای ۹ گره است. پیمایشهای InOrder و PreOrder درخت T دنبال گره‌های زیر را بدست می‌دهد:

Inorder: E A C K F H D B G
Preorder: F A E K C D H G B

درخت T را رسم کنید.

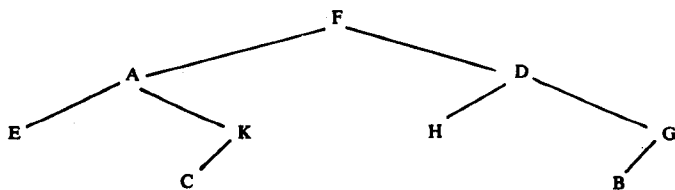
حل: درخت T از ریشه‌اش به طرف پائین به شرح زیر رسم می‌شود.

(الف) ریشه T با انتخاب گره اول در PreOrder اش به دست می‌آید. بدین ترتیب F ریشه T است.

(ب) بچه چپ گره F به صورت زیر به دست می‌آید. نخست برای پیدا کردن گره‌های زیردرخت چپ T_1 از F پیمایش InOrder استفاده کنید. بدین ترتیب T_1 شامل گره‌های E, C, A, و K است. آنگاه بچه چپ F با انتخاب گره اول در پیمایش PreOrder زیر درخت T_1 (که در Preorder درخت T ظاهر شده است) بچه چپ F به دست می‌آید. بنابراین A پسر چپ F است.

(ج) به همین ترتیب، T_2 زیردرخت راست F از گره‌های B, D, H و G تشکیل شده است همچنین D ریشه T_2 یعنی D بچه راست F است.

با تکرار پردازش بالا با هر گره جدید، نهایتاً درخت موردنظر در شکل ۷-۴۵ بدست می‌آید.



شکل ۷-۴۵

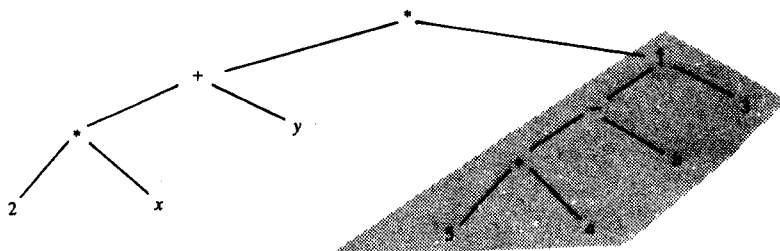
مسئله ۷-۳: عبارت جبری $E = (2x + y)(5a - b)^3$ را درنظر بگیرید:

(الف) درخت T ای رسم کنید که متناظر با عبارت E باشد.

(ب) دامنه فعالیت عملگر توان را تعیین کنید یعنی زیردرختی را پیدا کنید که ریشه آن عملگر توان است.
 (ج) عبارت لهستانی پیشوندی P را که معادل E است پیدا کنید همچنین نمایش PreOrder T را تعیین کنید.
 حل: (الف) با استفاده از پیکان ↑ برای توان و ستاره * برای ضرب، درخت نشان داده شده در شکل ۷-۴۶ به دست می آید.

(ب) دامنه فعالیت ↑ درخت سایه زده شده شکل ۷-۴۶ است، که متناظر با عبارت $(5a - b)^3$ است.
 (ج) تفاوتی بین عبارت لهستانی پیشوندی P و نمایش PreOrder درخت T وجود ندارد. درخت T را مانند شکل ۷-۱۲ از چپ جستجو و می خوانیم به دست می آید:

* + * 2 * x y ↑ - * 5 a b 3



شکل ۷-۴۶

مسئله ۷-۴: فرض کنید T یک درخت دودویی در حافظه باشد. یک زیربرنامه بازگشتی بنویسید که تعداد گره‌های درخت T را پیدا کند.

حل: NUM: تعداد گره‌ها در T یک واحد بیشتر از NUML: تعداد گره‌های زیردرخت چپ T به اضافه NUMR: تعداد گره‌های زیردرخت راست T است. بنابراین

Procedure P7.4: COUNT(LEFT, RIGHT, ROOT, NUM)

This procedure finds the number NUM of nodes in a binary tree T in memory.

1. If ROOT = NULL, then: Set NUM := 0, and Return.
2. Call COUNT(LEFT, RIGHT, LEFT[ROOT], NUML).
3. Call COUNT(LEFT, RIGHT, RIGHT[ROOT], NUMR).
4. Set NUM := NUML + NUMR + 1.
5. Return.

ملاحظه می‌کنید که آرایه INFO هیچ نقشی در این زیربرنامه ایفا نمی‌کند.

مسئله ۷-۵: فرض کنید T یک درخت دودویی در حافظه باشد. یک زیربرنامه بازگشتی بنویسید تا عمق DEP درخت T را پیدا کند.

حل: عمق DEP درخت T یک واحد بیشتر از حداکثر عمق‌های زیردرختهای چپ و راست T است.

Procedure P7.5: DEPTH(LEFT, RIGHT, ROOT, DEP)

بنابراین :

This procedure finds the depth DEP of a binary tree T in memory.

1. If ROOT = NULL, then: Set DEP := 0, and Return.
2. Call DEPTH(LEFT, RIGHT, LEFT[ROOT], DEPL).
3. Call DEPTH(LEFT, RIGHT, RIGHT[ROOT], DEPR).
4. If $DEPL \geq DEPR$, then:
Set DEP := DEPL + 1.
Else:
Set DEP := DEPR + 1.
[End of If structure.]
5. Return.

ملاحظه می‌کنید که آرایه INFO هیچ نقشی در این زیربرنامه Procedure ایفا نمی‌کند.

مسئله ۶-۷: تمام درختهای غیرمتشابه ممکن T را رسم کنید که در آن :

(الف) T یک درخت دودویی با ۳ گره است.

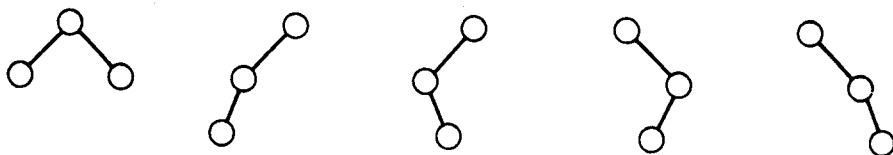
(ب) T یک ۲-درخت با ۴ گره خارجی است.

حل: (الف) ۵ درخت از این نوع وجود دارد که در شکل ۴۷-۷ (الف) رسم شده‌اند.

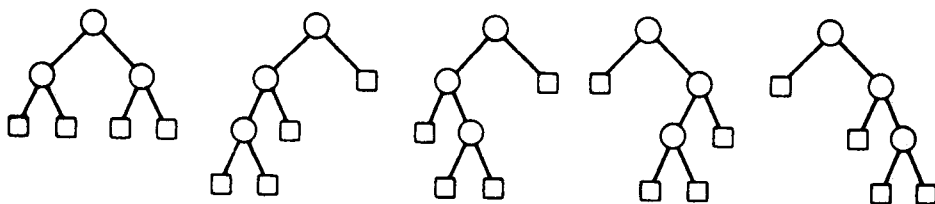
(ب) هر ۲-درخت با ۴ گره خارجی به وسیله یک درخت دودویی با ۳ گره یعنی به وسیله درخت

قسمت (الف) تعیین می‌شود. بدین ترتیب پنج درخت از این نوع وجود دارد که در شکل ۴۷-۷ (ب)

رسم شده‌اند.



(الف) درختهای دودویی با ۳ گره



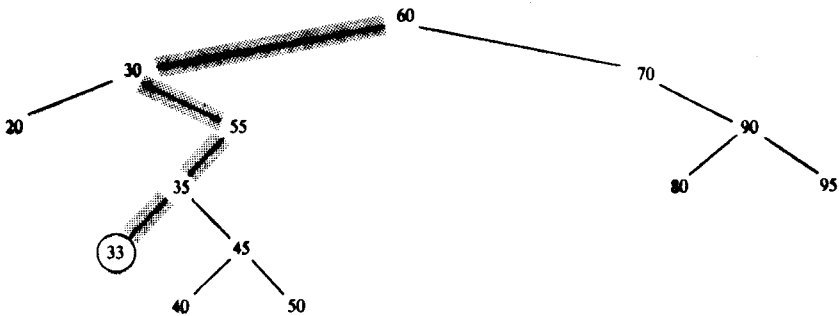
(ب) درخت دودویی گسترش یافته با ۴ گره خارجی

درختهای جستجوی دودویی ، Heap ها

مسأله ۷-۷: درخت جستجوی دودویی T شکل ۷-۴۴ (ب) را در نظر بگیرید که مطابق شکل ۷-۴۳ در حافظه ذخیره می شود. فرض کنید $ITEM = 33$ به درخت T اضافه شده است.

(الف) درخت جدید T را پیدا کنید. (ب) چه تغییری در شکل ۷-۴۳ بوجود می آید؟

حل: (الف) $ITEM = 33$ را با ریشه یعنی 60 مقایسه کنید. چون $33 < 60$ ، آن را به طرف بچه چپ، 30 منتقل کنید. از آنجا که $33 > 30$ ، آن را به طرف بچه راست، 55 منتقل کنید. چون $33 < 55$ ، آن را به طرف بچه چپ، 35 منتقل کنید. اکنون $33 < 35$ ، اما 35 بچه چپی ندارد. از این رو $ITEM = 33$ را به عنوان بچه چپ گره 35 اضافه کنید تا درخت شکل ۷-۴۸ به دست آید. یالهای سایه زده شده بیان می کنند که در طی اجرای الگوریتم اضافه کردن، درخت مسیر را به طرف پائین طی می کنیم.



شکل ۷-۴۸

(ب) نخست، $ITEM = 33$ در گره موجود اول جایگزین می شود. چون $AVAIL = 9$ ، قرار دهید $INFO[9] = 33$ و قرار دهید $LEFT[9] = 0$ و $RIGHT[9] = 0$ علاوه بر این قرار دهید $AVAIL = 10$ که گره موجود بعدی است. بالاخره، قرار دهید $LEFT[11] = 9$ طوری که $ITEM = 33$ بچه چپ $INFO[11] = 35$ باشد. شکل ۷-۴۹ درخت تازه شده T را در حافظه نشان می دهد. سایه زدگی بهانگر تغییرات در نمودار اصلی است.

		INFO	LEFT	RIGHT
ROOT	1	20	0	0
5	2	30	1	13
AVAIL	3	40	0	0
10	4	50	0	0
	5	60	2	6
	6	70	0	8
	7	80	0	0
	8	90	7	14
	9	25	0	0
	10		0	
	11	35	0	12
	12	45	3	4
	13	55	11	0
	14	95	0	0

شکل ۴۹-۷

مسأله ۸-۷: فرض کنید لیست حروف زیر به ترتیب در یک درخت جستجوی دودویی خالی اضافه شده است:

J, R, D, G, T, E, M, H, P, A, F, Q

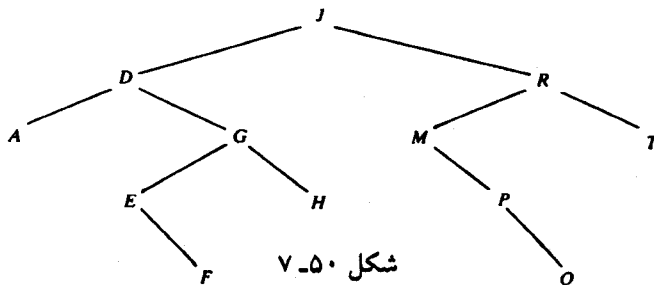
(الف) درخت نهایی T و (ب) پیمایش InOrder درخت T را پیدا کنید.

حل: (الف) گره‌ها را یکی پس از دیگری اضافه کنید تا درخت شکل ۵۰-۷ به دست آید.

(ب) پیمایش InOrder درخت T به صورت زیر است:

A, D, E, F, G, H, J, M, P, Q, R, T

ملاحظه می‌کنید که عبارت بالا، لیست الفبایی حروف است.

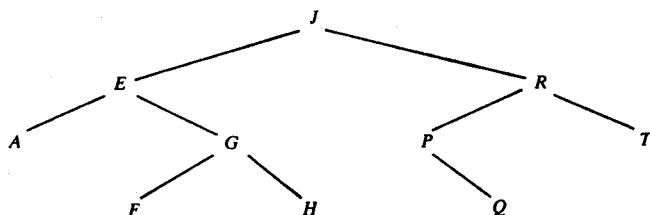


شکل ۵۰-۷

مسئله ۹-۷: درخت جستجوی دودویی T در شکل ۵۰-۷ را در نظر بگیرید. وضعیت درخت را پس از (الف) حذف گره M (ب) همچنین حذف گره D شرح دهید.

حل: (الف) گره M تنها یک بچه P دارد. از این رو با حذف P، M بچه چپ R به جای M می‌نشیند.

(ب) گره D دو بچه دارد. گره بعدی پیمایش InOrder مربوط به D را پیدا کنید که گره E است. نخست E را از درخت حذف کنید و آنگاه D را جانشین E کنید.



شکل ۵۱-۷

مسئله ۱۰-۷: فرض کنید n عنصری اطلاعاتی A_1, A_2, \dots, A_N از قبل مرتب شده هستند یعنی

$$A_1 < A_2 < \dots < A_N$$

(الف) با فرض این که عناصر به ترتیب در درخت جستجوی دودویی خالی اضافه می‌شوند و وضعیت درخت نهایی T را توضیح دهید.

(ب) عمق D درخت T را تعیین کنید.

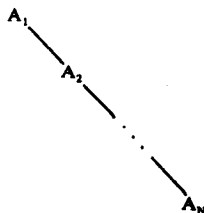
(ج) به ازای (i) $n = 50$ ، (ii) $n = 100$ و (iii) $n = 500$ ، D را با عمق میانگین AD، یا Average Depth، یک درخت جستجوی دودویی با n گره مقایسه کنید.

حل: (الف) درخت از یک شاخه تشکیل شده است که در طرف راست همانند شکل ۵۲-۷ می‌باشد.

(ب) چون T یک شاخه دارد که دارای تمام n گره است، در نتیجه $D = n$.

(ج) می‌دانیم که $AD = c \log_2 n$ ، که در آن $c \approx 1.4$ از این رو

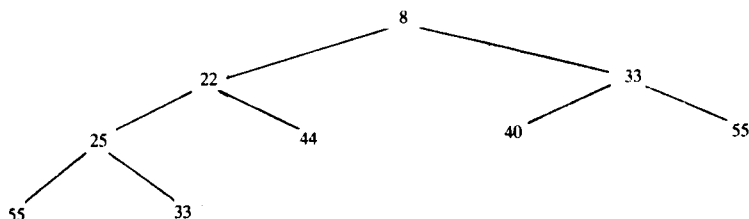
$$D(50) = 50, AD(50) \approx 9; D(100) = 100, AD(100) \approx 10; D(500) = 500, AD(500) \approx 12$$



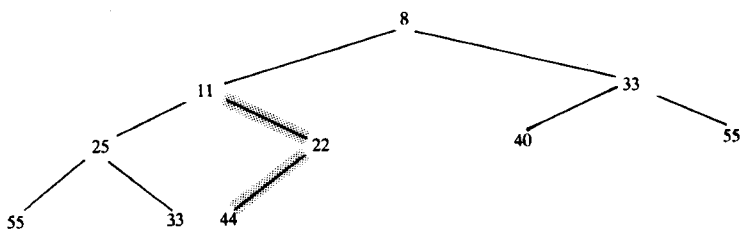
شکل ۵۲-۷

مسئله ۷-۱۱: H یک MinHeap شکل ۷-۵۳ (الف) را در نظر بگیرید. H یک MinHeap است چون عنصرهای کوچکتر به عوض عنصرهای بزرگتر، بالای Heap هستند. وضعیت Heap را پس از اضافه شدن $ITEM = 11$ در H توضیح دهید.

حل: نخست $ITEM$ را به عنوان گره بعدی یعنی به عنوان بچه چپ گره ۴۴ در درخت کامل اضافه کنید. آنگاه بطور مکرر $ITEM$ را با پدرش مقایسه کنید. چون $11 < 44$ ، جای ۱۱ و ۴۴ را عوض کنید. از آنجا که $11 < 22$ ، جای ۱۱ و ۲۲ را عوض کنید. چون $11 > 8$ ، $ITEM = 11$ مکان مربوطه‌اش را در Heap پیدا کرده است. شکل ۷-۵۳ (ب) Heap تازه شده H را نشان می‌دهد. یالهای سایه‌زده شده بیانگر مسیر $ITEM$ به طرف بالای درخت است.



(الف)



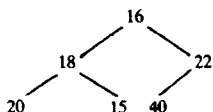
(ب)

شکل ۷-۵۳

مسئله ۷-۱۲: درخت کامل T با $N = 6$ گره شکل ۷-۵۴ را در نظر بگیرید. فرض کنید یک Heap از T با استفاده از

Call INSHEAP(A, J, A[J + 1])

به ازای $J = 1, 2, \dots, N - 1$ ساخته‌ایم. (در اینجا T به صورت ترتیبی در آرایه A ذخیره می‌شود.) مراحل مختلف را توضیح دهید.



شکل ۵۵-۷ مراحل مختلف را نشان می‌دهد. ما هر مرحله را بطور مستقل توضیح می‌دهیم.

(الف) $J = 1$ و $ITEM = A[2] = 18$. چون $18 > 16$ ، جای 18 و 16 را عوض کنید.

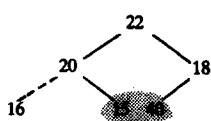
(ب) $J = 2$ و $ITEM = A[3] = 22$. چون $22 > 18$ ، جای 22 و 18 را عوض کنید.

(ج) $J = 3$ و $ITEM = A[4] = 20$. چون $20 > 16$ اما $20 < 22$ ، تنها جای 20 و 16 را عوض کنید.

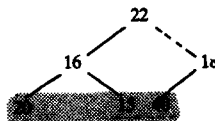
(د) $J = 4$ و $ITEM = A[5] = 15$. چون $15 < 20$ ، هیچ جابجایی صورت نمی‌گیرد.

(ه) $J = 5$ و $ITEM = A[6] = 40$. چون $40 > 18$ و $40 > 22$ ، نخست جای 40 و 18 و سپس جای 40 و 22 را عوض کنید.

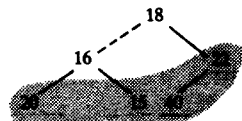
اکنون درخت یک Heap است. یالهای خط چین شده بیان می‌کنند که یک جابجایی صورت گرفته است منطقه سایه دار نشده بیانگر قسمتی از درخت می‌باشد که Heap می‌سازد. ملاحظه می‌کنید که Heap از بالا به پائین ایجاد می‌شود (هرچند عناصر، به صورت انفرادی، به بالای درخت هجرت می‌کنند!)



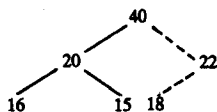
ITEM = 20 (ج)



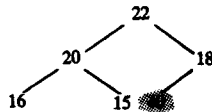
ITEM = 22 (ب)



ITEM = 18 (الف)



ITEM = 40 (ه)



ITEM = 15 (د)

شکل ۵۵-۷

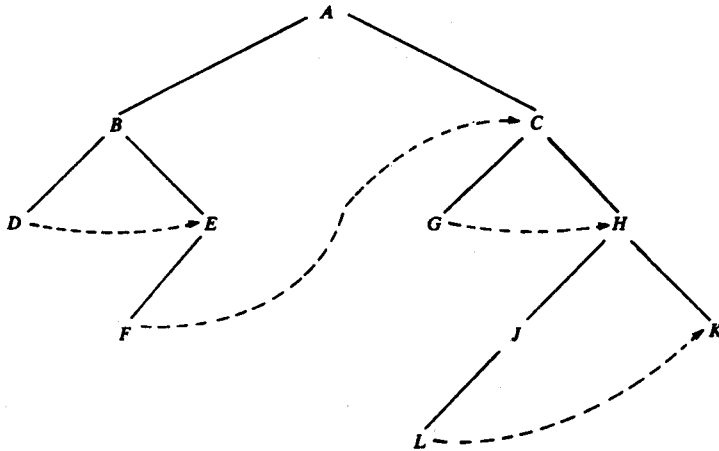
مسأله‌های گوناگون

مسأله ۱۳-۷: درخت دودویی T شکل ۱-۷ را در نظر بگیرید (الف) نخ‌کشی PreOrder یکطرفه T را تعیین کنید. (ب) نخ‌کشی PreOrder دوطرفه T را تعیین کنید.

حل: (الف) به جای نخ‌کشی‌ای که به گره بعدی N در پیمایش PreOrder درخت T اشاره می‌کند زیر درخت خالی راست گره انتهایی N را قرار دهید. بدین ترتیب، یک نخ‌کشی از D به E وجود دارد چون در پیمایش PreOrder درخت T، E پس از D ملاقات می‌شود. به همین ترتیب، یک نخ‌کشی از F به C، از

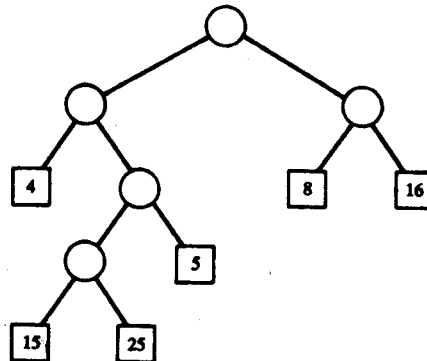
G به H و از L به K وجود دارد. درخت نخ‌کشی شده در شکل ۵۶-۷ نشان داده شده است. گره انتهایی K هیچ نخ‌کشی ندارد چون آخرین گره پیمایش PreOrder درخت T است. از طرف دیگر، اگر T یک سرگره Z داشته باشد، آنگاه یک نخ‌کشی از K به سرگره Z وجود خواهد داشت.

(ب) هیچ نخ‌کشی PreOrder دوطرفه برای درخت T وجود ندارد که مشابه نخ‌کشی InOrder دوطرفه T باشد.



شکل ۵۶-۷ درخت Preorder نخ‌کشی شده

مسئله ۱۴-۷: ۲- درخت T وزن داده شده شکل ۵۷-۷ را در نظر بگیرید.



شکل ۵۷-۷

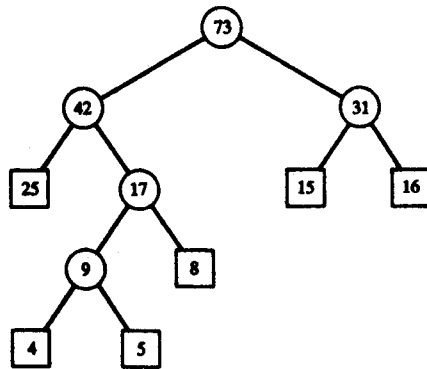
P طول مسیر وزن داده شده درخت T را به دست آورید.

حل: هر وزن W_i را در طول L_i مسیر از ریشه T تا گره ای که دارای وزن است ضرب کنید و آنگاه تمام این حاصلضرب ها را با هم جمع کنید تا P بدست آید. بنابراین:

$$P = 4.2 + 15.4 + 25.4 + 5.3 + 8.2 + 16.2 = 8 + 60 + 100 + 15 + 16 + 32 = 231$$

مسئله ۱۵-۷: فرض کنید شش وزن ۴، ۱۵، ۲۵، ۵، ۸، ۱۶ داده شده است. یک ۲-درخت T با وزن های داده شده و یک طول مسیر وزن داده شده حداقل P پیدا کنید. T را با درخت شکل ۵۷-۷ مقایسه کنید. حل: از الگوریتم هافمن استفاده کنید، یعنی بطور مکرر دو زیردرخت با حداقل وزن را در یک زیردرخت به شرح زیر ترکیب کنید:

- (الف) 4, 15, 25, 5, 8, 16
 (ب) 15, 25, 9, 8, 16
 (ج) 15, 25, 17, 16
 (د) 25, 17, 31
 (ه) 42, 31
 (و) 73



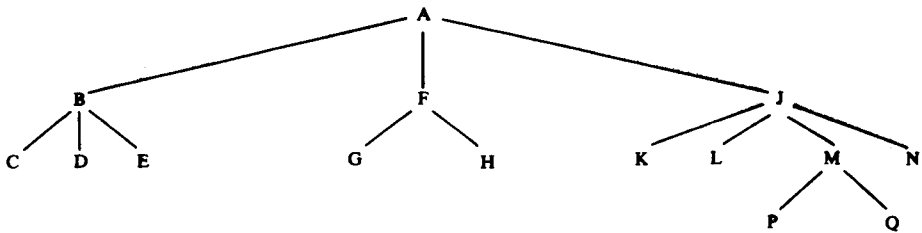
شکل ۵۸-۷

عدد داخل دایره بیانگر ریشه زیردرخت جدید در این فرایند است. زیردرخت T از مرحله (و) به بالا رسم شده است که حاصل آن شکل ۵۸-۷ است. P با این درخت به صورت زیر محاسبه می شود:

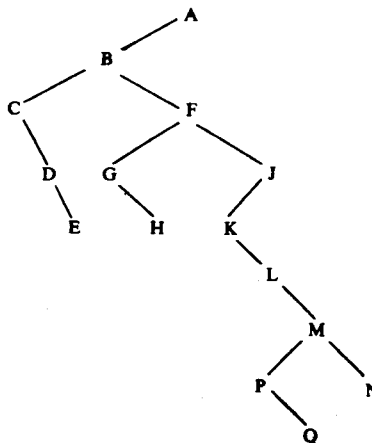
$$P = 25.2 + 4.4 + 5.4 + 8.3 + 15.2 + 16.2 = 50 + 16 + 20 + 24 + 30 + 32 = 172$$

طول مسیر وزن داده شده درخت شکل ۵۷-۷، ۲۳۱ است.

مسأله ۷-۱۶: درخت عمومی T شکل ۷-۵۹ (الف) را در نظر بگیرید درخت دودویی T' متناظر با آن را پیدا کنید.



(الف) درخت عمومی T



(ب) درخت دودویی T'

شکل ۷-۵۹

حل: گره‌های T' همان گره‌های درخت عمومی T خواهند بود همچنین در حالت خاص ریشه T' همان ریشه درخت T است. علاوه بر این، اگر N یک گره در درخت دودویی T' باشد آنگاه بچه چپ آن، بچه اول N در T و بچه راست آن، هم‌ردیف بعدی N در T است. T' را از ریشه به طرف پائین می‌سازیم، درخت شکل ۷-۵۹ (ب) حاصل می‌شود.

مسأله ۷-۱۷: فرض کنید T یک درخت عمومی با ریشه R و زیردرخت‌های T₁, T₂, ..., T_m باشد.

پیمایش PreOrder و PostOrder درخت T به صورت زیر تعریف می‌شوند:

PreOrder: (۱) ریشه R را پردازش کنید.

(۲) زیردرختهای T_1, T_2, \dots, T_M را با روش **PreOrder** پیمایش کنید.

PostOrder: (۱) زیردرختهای T_1, T_2, \dots, T_M را با روش **PostOrder** پیمایش کنید.

(۲) ریشه R را پردازش کنید.

فرض کنید T درخت عمومی شکل ۵۹-۷ (الف) باشد. (الف) T را با روش **PreOrder** پیمایش کنید.

(ب) T را با روش **PostOrder** پیمایش کنید.

حل: توجه دارید که T ریشه A دارد و زیردرختها T_1, T_2 و T_3 هستند به گونه‌ای که:

T_1 از گره‌های B, C, D و E تشکیل شده است.

T_2 از گره‌های F, G و H تشکیل شده است.

T_3 از گره‌های J, K, L, M, N, P و Q تشکیل شده است.

(الف) پیمایش **PreOrder** درخت T از مرحله‌های زیر تشکیل می‌شود:

(i) ریشه A را پردازش کنید.

(ii) T_1 را با روش **PreOrder** پیمایش کنید: گره‌های B, C, D, E را پردازش کنید.

(iii) T_2 را با روش **PreOrder** پیمایش کنید: گره‌های F, G, H را پردازش کنید.

(iv) T_3 را با روش **PreOrder** پیمایش کنید: گره‌های J, K, L, M, N, P, Q را پردازش کنید.

به بیان دیگر، پیمایش **Preorder** درخت T به شرح زیر است:

$A, B, C, D, E, F, G, H, J, K, L, M, P, Q, N$

(ب) پیمایش **PostOrder** درخت T از مرحله‌های زیر تشکیل می‌شود:

(i) T_1 را با روش **PostOrder** پیمایش کنید: گره‌های B, C, D, E را پردازش کنید.

(ii) T_2 را با روش **PostOrder** پیمایش کنید: گره‌های F, G, H را پردازش کنید.

(iii) T_3 را با روش **PostOrder** پیمایش کنید: گره‌های J, K, L, M, N, P, Q را پردازش کنید.

(iv) ریشه A را پردازش کنید.

به بیان دیگر، پیمایش **Postorder** درخت T به شرح زیر است:

$C, D, E, B, G, H, F, K, L, P, Q, M, N, J, A$

مسئله ۱۸-۷: درخت دودویی T' شکل ۵۹-۷ (ب) را در نظر بگیرید. پیمایش‌های **PreOrder**، **InOrder**

و **PostOrder** درخت T' را تعیین کنید. آنها را با پیمایش‌های **PreOrder** و **PostOrder** به دست آمده در

مسئله ۱۷-۷ درخت عمومی T در شکل ۵۹-۷ (الف) مقایسه کنید.

حل: با استفاده از الگوریتم‌های پیمایش درخت دودویی بخش ۴-۷، پیمایش‌های زیر از T' به دست می‌آید:

Preorder: $A, B, C, D, E, F, G, H, J, K, L, M, P, Q, N$

Inorder: $C, D, E, B, G, H, F, K, L, P, Q, M, N, J, A$

Postorder: $E, D, C, H, G, Q, P, N, M, L, K, J, F, B, A$

ملاحظه می‌کنید که پیمایش PreOrder درخت دودویی T' همان پیمایش PreOrder درخت عمومی T است، همچنین پیمایش InOrder درخت دودویی T' همان پیمایش PostOrder درخت عمومی T است. هیچ پیمایش طبیعی و درخت عمومی برای T وجود ندارد که متناظر با پیمایش PostOrder درخت دودویی T' مربوطه‌اش باشد.

مسئله‌های تکمیلی

درختهای دودویی

مسئله ۷-۱۹: درخت T در شکل ۷-۶۰ (الف) را در نظر بگیرید:

(الف) مقادیر ROOT، LEFT، RIGHT و شکل ۷-۶۰ (ب) را طوری پر کنید که T در حافظه ذخیره خواهد شد.

(ب) مطلوب است تعیین (i) D عمق درخت T (ii) تعداد زیردرختهای خالی یا پوچ و (iii) نسل‌های گره B .

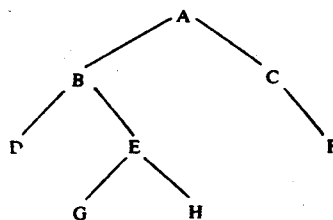
مسئله ۷-۲۰: لیست گره‌های درخت T در شکل ۷-۶۰ (الف) را با روش (۱) PreOrder (۲) InOrder و (۳) PostOrder بنویسید.

	INFO	LEFT	RIGHT
1	A		
2	C		
3	D		
4	G		
5		6	
6		0	
7	H		
8	F		
9	E		
10	B		

ROOT



AVAIL



(ب)

(الف)

شکل ۷-۶۰

مسئله ۷-۲۱: نمودار درخت T در شکل ۷-۶۱ را رسم کنید.

	INFO	LEFT	RIGHT
1	H	4	11
2	R	0	0
3		17	
4	P	0	0
5	B	18	7
6		3	
7	E	1	0
8		6	
9	C	0	10
10	F	15	16
11	Q	0	12
12	S	0	0
13		0	
14	A	5	9
15	K	2	0
16	L	0	0
17		13	
18	D	0	0

ROOT

14

AVAIL

8

شکل ۶۱-۷

مسأله ۲۲-۷: فرض کنید دنباله زیرلیست گره‌های یک درخت دودویی T به ترتیب در پیمایش PreOrder و InOrder باشند:

Preorder: G, B, Q, A, C, K, F, P, D, E, R, H

Inorder: Q, B, K, C, F, A, G, P, E, D, H, R

نمودار درخت را رسم کنید.

مسأله ۲۳-۷: فرض کنید T یک درخت دودویی در حافظه باشد و عنصر اطلاعاتی ITEM داده شده است.

(الف) زیربرنامه‌ای بنویسید که مکان LOC عنصر ITEM را در درخت T پیدا کند. فرض می‌شود عنصرهای درخت T متمایز هستند.

(ب) زیربرنامه‌ای بنویسید که مکان LOC عنصر ITEM و مکان پدر PAR عنصر ITEM را در درخت T پیدا کند.

(ج) زیربرنامه‌ای بنویسید که NUM تعداد دفعات ظاهر شدن عنصر ITEM را در درخت T پیدا کند. فرض می‌شود عنصرهای T الزاماً متمایز نیستند.

توجه کنید: T الزاماً یک درخت جستجوی دودویی نیست.

مسئله ۲۴-۷: فرض کنید T یک درخت دودویی در حافظه باشد. یک زیربرنامه غیربازگشتی برای هر یک از موارد زیر بنویسید:

(الف) تعداد گره‌های درخت T را پیدا کنید.

(ب) D عمق درخت T را پیدا کنید.

(ج) تعداد گره‌های انتهایی درخت T را پیدا کنید.

مسئله ۲۵-۷: فرض کنید T یک درخت دودویی در حافظه باشد. یک زیربرنامه Procedure بنویسید که تمام گره‌های انتهایی درخت T را حذف کند.

مسئله ۲۶-۷: فرض کنید ROOTA به درخت دودویی T_1 در حافظه اشاره می‌کند. یک زیربرنامه Procedure بنویسید که با استفاده از اشاره گر ROOTB، T_1 را در T_2 کپی کند.

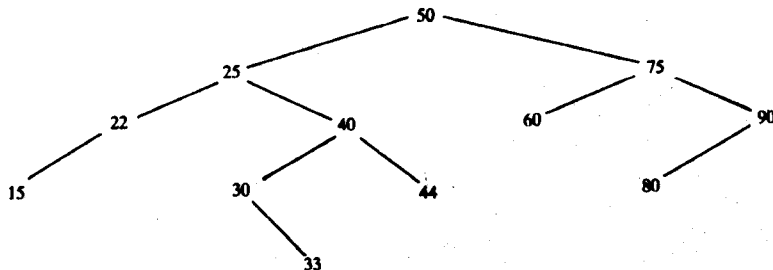
درخت‌های جستجوی دودویی

مسئله ۲۷-۷: فرض کنید هشت عدد زیر به ترتیب به یک درخت جستجوی دودویی خالی T اضافه شده‌اند.

50, 33, 44, 22, 77, 35, 60, 40

درخت را رسم کنید.

مسئله ۲۸-۷: درخت جستجوی دودویی T شکل ۶۲-۷ را در نظر بگیرید:



شکل ۶۲-۷

اگر هر یک از عملیات زیر بر درخت اصلی T اعمال شود، درخت T را رسم کنید. به عبارت دیگر، عملیات به طور مستقل اعمال می شوند نه بطور متوالی.

(الف) گره 20 به درخت T اضافه می شود. (د) گره 22 از درخت T حذف می شود.

(ب) گره 15 به درخت T اضافه می شود. (ه) گره 25 از درخت T حذف می شود.

(ج) گره 88 به درخت T اضافه می شود. (و) گره 75 از درخت T حذف می شود.

مسئله ۷-۲۹: درخت جستجوی دودویی T در شکل ۶۲-۷ را در نظر بگیرید. اگر شش عمل مسئله

۷-۲۸ یکی پس از دیگری (نه بطور مستقل) بر درخت T اعمال شود درخت نهایی T را رسم کنید.

مسئله ۷-۳۰: درخت جستجوی دودویی شکل ۶۳-۷ را رسم کنید.

	INFO	LEFT	RIGHT
ROOT			
4			
AVAIL			
3			
1	Jones	7	0
2	Fox	11	1
3		8	
4	Murphy	2	15
5		13	
6	Thomas	0	0
7	Green	0	0
8		9	
9		10	
10		5	
11	Conroy	0	0
12	Parker	0	0
13		14	
14		0	
15	Rosen	12	6

شکل ۶۳-۷

مسئله ۷-۳۱: درخت جستجوی دودویی T شکل ۶۳-۷ را در نظر بگیرید. اگر هر یک از عملیات زیر

بطور مستقل (نه بطور متوالی) بر درخت T اعمال شود تغییری را که در INFO، LEFT، RIGHT و

ROOT بوجود می آید توضیح دهید.

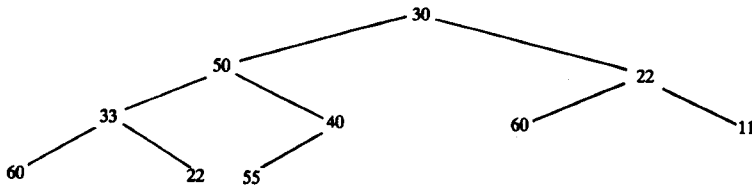
- (الف) Davis به T اضافه می‌شود. (د) Parker از T حذف می‌شود.
 (ب) Harris به T اضافه می‌شود. (ه) Fox از T حذف می‌شود.
 (ج) Smith به T اضافه می‌شود. (و) Murphy از T حذف می‌شود.
 مسأله ۷-۳۲: درخت جستجوی دودویی T شکل ۷-۶۳ را در نظر بگیرید. اگر شش عمل مسأله ۷-۳۱ یکی پس از دیگری (نه بطور مستقل) بر T اعمال شود تغییرات نهایی در RIGHT, LEFT, INFO, ROOT و AVAIL را توضیح دهید.

مسأله‌های متفرقه

- مسأله ۷-۳۳: درخت دودویی T در شکل ۷-۶۰ (الف) را در نظر بگیرید.
 (الف) نخ‌کشی InOrder یکطرفه T را رسم کنید.
 (ب) نخ‌کشی PreOrder یکطرفه T را رسم کنید.
 (ج) نخ‌کشی InOrder دوطرفه T را رسم کنید.
 در هر حالت بالا، چگونگی ذخیره درخت نخ‌کشی شده را در حافظه با استفاده از اطلاعات شکل ۷-۶۰ (ب) نشان دهید.
 مسأله ۷-۳۴: درخت کامل T با $N = 10$ گره در شکل ۷-۶۴ را در نظر بگیرید. فرض کنید یک MaxHeap از درخت کامل T با اعمال

Call INSHEAP(A, J, A[J + 1])

برای $J = 1, 2, \dots, N - 1$ ساخته می‌شود. فرض کنید T بطور متوالی در آرایه A ذخیره می‌شود. MaxHeap نهایی را پیدا کنید.



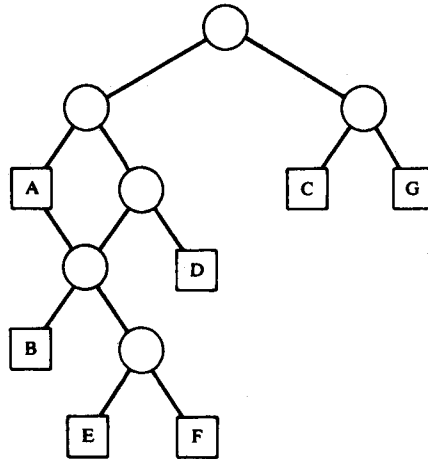
شکل ۷-۶۴

- مسأله ۷-۳۵: مسأله ۷-۳۴ را برای درخت T در شکل ۷-۶۴ حل کنید با این تفاوت که اکنون بدون در نظر گرفتن T یک MinHeap بجای MaxHeap بسازید.
 مسأله ۷-۳۶: ۲- درخت متناظر با هر یک از عبارتهای جبری زیر را رسم کنید:

$$E_1 = (a - 3b)(2x - y)^3 \quad (\text{الف})$$

$$E_2 = (2a + 5b)^3(x - 7y)^4 \quad (\text{ب})$$

مسئله ۳۷-۷: ۲- درخت شکل ۶۵-۷ را در نظر بگیرید.



شکل ۶۵-۷

مطلوب است تعیین کد هافمن هفت حرفی، که در درخت T معین شده است.

مسئله ۳۸-۷: فرض کنید به ۷ عنصر اطلاعاتی A, B, ..., G, و زندهای زیر نسبت داده شده است:

(A, 13), (B, 2), (C, 19), (D, 23), (E, 29), (F, 5), (G, 9)

P طول مسیر وزن داده شده درخت شکل ۶۵-۷ را بدست آورید.

مسئله ۳۹-۷: با استفاده از اطلاعات مسئله ۳۸-۷، یک ۲-درخت با حداقل طول مسیر وزن داده شده P

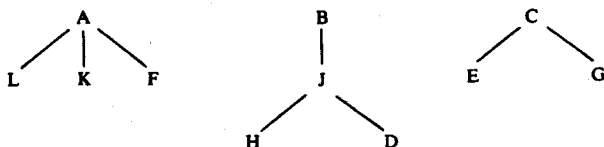
پیدا کنید. برای ۷ حرف، با استفاده از این درخت جدید کد هافمن تعیین کنید.

مسئله ۴۰-۷: جنگل F شکل ۶۶-۷ را در نظر بگیرید که از سه درخت و به ترتیب با ریشه‌های A, B و C

تشکیل شده است.

(الف) درخت دودویی F' متناظر با جنگل F را پیدا کنید.

(ب) مقادیر ROOT و CHILD و SIB شکل ۶۷-۷ را به گونه‌ای پر کنید که F در حافظه ذخیره شود.



شکل ۶۶-۷ جنگل F

ROOT



	INFO	CHILD	SIB
1	A		
2	C		
3	E		
4	G		
5	J		
6	L		
7			
8	K		
9	H		
10	F		
11	D		
12	B		

شکل ۶۷-۷

مسئله ۴۱-۷: فرض کنید T یک درخت کامل با n گره و عمق D باشد. ثابت کنید:

$$2^{D-1} - 1 < n \leq 2^D - 1 \quad \text{(الف)}$$

$$D \approx \log_2 n \quad \text{(ب)}$$

راهنمایی: به ازای $x = 2$ از اتحاد زیر استفاده کنید:

$$1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^n = \frac{x^{n+1} - 1}{x - 1}$$

مسئله ۴۲-۷: فرض کنید T یک درخت دودویی گسترش یافته باشد. ثابت کنید:

(الف) $N_E = N_I + 1$ که در آن N_E تعداد گره‌های خارجی و N_I تعداد گره‌های داخلی است.

(ب) $L_E = L_I + 2n$ که در آن L_E طول مسیر خارجی و L_I طول مسیر داخلی و n تعداد گره‌های داخلی است.

برای مسأله‌های زیر برنامه بنویسید

مسأله‌های ۷-۴۳ تا ۷-۴۷ به درخت T در شکل ۷-۱ مربوط هستند که در حافظه به صورت شکل

۷-۶۸ ذخیره می‌شود.

		INFO	LEFT	RIGHT
ROOTA	1	K	0	0
	2	C	3	6
	3	G	0	0
	4		14	
	5	A	10	2
	6	H	17	1
	7	L	0	0
	8		9	
	9		4	
	10	B	18	13
	11		19	
	12	F	0	0
	13	E	12	0
	14		15	
	15		16	
	16		11	
	17	J	7	0
	18	D	0	0
	19		20	
	20		21	
	21		22	
	22		23	
	23		24	
	24		0	

شکل ۷-۶۸

مسئله ۴۳-۷: برنامه‌ای بنویسید که گره‌های شکل ۶۸-۷ را با روش (الف) PreOrder (ب) InOrder و (ج) PostOrder چاپ کند.

مسئله ۴۴-۷: برنامه‌ای بنویسید که گره‌های انتهایی T را با روش (الف) PreOrder (ب) InOrder و (ج) PostOrder چاپ کند.

توجه کنید: هر سه لیست باید عین! هم باشند.

مسئله ۴۵-۷: برنامه‌ای بنویسید که با استفاده از ROOTB به عنوان یک اشاره‌گر یک کپی از T بنام T' بسازد. با چاپ گره‌های T' با روش PreOrder و InOrder و مقایسه آن با لیستهایی که در مسئله ۴۳-۷ بدست آمد برنامه را آزمایش کنید.

مسئله ۴۶-۷: HeapSort را به صورت زیر برنامه‌ای HEAPSORT(A, N) بنویسید که آرایه A با N عنصر را مرتب کند. برنامه را با استفاده از داده‌های زیر آزمایش کنید:

(الف) 44, 33, 11, 55, 77, 90, 40, 60, 99, 22, 88, 66

(ب) D, A, T, A, S, T, R, U, C, T, U, R, E, S

مسئله‌های ۴۷-۷ تا ۵۲-۷ به لیست رکوردهای کارمندان مربوط می‌شوند که به صورت شکل ۸-۷ یا به صورت شکل ۶۹-۷ ذخیره می‌شوند.

	NAME	SSN	SEX	SALARY	LEFT	RIGHT	
HEAD	1				0		
5	2	Davis	192-38-7282	Female	22 800	5	12
AVAIL	3	Kelly	165-64-3351	Male	19 000	5	5
8	4	Green	175-56-2251	Male	27 200	2	5
	5				14	5	
	6	Brown	178-52-1065	Female	14 700	5	5
	7	Lewis	181-58-9939	Female	16 400	3	10
	8				11		
	9	Cohen	177-44-4557	Male	19 000	6	4
	10	Rubin	135-46-6262	Female	15 500	5	5
	11				13		
	12	Evans	168-56-8113	Male	34 200	5	5
	13				1		
	14	Harris	208-56-1654	Female	22 800	9	7

شکل ۶۹-۷

هر یک از آنها یک درخت جستجوی دودویی نسبت به کلید NAME است اما شکل ۶۹-۷ از یک سر گره استفاده می‌کند که به عنوان یک نگهبان نیز عمل می‌کند. این مسأله را با مسأله‌های ۴۱-۵ تا ۴۶-۵ فصل ۵ مقایسه کنید.

مسأله ۴۷-۷: برنامه‌ای بنویسید که لیست رکوردهای کارمندان را به ترتیب الفبایی چاپ کند. راهنمایی: رکوردها را با روش InOrder چاپ کنید.

مسأله ۴۸-۷: برنامه‌ای بنویسید که نام NNN یک کارمند را بخواند و رکورد کارمند را چاپ کند. برنامه را با استفاده از (الف) Evans، (ب) Smith و (ج) Lewis آزمایش کنید.

مسأله ۴۹-۷: برنامه‌ای بنویسید که شماره تأمین اجتماعی SSS یک کارمند را از ورودی بخواند و رکورد کارمند را چاپ کند. برنامه را با استفاده از (الف) 3351 - 64 - 165، (ب) 6262 - 46 - 135 و (ج) 5555 - 44 - 177 آزمایش کنید.

مسأله ۵۰-۷: برنامه‌ای بنویسید که عدد صحیح K را از ورودی بخواند و نام هر کارمند مرد را وقتی که $K = 1$ یا نام هر کارمند زن را وقتی $K = 2$ است چاپ کند. برنامه را با استفاده از (الف) $K = 2$ ، (ب) $K = 5$ و (ج) $K = 1$ آزمایش کنید.

مسأله ۵۱-۷: برنامه‌ای بنویسید که نام NNN یک کارمند را بخواند و رکورد کارمند را از این ساختمان حذف کند. برنامه را با استفاده از (الف) Davis، (ب) Jones و (ج) Rubin آزمایش کنید.

مسأله ۵۲-۷: برنامه‌ای بنویسید که رکورد یک کارمند جدید را بخواند و رکورد را در فایل اضافه کند. برنامه را با استفاده از:

(الف) Fletcher; 168 - 52 - 3388; Female; 21 000

(ب) Nelson; 175 - 32 - 2468; Male; 19 000

اجرا کنید.

فصل ۸

گرافها و کاربردهای آن

۸-۱ مقدمه

این فصل یکی دیگر از ساختمان داده غیرخطی، موسوم به گراف را مورد بررسی قرار می دهد. همانند روشی که در مورد دیگر ساختمان داده ها بکار برده ایم، در مورد گرافها نیز ابتدا روش نمایش آنها را در حافظه توضیح می دهیم و سپس عملیات و الگوریتم های متعدد روی آنها را بررسی می کنیم. به خصوص، جستجوی عرضی یا ردیفی و جستجوی عمقی گرافها را مورد بحث و بررسی قرار می دهیم. کاربردهای متعدد گرافها به همراه روش های مرتب سازی موضعی نیز، دیگر مطالب این فصل را تشکیل می دهد.

۸-۲ چند اصطلاح نظریه گراف

در این بخش بطور خلاصه برخی از اصطلاحات اصلی نظریه گراف ارائه می شود. متأسفانه باید گفت که هیچ اصطلاح استاندارد در نظریه گراف وجود ندارد. از این رو به دانشجویان اطلاع می دهیم که تعریف های ارائه شده در این کتاب ممکن است با تعریف هایی که در دیگر کتب ساختمان داده ها و نظریه گراف ارائه می شود اندکی متفاوت باشد.

گرافها و گرافهای چندگانه

یک گراف G از دو مجموعه زیر تشکیل می‌شود:

(۱) مجموعه‌ای از عناصر که گره‌ها یا نقاط یا رأس‌ها نامیده می‌شود.

(۲) E مجموعه‌ای از یال‌ها طوری که هر یال e در E به وسیله یک جفت منحصر بفرد (نامرتب)

$[u, v]$ از گره‌ها در V مشخص می‌شود و آن را با $e = [u, v]$ نشان می‌دهند.

گاهی اوقات قسمت‌هایی از یک گراف را به صورت $G = (V, E)$ بیان می‌کنند.

فرض کنید $e = [u, v]$ ، آنگاه گره‌های u و v نقاط پایانی e نامیده می‌شود همچنین به u و v گره‌های مجاور یا همسایه می‌گویند. درجه گره u که به صورت $\deg(u)$ نوشته می‌شود تعداد یال‌هایی است که شامل u می‌شوند. اگر $\deg(u) = 0$ یعنی اگر u به هیچ یالی تعلق نداشته باشد آنگاه u را گره منفرد می‌نامند.

یک مسیر P با طول n از یک گره u به گره v به صورت دنباله‌ای از $n+1$ گره تعریف می‌شود.

$$P = (v_0, v_1, v_2, \dots, v_n)$$

طوری که $u = v_0$ ؛ v_1, \dots, v_n به‌ازای $i = 1, 2, \dots, n$ مجاور v_{i-1} و $v_n = v$ است. مسیر P را بسته گویند اگر $v_0 = v_n$. مسیر P را ساده گویند اگر تمام گره‌های آن متمایز باشند با این تفاوت که v_0 ممکن است با v_n یکی باشد یعنی P ساده است اگر گره‌های $v_0, v_1, \dots, v_{n-1}, v_n$ متمایز و نیز گره‌های v_1, v_2, \dots, v_n متمایز باشند.

یک دور یا حلقه مسیر ساده بسته‌ای به طول ۳ یا بیشتر است. یک دور به طول K را K دور یا K حلقه گویند. گراف G را همبند گویند اگر بین هر دو گره آن مسیری وجود داشته باشد. در مسأله ۱۸-۸ نشان خواهیم داد که اگر از گره u به گره v یک مسیر وجود داشته باشد آنگاه پس از حذف یال‌های غیر ضروری، می‌توان یک مسیر ساده Q از u به v بدست آورد. بنابراین می‌توان قضیه زیر را بیان کرد.

قضیه ۱-۸: گراف G همبند است اگر و فقط اگر یک مسیر ساده بین هر دو گره G وجود داشته باشد.

گراف G را کامل گویند اگر هر گره u در G مجاور هر گره دیگر v در G باشد، واضح است که چنین گرافی همبند است. گراف کامل با n گره، $n(n-1)/2$ یال دارد. گراف کامل T بدون هیچ دور یا حلقه را یک گراف درختی یا درخت آزاد یا تنها یک درخت می‌گویند. در حالت خاص معنی آن، این است که یک مسیر ساده منحصر بفرد بین هر دو گره u و v در T (مسأله ۱۸-۸) وجود دارد. علاوه بر این، اگر T یک درخت متناهی با m گره باشد آنگاه T دارای $m-1$ یال است (مسأله ۲۰-۸ را ببینید).

گراف G را شماره‌دار یا برچسب‌دار گویند اگر اطلاعاتی به یال‌های آن نسبت داده شود. به‌ویژه، گراف

G را وزن داده شده گویند اگر به هر یال e در G یک مقدار عددی غیر منفی $w(e)$ که وزن یا طول e نامیده می شود نسبت داده شود. در چنین حالتی به هر مسیر P در G یک وزن یا طول نسبت داده می شود که وزن یا طول مسیر P ، مجموع وزن یالهایی است که در این مسیر قرار دارند. اگر در مورد وزن ها هیچ اطلاع دیگری داده نشود می توان فرض کرد که گراف G وزن داده شده است یعنی به هر یال e از گراف G ، وزن $w(e) = 1$ نسبت داده شده است.

تعریف گراف را می توان با مجاز دانستن تعریف های زیر تعمیم داد:

(۱) یالهای چندگانه. یالهای متمایز e و e' را یالهای چندگانه گویند اگر نقاط پایانی یکسانی را به هم وصل کنند یعنی اگر $e = [u, v]$ و $e' = [u, v]$.

(۲) حلقه ها. یال e را حلقه گویند اگر نقاط انتهایی یکسانی داشته باشد یعنی اگر $e = [u, u]$ چنین تعمیمی M را گراف چندگانه یا چند گراف گویند. به بیان دیگر، تعریف یک گراف معمولاً یالهای چندگانه یا حلقه ها را مجاز نمی داند.

یک گراف چندگانه M را متناهی گویند اگر تعداد گره ها و تعداد یالهای آن متناهی باشد. ملاحظه می کنید که یک گراف G با تعداد گره های متناهی باید خود به خود تعداد یالهای متناهی داشته باشد و از این رو باید متناهی باشد اما این مطلب الزاماً در مورد یک گراف چندگانه M برقرار نیست چون M ممکن است یالهای چندگانه داشته باشد. در این کتاب گرافها و گرافهای چندگانه متناهی خواهند بود مگر آن که خلاف آن بیان شود.

مثال ۸-۱

(الف) شکل ۸-۱ (الف)، نمودار یک گراف همبند با ۵ گره A, B, C, D و E و ۷ یال

$$[A, B], [B, C], [C, D], [D, E], [A, E], [C, E], [A, C]$$

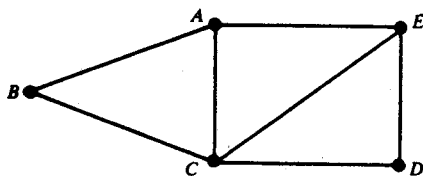
می باشد از B به E دو مسیر ساده به طول ۲ وجود دارد: (B, A, E) و (B, C, E) از B به D تنها یک مسیر ساده به طول ۲ وجود دارد: (B, C, D) یادآوری می کنیم که (B, A, D) مسیر نیست چون $[A, D]$ یال نیست. در این گراف دو دور یا ۴ حلقه وجود دارد:

$$[A, C, D, E, A] \text{ و } [A, B, C, E, A]$$

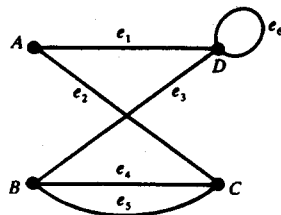
توجه دارید که $\deg(A) = 3$ ، چون A به ۳ یال تعلق دارد. بطور مشابه، $\deg(C) = 4$ و $\deg(D) = 2$.

(ب) شکل ۸-۱ (ب) یک گراف نیست اما یک گراف چندگانه است چون یالهای چندگانه $e_4 = B, C]$ و $e_5 = [B, C]$ دارد و یک حلقه $e_6 = [D, D]$ دارد. تعریف یک گراف معمولاً یالهای چندگانه یا حلقه ها را مجاز نمی داند.

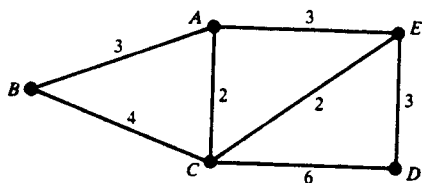
(ج) شکل ۸-۱ (ج) یک گراف درختی با $m = 6$ گره است و در نتیجه، $m - 1 = 5$ یال دارد. دانشجو می‌تواند تحقیق کند که بین هر دو گره یک گراف درختی تنها یک مسیر ساده وجود دارد.



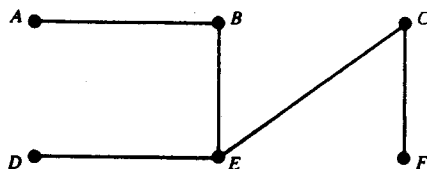
(ب)



(الف)



(د) گراف وزن داده‌شده



(ج)

شکل ۸-۱

(د) شکل ۸-۱ (د) همان گراف شکل ۸-۱ (الف) است با این تفاوت که اکنون گراف وزن داده شده، است. ملاحظه می‌کنید که $P_1 = (B, C, D)$ و $P_2 = (B, A, E, D)$ هر دو مسیرهایی از گره B به گره D هستند. اگرچه P_2 شامل یالهای بیشتری از P_1 است، اما وزن $w(P_2) = 9$ کمتر از وزن $w(P_1) = 10$ است.

گرافهای جهت‌دار

گراف جهت‌دار G که یک دایگراف $DiGraph$ یا گراف نیز نامیده می‌شود همان گراف چندگانه است با این تفاوت که به هر یال e در G یک جهت نسبت داده می‌شود، به بیان دیگر، هر یال e به عوض زوج نامرتب $\{u, v\}$ ؛ یک زوج مرتب (u, v) از گره‌ها در G مشخص می‌شود.

فرض کنید G یک گراف جهت‌دار با یال جهت داده‌شده $e = (u, v)$ باشد. آنگاه e نیز یک کمان نامیده می‌شود. علاوه بر این، اصطلاحات زیر مورد استفاده قرار می‌گیرد:

(۱) e با u شروع می‌شود و با v پایان می‌یابد.

(۲) u مبدأ یا نقطه اولیه e و v مقصد یا نقطه انتهایی e نامیده می‌شود.

(۳) u گره قبلی v و v گره بعدی یا همسایه u نامیده می شود.

(۴) u مجاور v و همچنین v مجاور u است.

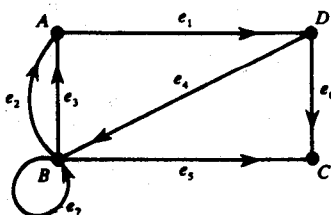
درجه خروجی گره u در G که به صورت $\text{outdeg}(u)$ ، نوشته می شود تعداد یال هایی است که با u شروع می شود. به همین ترتیب، درجه ورودی u که به صورت $\text{indeg}(u)$ نوشته می شود تعداد یال هایی است که با u به پایان می رسند. گره u یک گره متبوع نامیده می شود اگر درجه خروجی مثبت داشته باشد و درجه ورودی اش صفر باشد. به همین ترتیب، گره u یک چاه نامیده می شود اگر درجه خروجی صفر و درجه ورودی مثبت داشته باشد.

مفاهیم مسیر، مسیر ساده و دور یا حلقه از گرافهای بدون جهت، به گرافهای جهت دار قابل انتقال است با این تفاوت که اکنون جهت هر یال در یک مسیر (دور) باید با جهت مسیر (دور) سازگار باشد. گره v از گره u قابل دسترس نامیده می شود اگر از u به v یک مسیر (جهت دار) وجود داشته باشد. گراف جهت دار G را همبند یا همبند قوی گویند اگر برای هر زوج u, v از گره ها در G هم یک مسیر از u به v و هم یک مسیر از v به u وجود داشته باشد. از طرف دیگر، گراف G را همبند یکطرفه گویند اگر برای هر زوج u, v از گره ها در G ، یک مسیر از u به v یا یک مسیر از v به u وجود داشته باشد.

مثال ۲-۸

شکل ۲-۸ گراف جهت دار G با ۴ گره و ۷ یال (جهت دار) را نشان می دهد. یالهای e_2 و e_3 را موازی گویند چون هر یک از این یالها با B شروع می شوند و با A به پایان می رسند. یال e_7 یک حلقه نامیده می شود چون نقطه شروع و پایان آن تنها یک نقطه B است.

دنباله $P_1 = (D, C, B, A)$ مسیر نیست چون (C, B) یک یال نیست یعنی جهت یال $e_5 = (B, C)$ با جهت مسیر P_1 سازگار نیست. از طرف دیگر، $P_2 = (D, B, A)$ یک مسیر از D به A است چون (D, B) و (B, A) دو یال هستند. بنابراین A از D قابل دسترس است. از C تا هر گره دیگر هیچ مسیری وجود ندارد، بنابراین G همبند قوی نیست. با وجود این، G همبند یکطرفه نامیده می شود. توجه دارید که $\text{indeg}(D) = 1$ و $\text{outdeg}(D) = 2$ گره C یک چاه است چون $\text{indeg}(C) = 2$ اما $\text{outdeg}(C) = 0$. هیچ گره ای در G متبوع نیست.



شکل ۲-۸

فرض کنید T گراف درختی غیرتهی باشد. فرض کنید گره دلخواه R در T انتخاب شده است. آنگاه T با گره خاص R ، یک درخت ریشه‌دار نامیده می‌شود و به R ریشه درخت می‌گویند. یادآور می‌شویم که یک مسیر ساده یکتا از ریشه R به هر گره دیگر در درخت وجود دارد. این امر یک جهت به یالهای درخت T می‌دهد، بنابراین درخت ریشه‌دار T را می‌توان به صورت یک گراف جهت‌دار مورد توجه قرار داد. علاوه بر این، فرض کنید گره‌های بعدی هر گره v در T نیز مرتب هستند. آنگاه T را یک درخت ریشه‌دار مرتب گویند. درختهای ریشه‌دار مرتب نکات قابل توجه بیشتری نسبت به درختهای عمومی که در فصل ۷ مورد بررسی قرار گرفت ندارند.

گراف جهت‌دار G را ساده گویند هرگاه G هیچ یال موازی نداشته باشد. گراف ساده G می‌تواند حلقه داشته باشد، اما در یک گره معین نمی‌تواند بیش از یک حلقه داشته باشد. یک گراف بدون جهت G را می‌توان به صورت یک گراف جهت‌دار ساده مورد توجه قرار داد، مشروط بر این که هر یال $[u, v]$ در G دو یال جهت‌دار (u, v) و (v, u) را نمایش دهد. ملاحظه می‌کنید که ما از نماد $[u, v]$ استفاده می‌کنیم تا یک زوج نامرتب را نمایش دهیم و نماد (u, v) برای نمایش یک زوج مرتب بکار می‌رود. توجه کنید: موضوع اصلی مطالب این فصل را گرافهای جهت‌دار ساده تشکیل می‌دهد. بنابراین، منظور از اصطلاح "گراف"، گراف جهت‌دار ساده است و منظور از اصطلاح "یال"، یال جهت‌دار است مگر آن که خلاف آن به صورت صریح یا ضمنی بیان شود.

۳-۸ نمایش ترتیبی گرافها، ماتریس مجاورت، ماتریس مسیر

دو روش استاندارد برای نگهداری گراف G در حافظه کامپیوتر وجود دارد. یک روش که نمایش ترتیبی G نامیده می‌شود به وسیله ماتریس مجاورت A انجام می‌شود. روش دیگر که نمایش پیوندی G نامیده می‌شود، به وسیله لیستهای پیوندی از گره‌های مجاور انجام می‌شود. این بخش نمایش اول را دربر دارد که چگونگی استفاده از ماتریس مجاورت A را نشان می‌دهد و به کمک آن می‌توان به سادگی به بسیاری از سئوالات در رابطه با G جواب داد. نمایش پیوندی گراف G در بخش ۵-۸ گنجانده شده است. صرفنظر از روشی که برای نگهداری گراف G در حافظه کامپیوتر بکار می‌رود، معمولاً گراف G را با استفاده از تعریف رسمی آن که مجموعه‌ای از گره‌ها و مجموعه‌ای از یالها است به کامپیوتر وارد می‌کنند.

ماتریس مجاورت یا همسایگی

فرض کنید G یک گراف جهت‌دار ساده با m گره باشد، همچنین فرض کنید گره‌های G مرتب شده‌اند و v_1, v_2, \dots, v_m نامیده می‌شوند. آنگاه ماتریس مجاورت (همسایگی) $A(g)$ گراف G ماتریس $m \times m$

ای است که به صورت زیر تعریف می شود:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{اگر } v_i \text{ مجاور } v_j \text{ باشد یعنی اگر یال } (v_i, v_j) \text{ وجود داشته باشد.} \\ 0 & \text{در غیر اینصورت} \end{cases}$$

به ماتریس A که درایه های آن تنها از 0 و 1 تشکیل می شود ماتریس بیتی یا ماتریس بولین **Boolean** می گویند.

در ماتریس مجاورت A از گراف G ، ترتیب گره های G حائز اهمیت است یعنی ترتیب مختلف گره ها ممکن است منتهی به ماتریس مجاورت مختلف شود. با وجود این، ماتریسهای حاصل از دو ترتیب مختلف ارتباط بسیار نزدیکی با هم دارند، به این معنی که تنها با جابجایی سطرها و ستون ها از یکی از ماتریسها می توان ماتریس دیگر را بدست آورد. قرارداد می کنیم که گره های گراف G ، ترتیب ثابت و مشخص دارند مگر آن که خلاف آن بیان شود.

فرض کنید G یک گراف بدون جهت باشد. آنگاه ماتریس مجاورت A از گراف G یک ماتریس متقارن خواهد بود یعنی در این ماتریس به ازای تمام i و j ، $a_{ij} = a_{ji}$. این مطلب از این واقعیت ناشی می شود که هر یال بدون جهت $[u, v]$ متناظر با دو یال جهت دار (u, v) و (v, u) است.

نمایش ماتریسی بالا از یک گراف را می توان به گرافهای چندگانه تعمیم داد. بطور مشخص، اگر G یک گراف چندگانه باشد آنگاه ماتریس مجاورت G ماتریس $m \times m$ ای مانند $A = (a_{ij})$ است که با قراردادن تعداد یالها از v_i به v_j به جای a_{ij} تعریف می شود.

مثال ۳-۸

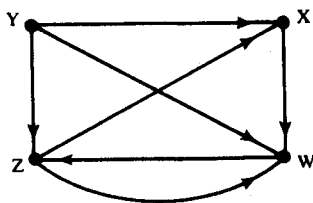
گراف G در شکل ۳-۸ را در نظر بگیرید. فرض کنید که گره ها در آرایه خطی **DATA** به صورت زیر در حافظه ذخیره شده اند.

DATA: X, Y, Z, W

آنگاه فرض می کنیم که ترتیب گره ها در G به قرار زیرند $v_3 = Z$ ، $v_2 = Y$ ، $v_1 = X$ و $v_4 = W$.
 A ماتریس مجاورت گراف G چنین است:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

توجه دارید تعداد 1 ها در A برابر تعداد یالهای گراف G است.



شکل ۳-۸

توان های A, A^2, A^3, \dots از ماتریس مجاورت A گراف G را در نظر بگیرید. فرض کنید

$$a_k(i, j) = A^k \text{ درایه } ij \text{ ام ماتریس}$$

ملاحظه می کنید که $a_1(i, j) = a_{ij}$ تعداد مسیرهای به طول 1 از گره i به j را به دست می دهد. می توان نشان داد که $a_2(i, j)$ تعداد مسیرهای به طول 2 از i به j به دست می آید. در واقع در مسأله ۱۹-۸ نتیجه کلی زیر را ثابت می کنیم:

قضیه ۲-۸: فرض کنید A ماتریس مجاورت گراف G باشند. آنگاه $a_k(i, j)$ درایه ij ام ماتریس A^k تعداد مسیرهایی از i به j را به دست می دهد که طول K دارند.

بار دیگر گراف G شکل ۳-۸ را در نظر بگیرید که ماتریس مجاورت A ی آن در مثال ۳-۸ داده شده است. توان های A^2, A^3 و A^4 ماتریس A به شرح زیر است:

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad A^4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

بنابراین در حالت خاص، یک مسیر از v_4 به v_1 با طول 2 وجود دارد، دو مسیر از v_2 به v_3 با طول 3 وجود دارد و سه مسیر از v_2 به v_4 با طول 4 طول وجود دارد. در اینجا $v_3 = Z, v_2 = Y, v_1 = X, v_4 = W$. فرض کنید اکنون ماتریس B_r را به صورت زیر تعریف کرده ایم:

$$B_r = A + A^2 + A^3 + \dots + A^r$$

آنگاه درایه ij ام ماتریس B_r تعداد مسیرهای به طول r یا کمتر از r را از گره i به j محاسبه می کند.

ماتریس مسیر

فرض کنید G یک گراف جهت دار ساده با m گره v_1, v_2, \dots, v_m باشد. ماتریس مسیر یا ماتریس

دسترسی گراف G ماتریس m مربعی $P = (P_{ij})$ است که به صورت زیر تعریف می شود:

$$P_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{اگر یک مسیر از } v_i \text{ به } v_j \text{ وجود داشته باشد} \\ 0 & \text{در غیر اینصورت} \end{cases}$$

فرض کنید یک مسیر از v_i به v_j وجود دارد. آنگاه باید یک مسیر از v_i به v_j وجود داشته باشد که $v_i \neq v_j$ یا باید یک دور از v_i به v_j وجود داشته باشد که $v_i = v_j$. چون G تنها m گره دارد. چنین مسیر ساده‌ای باید طول $m - 1$ یا کمتر داشته باشد یا چنین دوری باید طول m یا کمتر داشته باشد. به بیان دیگر یک درایه l_2 غیر صفر در ماتریس B_m وجود داشته باشد که در پایان بخش قبل تعریف شده است. بنابراین، بین ماتریس مسیر P و ماتریس مجاورت A رابطه زیر برقرار است:

قضیه ۳-۸: فرض کنید A ماتریس مجاورت و $P = (p_{ij})$ ماتریس مسیر دایگراف G باشد. آنگاه $p_{ij} = 1$ اگر و تنها اگر یک عدد غیر صفر در درایه l_2 از ماتریس وجود داشته باشد:

$$B_m = A + A^2 + A^3 + \dots + A^m$$

گراف G را با $m = 4$ گره در شکل ۳-۸ در نظر بگیرید. با جمع ماتریسهای A ، A^2 ، A^3 و A^4 ، ماتریس B_4 زیر بدست می‌آید و اگر به جای درایه‌های غیر صفر B_4 عدد 1 را قرار دهیم ماتریس مسیر P گراف G بدست می‌آید:

$$B_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 5 & 0 & 6 & 8 \\ 3 & 0 & 3 & 5 \\ 2 & 0 & 3 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{و} \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

با مطالعه و بررسی ماتریس P ، ملاحظه می‌کنید که به گره v_2 از طریق هیچ گره دیگری نمی‌توان دسترسی پیدا کرد.

یادآوری می‌کنیم که گراف جهت‌دار G همبند قوی است اگر برای هر زوج گره u و v در G ، هم یک مسیر از u به v و هم یک مسیر از v به u وجود داشته باشد. بنابراین G همبند قوی است اگر و فقط اگر ماتریس مسیر P از G درایه غیر صفر داشته باشد. بدین ترتیب گراف G در شکل ۳-۸ متصل قوی نیست. بستگی تراگذری گراف G بنابه تعریف گراف G' است به طوری که G' دارای همان گره‌های گراف G بوده و یک یال (v_i, v_j) در G' وجود داشته باشد هرگاه در G یک مسیر از v_i به v_j موجود باشد. بنابراین ماتریس مسیر P از گراف G دقیقاً ماتریس مجاورت بستگی تراگذری آن G' است. علاوه بر این گراف G همبند قوی است اگر و فقط بستگی تراگذری آن یک گراف کامل باشد.

توجه کنید: ماتریس مجاورت A و ماتریس مسیر P از گراف G را می‌توان به صورت ماتریسهای منطقی یا بولین مورد بررسی قرار داد که در آن 0 نمایشگر False و 1 نمایشگر True است. بنابراین، عملیات منطقی \vee (OR) و \wedge (AND) را می‌توان بر درایه‌های ماتریس A و P اعمال کرد. مقادیر ۷ و ۸ در شکل

۴-۸ ظاهر شده است. از این عملیات در بخش بعد استفاده خواهد شد.

v	0	1
0	0	1
1	1	1

OR.

(ب)

^	0	1
0	0	0
1	0	1

AND.

(الف)

شکل ۴-۸

۴-۸ الگوریتم وارشال، کوتاهترین مسیر

فرض کنید G یک گراف جهت‌دار با m گره v_1, v_2, \dots, v_m باشد. فرض کنید بخواهیم ماتریس مسیر P از گراف G را پیدا کنیم. برای این منظور، وارشال الگوریتمی ارائه داد که بسیار کاراتر و مؤثرتر از محاسبه توانهای مختلف ماتریس مجاورت A و استفاده از قضیه ۳-۸ است. الگوریتم وارشال در این بخش توضیح داده می‌شود و وقتی گراف G وزن داده شده باشد از الگوریتم مشابهی برای تعیین کوتاهترین مسیر در G استفاده می‌شود.

نخست ماتریسهای بولین m مربعی P_0, P_1, \dots, P_m را به صورت زیر تعریف می‌کنیم. فرض کنید $P_k[i, j]$ نمایش درایه i از ماتریس P_k باشد. بدین ترتیب تعریف می‌کنیم:

$$P_k[i, j] = \begin{cases} 1 & \text{اگر یک مسیر ساده از } v_i \text{ به } v_j \text{ وجود داشته باشد که از هیچ گره دیگر بجز احتمالاً } v_1, v_2, \dots, v_k \text{ استفاده نمی‌کند.} \\ 0 & \text{در غیر اینصورت} \end{cases}$$

به عبارت دیگر:

$$\begin{aligned} P_0[i, j] &= 1 && \text{اگر یک یال از } v_i \text{ به } v_j \text{ وجود داشته باشد.} \\ P_1[i, j] &= 1 && \text{اگر یک مسیر ساده از } v_i \text{ به } v_j \text{ وجود داشته باشد که از هیچ گره دیگر بجز احتمالاً } v_1 \text{ استفاده نمی‌کند.} \end{aligned}$$

$$P_2[i, j] = 1 \quad \text{اگر یک مسیر ساده از } v_i \text{ به } v_j \text{ وجود داشته باشد که از هیچ گره دیگر بجز احتمالاً } v_1 \text{ و } v_2 \text{ استفاده نمی‌کند.}$$

نخست ملاحظه کنید که ماتریس $P_0 = A$ ، ماتریس مجاورت G است. علاوه بر این، چون G تنها m گره دارد، ماتریس آخر $P_m = P$ ماتریس مسیر G است.

وارشال ملاحظه کرد که $P_k[i, j]$ تنها وقتی می تواند اتفاق بیفتد که یکی از دو حالت زیر روی دهد:

(۱) یک مسیر ساده از v_i به v_j وجود دارد که در آن از هیچ گره دیگر بجز احتمالاً v_1, v_2, \dots, v_{k-1} استفاده نمی کند. از این رو

$$P_{k-1}[i, j] = 1$$

(۲) یک مسیر ساده از v_i به v_k و یک مسیر ساده از v_k به v_j وجود دارد که در آن از هیچ گره دیگر بجز احتمالاً v_1, v_2, \dots, v_{k-1} استفاده نمی کند. از این رو

$$P_{k-1}[k, j] = 1 \text{ و } P_{k-1}[i, k] = 1$$

این دو حالت به ترتیب در شکل ۵-۸ (الف) و (ب) به تصویر درآمده است که در آن

→ ... →

نمایش قسمتی از مسیر ساده است که در آن از هیچ گره دیگر بجز احتمالاً v_1, v_2, \dots, v_{k-1} استفاده نمی کند.

$v_i \rightarrow \dots \rightarrow v_k \rightarrow \dots \rightarrow v_j$

(ب)

$v_i \rightarrow \dots \rightarrow v_j$

(الف)

شکل ۵-۸

بنابراین، عناصر ماتریس P_k را می توان از

$$P_k[i, j] = P_{k-1}[i, j] \vee (P_{k-1}[i, k] \wedge P_{k-1}[k, j])$$

به دست آورد که در آن از عملگرهای منطقی \vee (OR) و \wedge (AND) استفاده می کنیم. به بیان دیگر، هر درایه ماتریس P_k را می توان تنها با نگاه سریع به سه درایه ماتریس P_{k-1} به دست آورد. الگوریتم وارشال به شرح زیر است:

Algorithm 8.1: (Warshall's Algorithm) A directed graph G with M nodes is maintained in memory by its adjacency matrix A . This algorithm finds the (Boolean) path matrix P of the graph G .

1. Repeat for $I, J = 1, 2, \dots, M$: [Initializes P .]
 If $A[I, J] = 0$, then: Set $P[I, J] := 0$;
 Else: Set $P[I, J] := 1$.
 [End of loop.]
2. Repeat Steps 3 and 4 for $K = 1, 2, \dots, M$: [Updates P .]
3. Repeat Step 4 for $I = 1, 2, \dots, M$:
4. Repeat for $J = 1, 2, \dots, M$:
 Set $P[I, J] := P[I, J] \vee (P[I, K] \wedge P[K, J])$.
 [End of loop.]
 [End of Step 3 loop.]
5. [End of Step 2 loop.]
5. Exit.

الگوریتم کوتاهترین مسیر

فرض کنید G یک گراف جهت‌دار با m گره v_1, v_2, \dots, v_m ، فرض کنید G وزن داده شده باشد. به عبارت دیگر فرض کنید به هر یال e از G یک عدد غیرمنفی $w(e)$ نسبت داده می‌شود که وزن یا طول یال e نامیده می‌شود. آنگاه G را می‌توان به وسیله ماتریس وزن آن $W = (w_{ij})$ که به صورت زیر تعریف می‌شود در حافظه نگهداری کرد.

$$w_{ij} = \begin{cases} w(e) & \text{اگر از } v_i \text{ به } v_j \text{ یک یال } e \text{ وجود داشته باشد.} \\ 0 & \text{اگر هیچ یالی از } v_i \text{ به } v_j \text{ وجود نداشته باشد.} \end{cases}$$

ماتریس مسیر P به ما می‌گوید آیا مسیرهایی بین گره‌ها وجود دارد یا خیر. اکنون مایلیم ماتریس Q را پیدا کنیم که به ما طول‌های کوتاهترین مسیرها را بین گره‌ها می‌دهد یا به بیان دیگر ماتریس $Q = (q_{ij})$ را می‌دهد که در آن

$$q_{ij} = \text{طول کوتاهترین مسیر از } v_i \text{ به } v_j$$

بعد تغییری در الگوریتم وارشال ایجاد می‌کنیم که ماتریس Q را پیدا می‌کند.

در اینجا دنباله‌ای از ماتریسهای Q_0, Q_1, \dots, Q_m را تعریف می‌کنیم (مشابه ماتریسهای P_0, P_1, \dots, P_m بالا) که درایه‌های آن به صورت زیر تعریف می‌شود:

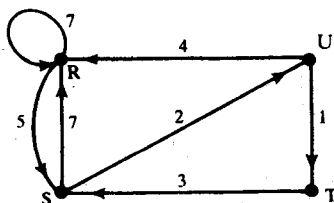
$$Q_k[i, j] = \text{کوچکترین طول مسیر قبل از } v_i \text{ به } v_j \text{ یا مجموع طول‌های}$$

$$\text{مسیرهای قبلی از } v_i \text{ به } v_k \text{ و از } v_k \text{ به } v_j$$

به بیان دقیق‌تر:

$$Q_k[i, j] = \min(Q_{k-1}[i, j], \quad Q_k[i, k] + Q_{k-1}[k, j])$$

ماتریس اولیه Q_0 ماتریس وزن W است با این تفاوت که در آن به جای بینهایت یا ∞ (یا هر عدد بسیار بزرگ)، عدد صفر جایگزین می‌شود. ماتریس نهایی Q_m ماتریس موردنظر Q خواهد بود.



شکل ۸-۶

مثال ۸-۴

گراف وزن داده شده G در شکل ۸-۶ را در نظر بگیرید. فرض کنید $v_1 = R, v_2 = S, v_3 = T$ و

$U = v_4$. آنگاه W ماتریس وزن G به صورت زیر است:

$$W = \begin{pmatrix} 7 & 5 & 0 & 0 \\ 7 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

با اعمال تغییر در الگوریتم وارشال، ماتریسهای Q_0, Q_1, Q_2, Q_3 و $Q_4 = Q$ به دست می‌آید. در طرف راست هر ماتریس Q_k ، ماتریس مسیرها را نشان می‌دهیم که متناظر با طول‌های ماتریس Q_k است.

$$Q_0 = \begin{pmatrix} 7 & 5 & \infty & \infty \\ 7 & \infty & \infty & 2 \\ \infty & 3 & \infty & \infty \\ 4 & \infty & 1 & \infty \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} RR & RS & - & - \\ SR & - & - & SU \\ - & TS & - & - \\ UR & - & UT & - \end{pmatrix}$$

$$Q_1 = \begin{pmatrix} 7 & 5 & \infty & \infty \\ 7 & 12 & \infty & 2 \\ \infty & 3 & \infty & \infty \\ 4 & \textcircled{9} & 1 & \infty \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} RR & RS & - & - \\ SR & SRS & - & SU \\ - & TS & - & - \\ UR & URS & UT & - \end{pmatrix}$$

$$Q_2 = \begin{pmatrix} 7 & 5 & \textcircled{\infty} & 7 \\ 7 & 12 & \infty & 2 \\ 10 & 3 & \infty & 5 \\ 4 & 9 & 1 & 11 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} RR & RS & - & RSU \\ SR & SRS & - & SU \\ TSR & TS & - & TSU \\ UR & URS & UT & URS \end{pmatrix}$$

$$Q_3 = \begin{pmatrix} 7 & 5 & \infty & 7 \\ 7 & 12 & \infty & 2 \\ 10 & 3 & \infty & 5 \\ 4 & \textcircled{4} & 1 & 6 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} RR & RS & - & RSU \\ SR & SRS & - & SU \\ TSR & TS & - & TSU \\ UR & UTS & UT & UTSU \end{pmatrix}$$

$$Q_4 = \begin{pmatrix} 7 & 5 & 8 & 7 \\ 7 & 11 & 3 & 2 \\ \textcircled{9} & 3 & 6 & 5 \\ 4 & 4 & 1 & 6 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} RR & RS & RSUT & RSU \\ SR & SURS & SUT & SU \\ TSUR & TS & TSUT & TSU \\ UR & UTS & UT & UTSU \end{pmatrix}$$

توضیح می‌دهیم که چگونه درایه‌های داخل دایره به دست آمده‌اند:

$$Q_1[4, 2] = \min(Q_0[4, 2], Q_0[4, 1] + Q_0[1, 2]) = \min(\infty, 4 + 5) = 9$$

$$Q_2[1, 3] = \min(Q_1[1, 3], Q_1[1, 2] + Q_1[2, 3]) = \min(\infty, 5 + \infty) = \infty$$

$$Q_3[4, 2] = \min(Q_2[4, 2], Q_2[4, 3] + Q_2[3, 2]) = \min(9, 3 + 1) = 4$$

$$Q_4[3, 1] = \min(Q_3[3, 1], Q_3[3, 4] + Q_3[4, 1]) = \min(10, 5 + 4) = 9$$

بیان رسمی الگوریتم به شرح زیر است:

Algorithm 8.2: (Shortest-Path Algorithm) A weighted graph G with M nodes is maintained in memory by its weight matrix W . This algorithm finds a matrix Q such that $Q[I, J]$ is the length of a shortest path from node V_I to node V_J . INFINITY is a very large number, and MIN is the minimum value function.

1. Repeat for $I, J = 1, 2, \dots, M$: [Initializes Q .]
 $W[I, J] = 0$, then: Set $Q[I, J] := \text{INFINITY}$;
 Else: Set $Q[I, J] := W[I, J]$.
 [End of loop.]
2. Repeat Steps 3 and 4 for $K = 1, 2, \dots, M$: [Updates Q .]
3. Repeat Step 4 for $I = 1, 2, \dots, M$:
4. Repeat for $J = 1, 2, \dots, M$:
 Set $Q[I, J] := \text{MIN}(Q[I, J], Q[I, K] + Q[K, J])$.
 [End of loop.]
 [End of Step 3 loop.]
 [End of Step 2 loop.]
5. Exit.

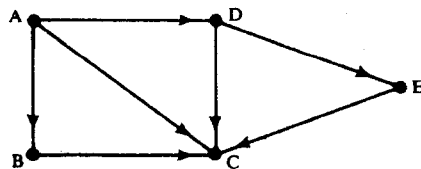
به شباهت بین الگوریتم 8.1 و الگوریتم 8.2 توجه کنید.

الگوریتم 8.2 را نیز می‌توان برای گراف G ای بکار گرفت که بدون وزن است و به هر یال e در G تنها وزن $w(e) = 1$ نسبت داده شده است.

۵-۸ نمایش یک گراف با استفاده از لیست پیوندی

فرض کنید G یک گراف جهت‌دار با m گره باشد. نمایش ترتیبی G در حافظه یعنی نمایش G به کمک ماتریس مجاورت A آن، دارای چند اشکال عمده است. قبل از هر چیز، باید بگوئیم که اضافه و حذف گره‌ها با این نمایش در G مشکل است چون به علت قابل تغییر بودن اندازه A ، گره‌ها را الزاماً باید از نو مرتب کرد، از این رو در ماتریس A تغییرات بسیار زیادی انجام می‌شود. علاوه بر این اگر تعداد یالها $O(m)$ یا $O(m \log_2 m)$ باشد، آنگاه ماتریس A ، خلوت یا تنگ خواهد بود چون دارای صفرهای بسیار زیادی است. از این رو مقدار زیادی از حافظه به هدر می‌رود. بنابراین، G را معمولاً در حافظه به صورت نمایش پیوندی نمایش می‌دهد که ساختمان یا ساختار مجاورتی نیز نامیده می‌شود که در بخش حاضر توضیح داده می‌شود. گراف G شکل ۷-۸ (الف) را در نظر بگیرید:

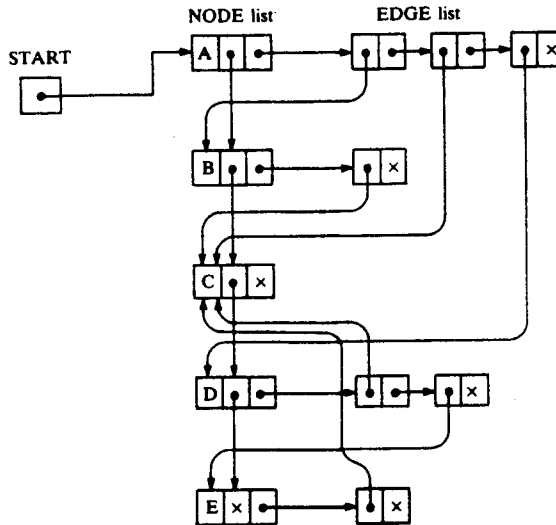
Node	Adjacency List
A	B, C, D
B	C
C	
D	C, E
E	C



(ب) لیست‌های مجاورت G

(الف) گراف G

جدول شکل ۷-۸ (ب) هر گره داخل G را بعد از لیست مجاورتی آن نشان می‌دهد که لیست گره‌های مجاور آن است و گره‌های بعدی یا گره‌های همسایه نیز نامیده می‌شود. شکل ۸-۸ نمودار نمایش پیوندی G را در حافظه نشان می‌دهد.



شکل ۸-۸

روشن است که نمایش پیوندی از دو لیست (فایل) یعنی لیست گره **NODE** و لیست یال **EDGE** به شرح زیر تشکیل شده است:

(الف) لیست گره: هر عنصر در لیست **NODE** متناظر با یک گره در گراف G است و یک رکورد به شکل زیر است:

NODE	NEXT	ADJ	
------	------	-----	--

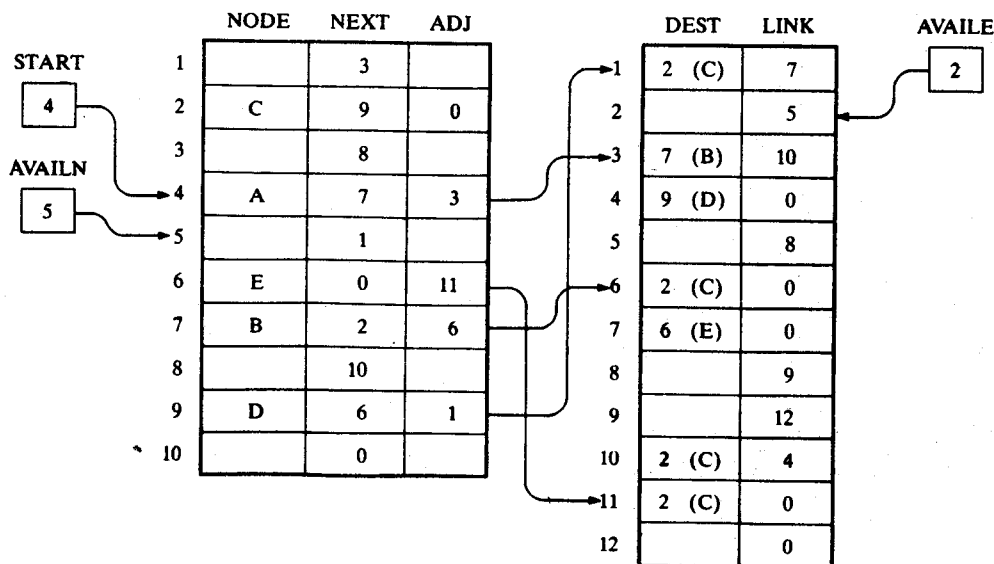
در اینجا **NODE** نام یا مقدار کلیدی گره است و **NEXT** اشاره گره به گره بعدی در لیست **NODE** و **ADJ** اشاره گره به عنصر اول در لیست مجاورتی گره است که در لیست **EDGE** نگهداری می‌شود. منطقه سایه‌زده شده بیان می‌کند که اطلاعات دیگری در رکورد نظیر درجه ورودی **INDEG** گره، درجه خروجی **OUTDEG** گره، **STATUS** گره در طی اجرای الگوریتم و غیره می‌تواند وجود داشته باشد. (به بیان دیگر می‌توان فرض کرد که **NODE** آرایه‌ای از رکوردها شامل فیلدهایی نظیر **NAME**، **INDEG**، **OUTDEG**، **STATUS**، ... است). خود گره‌ها که در شکل ۷-۸ رسم شده است به صورت یک لیست پیوندی

سازماندهی خواهد شد و از این‌رو یک متغیر اشاره‌گر START برای شروع لیست و یک متغیر اشاره‌گر AVAILN برای لیست حافظه موجود، خواهد داشت. گاهی اوقات بسته به کاربرد، گره‌ها را می‌توان به صورت آرایه مرتب‌شده یا یک درخت جستجوی دودویی بجای یک لیست پیوندی سازماندهی کرد. (ب) لیست یال. هر عنصر در لیست EDGE متناظر با یال G است و یک رکورد به صورت زیر است:

DEST	LINK	
------	------	--

فیلد DEST به مکان لیست NODE گره مقصد یا گره انتهایی یال اشاره می‌کند. فیلد LINK یالهایی با گره اولیه یکسان یعنی گره‌هایی با لیست مجاورتی یکسان را به هم پیوند می‌دهند. منطقه سایه‌زده شده بیان می‌کند که اطلاعات دیگری در رکورد متناظر با یال است نظیر فیلد EDGE که شامل اطلاعات یال شماره‌دار است و این در حالتی است که G یک گراف دارای شماره باشد، یک فیلد WEIGHT که شامل وزن یال است و این در حالتی است که G یک گراف وزن داده شده باشد و الی آخر، علاوه بر این برای لیست فضای حافظه موجود در لیست AVAILN به یک متغیر اشاره‌گر EDGE نیاز داریم.

شکل ۸-۹ چگونگی ظاهر شدن گراف G شکل ۷-۸ (الف) را در حافظه نشان می‌دهد. انتخاب 10 مکان برای لیست NODE و 12 امکان برای لیست EDGE اختیاری و دلخواه است.



نمایش پیوندی گراف G که مورد بحث و بررسی قرار می‌گیرد را می‌توان با

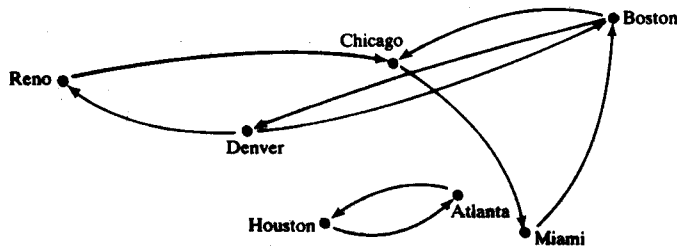
GRAPH(NODE, NEXT, ADJ, START, AVAILN, DEST, LINK, AVAIL)

نمایش داد. علاوه بر این وقتی G یک گراف وزن داده شده است، این نمایش می‌تواند شامل آرایه **WEIGHT** باشد یا وقتی G یک گراف دارای شماره است می‌تواند شامل آرایه **EDGE** باشد.

مثال ۵-۸

فرض کنید شرکت هواپیمایی **Friendly Airlines** در یک روز، نه پرواز به شرح زیر دارد:

103 Atlanta to Houston	203 Boston to Denver	305 Chicago to Miami
106 Houston to Atlanta	204 Denver to Boston	308 Miami to Boston
201 Boston to Chicago	301 Denver to Reno	402 Reno to Chicago



شکل ۱۰-۸

واضح است که اطلاعات را می‌توان به صورت کارایی در یک فایل ذخیره کرد که در آن فایل هر رکورد از سه فیلد زیر تشکیل شده است:

Flight Number, City of Origin, City of Destination

با وجود این، چنین نمایشی به سادگی، به سؤالات طبیعی زیر جواب نمی‌دهد:

(الف) آیا از شهر X به شهر Y یک پرواز مستقیم وجود دارد؟

(ب) آیا یک پرواز با تعداد توقف‌های ممکن از شهر X به شهر Y می‌تواند انجام شود؟

(ج) مستقیم‌ترین مسیر کدام مسیر است یعنی مسیری که کمترین تعداد توقف ممکن از شهر X به شهر Y را دارد کدام است؟

برای دادن پاسخ‌های گویاتر به این سؤالات بهتر است اطلاعات به صورت یک گراف G با شهرها به عنوان گره‌ها و پروازها به عنوان یال‌ها سازماندهی شوند. شکل ۱۰-۸ بالا تصویری از گراف G است.

شکل ۸-۱۱ چگونگی ظاهر شدن گراف G را در حافظه با استفاده از نمایش پیوندی نشان می‌دهد.

NODE list

	CITY	NEXT	ADJ
1		0	
2	Atlanta	12	1
3	Chicago	11	7
4	Houston	7	2
5		6	
6		8	
7	Miami	10	8
8		9	
9		1	
10	Reno	0	9
11	Denver	4	5
12	Boston	3	3

START = 2, AVAILN = 5

EDGE list

	NUMBER	ORIG	DEST	LINK
1	103	2	4	0
2	106	4	2	0
3	201	12	3	4
4	203	12	11	0
5	204	11	12	6
6	301	11	10	0
7	305	3	7	0
8	308	7	12	0
9	402	10	3	0
10				11
11				12
12				0

AVAIL = 10

شکل ۸-۱۱

متذکر می‌شویم که G یک گراف شماره‌دار است نه یک گراف وزن داده شده، چون شماره پرواز تنها جهت شناسایی است. حتی اگر اطلاعات به صورت یک گراف سازماندهی شده باشند، با وجود این همچنان نیازمند یک نوع الگوریتم برای پاسخ به سؤالات (ب) و (ج) هستیم. چنین الگوریتم‌هایی دیرتر در همین فصل مورد توجه قرار می‌گیرد.

۸-۶ عملیات بر روی گراف‌ها

فرض کنید گراف G به وسیله نمایش پیوندی در حافظه نگهداری می‌شود:

GRAPH(NODE, NEXT, ADJ, START, AVAILN, DEST, LINK, AVAIL)

که در بخش قبل مورد بحث و بررسی قرار گرفت. این بخش عملیات جستجو، اضافه کردن و حذف گره‌ها و یالهای گراف G را شرح می‌دهد. عمل پیمایش در بخش بعد بررسی می‌شود. عملیات این بخش از بعضی از زیربرنامه‌های Procedure فصل ۵ در رابطه با لیستهای پیوندی استفاده می‌کند. جهت کامل شدن بحث، این زیربرنامه‌ها در زیر با اندکی تغییر روش نسبت به فصل ۵

بیان می‌شود. طبیعی است که اگر به جای یک لیست پیوندی از لیست پیوندی چرخشی یا حلقوی، یا یک درخت جستجوی دودویی استفاده شود، آنگاه از زیربرنامه‌های مشابهی باید استفاده کرد.

زیربرنامه 8.3 (با نام اولیه Algorithm 5.2) مکان LOC عنصر ITEM را در یک لیست پیوندی پیدا می‌کند.

Procedure 8.3: FIND(INFO, LINK START, ITEM, LOC) [Algorithm 5.2]
Finds the location LOC of the first node containing ITEM, or sets LOC := NULL.

1. Set PTR := START.
2. Repeat while PTR ≠ NULL:
 - If ITEM = INFO[PTR], then: Set LOC := PTR, and Return.
 - Else: Set PTR := LINK[PTR].
 [End of loop.]
3. Set LOC := NULL, and Return.

زیربرنامه 8.4 (با نام اولیه Procedure 5.9 و Algorithm 5.10) عنصر داده‌شده ITEM را از یک لیست پیوندی حذف می‌کند. در اینجا از یک متغیر منطقی FLAG استفاده می‌کنیم تا ببینیم آیا ITEM از آغاز در لیست پیوندی وجود دارد یا خیر.

Procedure 8.4: DELETE(INFO, LINK, START, AVAIL, ITEM, FLAG) [Algorithm 5.10]
Deletes the first node in the list containing ITEM, or sets FLAG := FALSE when ITEM does not appear in the list.

1. [List empty?] If START = NULL, then: Set FLAG := FALSE, and Return.
2. [ITEM in first node?] If INFO[START] = ITEM, then:
 - Set PTR := START, START := LINK[START],
 - LINK[PTR] := AVAIL, AVAIL := PTR,
 - FLAG := TRUE, and Return.
 [End of If structure.]
3. Set PTR := LINK[START] and SAVE := START. [Initializes pointers.]
4. Repeat Steps 5 and 6 while PTR ≠ NULL:
5. If INFO[PTR] = ITEM, then:
 - Set LINK[SAVE] := LINK[PTR], LINK[PTR] := AVAIL,
 - AVAIL := PTR, FLAG := TRUE, and Return.
 [End of If structure.]
6. Set SAVE := PTR and PTR := LINK[PTR]. [Updates pointers]
7. Set FLAG := FALSE, and Return.

جستجوی گره در یک گراف

فرض کنید بخواهیم مکان LOC یک گره N را در گراف G پیدا کنیم. این کار را می‌توان با استفاده از

8.3 Procedure به شرح زیر انجام داد :

Call FIND(NODE, NEXT, START, N, LOC)

یعنی این دستور Call لیست NODE را برای پیدا کردن گره N جستجو می‌کند. از طرف دیگر، می‌خواهیم مکان LOC یال (A, B) را در گراف G پیدا کنیم. نخست باید مکان LOCA گره A و مکان LOCB گره B را در لیست NODE پیدا کنیم. آنگاه باید در لیست گره‌های بعدی A مکان LOC، LOCB پیدا کنیم که اشاره گر لیست ADJ[LOCA] دارد. این کار با زیر برنامه 8.5 Procedure پیاده‌سازی می‌شود که علاوه بر این تحقیق می‌کند آیا A و B گره‌هایی در گراف G هستند یا خیر. ملاحظه می‌کنید که LOC مکان LOCB را در لیست EDGE به دست می‌دهد.

اضافه کردن گره در یک گراف

فرض کنید بخواهیم گره N را به گراف G اضافه کنیم. توجه دارید که N در NODE[AVAILN] که اولین گره آزاد است جایگزین می‌شود. علاوه بر این چون N یک گره منفرد خواهد بود علاوه بر این باید قرار دهیم $ADJ[AVAILN] := NULL$ Procedure 8.6 زیر برنامه این کار را با استفاده از یک متغیر منطقی FLAG برای بیان حالت سرریزی Overflow انجام می‌دهد. واضح است که اگر لیست NODE به صورت یک لیست مرتب‌شده نگهداری شود یا به صورت یک درخت جستجوی دودویی، باشد، باید زیر برنامه 8.6 Procedure اصلاح شود.

Procedure 8.5: FINDEGE(NODE, NEXT, ADJ, START, DEST, LINK, A, B, LOC)

This procedure finds the location LOC of an edge (A, B) in the graph G, or sets $LOC := NULL$.

1. Call FIND(NODE, NEXT, START, A, LOCA).
2. CALL FIND(NODE, NEXT, START, B, LOCB).
3. If LOCA = NULL or LOCB = NULL, then: Set $LOC := NULL$.
Else: Call FIND(DEST, LINK, ADJ[LOCA], LOCB, LOC).
4. Return.

Procedure 8.6: INSNODE(NODE, NEXT, ADJ, START, AVAILN, N, FLAG)

This procedure inserts the node N in the graph G.

1. [OVERFLOW?] If AVAILN = NULL, then: Set $FLAG := FALSE$, and Return.
2. Set $ADJ[AVAILN] := NULL$.
3. [Removes node from AVAILN list.]
Set $NEW := AVAILN$ and $AVAILN := NEXT[AVAILN]$.
4. [Inserts node N in the NODE list.]
Set $NODE[NEW] := N$, $NEXT[NEW] := START$ and $START := NEW$.
5. Set $FLAG := TRUE$, and Return.

فرض کنید بخواهیم یال (A, B) را به گراف G اضافه کنیم. این زیربرنامه فرض می‌کند که هم A و هم B قبلاً گره‌هایی در G هستند. این زیربرنامه نخست $LOCA$ مکان A و $LOCB$ مکان B را در لیست گره پیدامی‌کند. آنگاه (A, B) به عنوان یک یال G با اضافه کردن $LOCB$ در لیست گره‌های بعدی A اضافه می‌شود، که اشاره گر لیست $ADJ[LOCA]$ دارد. بار دیگر یک متغیر منطقی $FLAG$ برای بیان حالت سرریزی $Overflow$ مورد استفاده قرار می‌گیرد. این زیربرنامه به شرح زیر است:

Procedure 8.7: INSEEDGE(NODE, NEXT, ADJ, START, DEST, LINK, AVAILE, A, B, FLAG)

This procedure inserts the edge (A, B) in the graph G .

1. Call FIND(NODE, NEXT, START, A, LOCA).
2. Call FIND(NODE, NEXT, START, B, LOCB).
3. [OVERFLOW?] If AVAILE = NULL, then: Set FLAG := FALSE, and Return.
4. [Remove node from AVAILE list.] Set NEW := AVAILE and AVAILE := LINK[AVAILE].
5. [Insert LOCB in list of successors of A.] Set DEST[NEW] := LOCB, LINK[NEW] := ADJ[LOCA] and ADJ[LOCA] := NEW.
6. Set FLAG := TRUE, and Return.

اگر A یا B یک گره در گراف G نباشد با استفاده از Procedure 8.6 باید زیربرنامه اصلاح شود.

حذف کردن یک گره از یک گراف

فرض کنید بخواهیم یال (A, B) را از گراف G حذف کنیم. این زیربرنامه فرض می‌کند که هم A و هم B گره‌هایی در گراف G هستند. بار دیگر باید نخست $LOCA$ مکان A و $LOCB$ مکان B را در لیست گره پیدا کنیم. آنگاه تنها $LOCB$ را از لیست گره‌های بعدی A حذف می‌کنیم که اشاره گر لیست $ADJ[LOCA]$ دارد. متغیر منطقی $FLAG$ برای بیان این مطلب که هیچ یالی در گراف G وجود ندارد مورد استفاده قرار می‌گیرد. این زیربرنامه به شرح زیر است:

Procedure 8.8: DELEEDGE(NODE, NEXT, ADJ, START, DEST, LINK, AVAILE, A, B, FLAG)

This procedure deletes the edge (A, B) from the graph G .

1. Call FIND(NODE, NEXT, START, A, LOCA). [Locates node A.]
2. Call FIND(NODE, NEXT, START, B, LOCB). [Locates node B.]
3. Call DELETE(DEST, LINK, ADJ[LOCA], AVAILE, LOCB, FLAG). [Uses Procedure 8.4.]
4. Return.

فرض کنید بخواهیم گره N را از گراف G حذف کنیم. این عمل بسیار پیچیده‌تر از عملیات جستجو و اضافه کردن و حذف یک یال است، چون باید تمام یال‌هایی که شامل N است نیز حذف شود. توجه کنید که این یالها دو حالت مختلف دارند، یال‌هایی که با N شروع می‌شود و یال‌هایی که با N به پایان می‌رسند. بنابراین، زیر برنامه اساساً شامل چهار مرحله زیر است:

(۱) مکان LOC گره N در G را پیدا کند.

(۲) تمام یال‌هایی را که با N به پایان می‌رسند حذف کند یعنی LOC را از لیست گره‌های بعدی هر گره M در G حذف کند. این مرحله نیازمند پیمایش لیست گره G است.

(۳) تمام یال‌هایی را که با N شروع می‌شوند حذف کند. این کار با پیدا کردن مکان BEG اولین گره بعدی و مکان END گره بعدی N انجام می‌شود و آنگاه لیست گره بعدی N را به لیست $AVAILE$ آزاد اضافه کند.

(۴) خود N را از لیست $NODE$ حذف کند.

این زیر برنامه به شرح زیر است:

Procedure 8.9: $DELNODE(NODE, NEXT, ADJ, START, AVAILN, DEST, LINK, AVAILE, N, FLAG)$

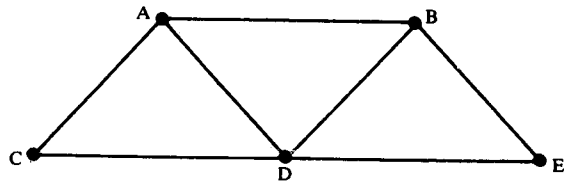
This procedure deletes the node N from the graph G .

1. Call $FIND(NODE, NEXT, START, N, LOC)$. [Locates node N .]
2. If $LOC = NULL$, then: Set $FLAG := FALSE$, and Return.
3. [Delete edges ending at N .]
 - (a) Set $PTR := START$.
 - (b) Repeat while $PTR \neq NULL$:
 - (i) Call $DELETE(DEST, LINK, ADJ[PTR], AVAILE, LOC, FLAG)$.
 - (ii) Set $PTR := NEXT[PTR]$.
- [End of loop.]
4. [Successor list empty?] If $ADJ[LOC] = NULL$, then: Go to Step 7.
5. [Find the first and last successor of N .]
 - (a) Set $BEG := ADJ[LOC]$, $END := ADJ[LOC]$ and $PTR := LINK[END]$.
 - (b) Repeat while $PTR \neq NULL$:
 - Set $END := PTR$ and $PTR := LINK[PTR]$.
- [End of loop.]
6. [Add successor list of N to $AVAILE$ list.]
Set $LINK[END] := AVAILE$ and $AVAILE := BEG$.
7. [Delete N using Procedure 8.4.]
Call $DELETE(NODE, NEXT, START, AVAILN, N, FLAG)$.
8. Return.

مثال ۸-۶

گراف (بدون جهت) G شکل ۸-۱۲ (الف) را در نظر بگیرید که لیست‌های مجاورتی آن در شکل ۸-۱۲ (ب) نشان داده شده است.

Adjacency Lists	
A:	B, C, D
B:	A, D, E
C:	A, D
D:	A, B, C, E
E:	B, D



(ب)

(الف)

شکل ۸-۱۲

ملاحظه می‌کنید که G دارای ۱۴ یال جهت‌دار است چون ۷ یال جهت‌دار نیستند. فرض کنید G مانند شکل ۸-۱۳ (الف) در حافظه نگهداری می‌شود. علاوه بر این فرض کنید گره B با استفاده از Procedure 8.9 از G حذف می‌شود. مراحل زیر بدست می‌آید:

مرحله ۱. $LOC = 2$ ، مکان B در لیست گره را پیدا می‌کند.

مرحله ۳. $LOC = 2$ ، را از لیست یال یعنی از هر لیست گره‌های بعدی حذف می‌کند.

مرحله ۵. $BEG = 4$ و $END = 6$ اولین و آخرین گره بعدی B را پیدا می‌کند.

مرحله ۶. لیست گره‌های بعدی را از لیست یال حذف می‌کند.

مرحله ۷. گره B را از لیست گره حذف می‌کند.

مرحله ۸. بازگشت

در شکل ۸-۱۳ (الف) عنصرهای حذف‌شده با دایره مشخص شده‌اند. شکل ۸-۱۳ (ب) G را پس از حذف گره B (و یال‌های آن) در حافظه نشان می‌دهد.

	NODE	NEXT	ADJ
1	A	3	2
2		6	
3	C	4	7
4	D	5	9
5	E	0	14
6		7	
7		8	
8		0	

START = 1
AVAILN = 2

	DEST	LINK
1		15
2	3	3
3	4	0
4		5
5		6
6		13
7	1	8
8	4	0
9	1	11
10		1
11	3	12
12	5	0
13		10
14	4	0
15		16
16		0

AVAILE = 4
(ب) بعد از حذف B

	NODE	NEXT	ADJ
1	A	2	1
2	ⓑ	3	4
3	C	4	7
4	D	5	9
5	E	0	13
6		7	
7		8	
8		0	

START = 1
AVAILN = 6

	DEST	LINK
1	ⓐ	2
2	3	3
3	4	0
4	ⓑ	5
5	Ⓒ	6
6	ⓓ	0
7	1	8
8	4	0
9	1	10
10	ⓔ	11
11	3	12
12	5	0
13	ⓖ	14
14	4	0
15		16
16		0

AVAILE = 16
(الف) قبل از حذف

۷-۸ پیمایش یک گراف

بسیاری از الگوریتم‌های مربوط به گراف، نیازمند آن هستند تا به صورت منظم و اصولی گره‌ها و یال‌های گراف G را مورد بررسی و پردازش قرار دهند. دو روش استاندارد برای این منظور وجود دارد. یکی از این روش‌ها جستجوی عرضی یا ردیفی و روش دیگر جستجوی عمقی نام دارد. جستجوی عرضی از یک صف به عنوان یک ساختمان کمکی جهت نگهداری گره‌ها در پردازش بعدی استفاده می‌کند و به‌طور مشابه جستجوی عمقی از یک پشته استفاده می‌کند. در خلال اجرای الگوریتم‌ها، هر گره N از گراف G دارای یکی از سه حالت زیر موسوم به وضعیت N خواهد بود:

$STATUS = 1$: (حالت آماده) حالت اولیه گره N .

$STATUS = 2$: (حالت انتظار) گره N داخل صف یا پشته در انتظار پردازش بسر می‌برد.

$STATUS = 3$: (حالت پردازش شده) گره N پردازش شده است.

اکنون دو روش جستجو را به‌طور مستقل مورد بحث و بررسی قرار می‌دهیم.

جستجوی عرضی

ایده کلی که در پشت جستجوی عرضی وجود دارد آن است که کار را با گره آغازش به شرح زیر شروع می‌کنیم. نخست گره آغازین A را ملاقات می‌کنیم. آنگاه تمام همسایه‌ها یا گره‌های مجاور A را ملاقات می‌کنیم. بدنبال آن تمام همسایه‌های (گره‌های مجاور) A را ملاقات می‌کنیم و الی آخر. طبیعی است که لازم است همسایه‌های یک گره را تعقیب کنیم و لازم است اطمینان داشته باشیم که هیچ گره‌ای بیشتر از یکبار پردازش نشود. این کار با استفاده از یک صف جهت نگهداشتن گره‌هایی که در انتظار پردازش بسر می‌برند و با استفاده از فیلد $STATUS$ که وضعیت جاری هر گره را به ما اطلاع می‌دهد انجام می‌شود. الگوریتم به شرح زیر است:

الگوریتم A : این الگوریتم جستجوی عرضی را با شروع از گره آغازین A روی یک گراف G اجرا می‌کند.

۱- تمام گره‌هایی را که در حالت آماده $STATUS = 1$ هستند مقدار اولیه می‌دهد.

۲- گره آغازین A را در $QUEUE$ قرار دهید و وضعیت آن را به حالت انتظار $STATUS = 2$ تغییر دهید.

۳- مرحله‌های ۴ و ۵ را تا وقتی $QUEUE$ خالی نشده تکرار کنید.

۴- N گره ابتدای $QUEUE$ را حذف کنید. N را پردازش کنید و وضعیت N را به حالت پردازش شده

$STATUS = 3$ تغییر دهید.

۵- تمام همسایه‌های N را به انتهای $QUEUE$ اضافه کنید که در حالت آماده هستند $STATUS = 1$ و

وضعیت آنها را به حالت انتظار $STATUS = 2$ تغییر دهید.

[پایان حلقه مرحله ۳]

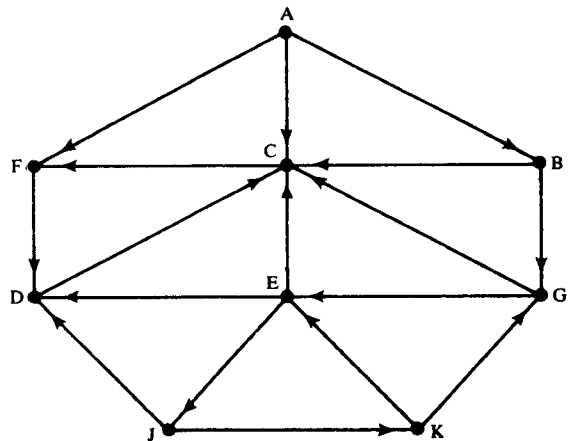
۶- پایان Exit.

الگوریتم بالا تنها آن دسته از گره‌ها را پردازش می‌کند که از گره آغازین A قابل دسترسی هستند. فرض کنید بخواهیم تمام گره‌های گراف G را ملاقات کنیم. آنگاه الگوریتم باید طوری اصلاح شود تا کار را مجدداً با گره دیگری شروع کند که ما آن را B می‌نامیم یعنی همچنان در حالت آماده است. این گره B را می‌توان با پیمایش لیست گره‌ها به دست آورد.

مثال ۷-۸

گراف G شکل ۸-۱۴ (الف) را در نظر بگیرید. لیست‌های مجاورتی گره‌ها در شکل ۸-۱۴ (ب) نشان داده شده است.

Adjacency Lists	
A:	F, C, B
B:	G, C
C:	F
D:	C
E:	D, C, J
F:	D
G:	C, E
J:	D, K
K:	E, G



(ب)

(الف)

شکل ۸-۱۴

فرض کنید G نمایش پروازهای روزانه بین شهرها یک شرکت هواپیمایی باشد و بخواهیم از شهر A به شهر J با حداقل تعداد توقف پرواز کنیم. به بیان دیگر کوتاهترین مسیر از A به J را پیدا کنیم که در آن هر یال طول 1 دارد.

کوتاهترین مسیر P را می‌توان با استفاده از جستجوی عرضی با شروع از شهر A و به پایان رسیدن در

J هنگام ملاقات آن پیدا کرد. در طی اجرای جستجو، ابتدای هر یال را با استفاده از آرایه ORIG به همراه آرایه QUEUE نگه می‌داریم. مراحل جستجو به شرح زیر است:

(الف) در آغاز، A را به QUEUE اضافه کنید و NULL را به ORIG به صورت زیر اضافه کنید:

FRONT = 1 QUEUE: A
REAR = 1 ORIG: \emptyset

(ب) عنصر ابتدا A را از QUEUE با قراردادن دستور جایگزینی $\text{FRONT} := \text{FRONT} + 1$ حذف کنید و به QUEUE همسایه‌های A را به صورت زیر اضافه کنید:

FRONT = 2 QUEUE: A, F, C, B
REAR = 4 ORIG: \emptyset , A, A, A

توجه دارید که A ابتدای هر سه یال به ORIG اضافه می‌شود.

(ج) عنصر ابتدا F را با قراردادن دستور جایگزینی $\text{FRONT} := \text{FRONT} + 1$ از QUEUE حذف کنید و به QUEUE همسایه‌های F را به صورت زیر اضافه کنید:

FRONT = 3 QUEUE: A, F, C, B, D
REAR = 5 ORIG: \emptyset , A, A, A, F

(د) عنصر ابتدا C را از QUEUE حذف کنید همچنین به QUEUE همسایه‌های C را به صورت زیر اضافه کنید (که در حالت آماده هستند):

FRONT = 4 QUEUE: A, F, C, B, D
REAR = 5 ORIG: \emptyset , A, A, A, F

توجه دارید که همسایه F از C به QUEUE اضافه نمی‌شود چون F در حالت آماده نیست (زیرا F قبلاً به QUEUE اضافه شده است).

(ه) عنصر ابتدا B را از QUEUE حذف کنید همچنین به QUEUE همسایه‌های B را به صورت زیر اضافه کنید (همسایه‌هایی که در حالت آماده هستند):

FRONT = 5 QUEUE: A, F, C, B, D, G
REAR = 6 ORIG: \emptyset , A, A, A, F, B

توجه دارید که تنها G به QUEUE اضافه می‌شود چون همسایه دیگر، C در حالت آماده نیست.

(و) عنصر ابتدا D را از QUEUE حذف کنید همچنین همسایه‌های D را که در حالت آماده هستند به صورت زیر به QUEUE اضافه کنید:

FRONT = 6 QUEUE: A, F, C, B, D, G
REAR = 6 ORIG: \emptyset , A, A, A, F, B

(ز) عنصر ابتدا G را از QUEUE حذف کنید و همسایه‌های G را که در حالت آماده هستند به صورت زیر به QUEUE اضافه کنید :

FRONT = 7 QUEUE: A, F, C, B, D, G, E
 REAR = 7 ORIG: \emptyset , A, A, A, F, B, G

(ح) عنصر ابتدا E را از QUEUE حذف کنید و همسایه‌های E را که در حالت آماده هستند به صورت زیر به QUEUE اضافه کنید :

FRONT = 8 QUEUE: A, F, C, B, D, G, E, J
 REAR = 8 ORIG: \emptyset , A, A, A, F, B, G, E

به محض اضافه شدن J به QUEUE کار را متوقف می‌کنیم چون J مقصد نهایی است. اکنون با استفاده از آرایه ORIG برای پیدا کردن مسیر P از J به عقب برمی‌گردیم. بدین ترتیب

$J \leftarrow E \leftarrow G \leftarrow B \leftarrow A$

که مسیر P مورد نظر است.

جستجوی عمقی

ایده کلی که در پشت جستجوی عمقی وجود دارد آن است که کار را با گره آغازین A به شرح زیر شروع می‌کنیم. نخست گره آغازین A را ملاقات می‌کنیم. آنگاه هر گره N را که در مسیر P قرار دارد و با A شروع می‌شود را ملاقات می‌کنیم یعنی یک همسایه A را پردازش می‌کنیم. آنگاه همسایه همسایه A و الی آخر را پردازش می‌کنیم. پس از رسیدن به نقطه پایان P یعنی پایان مسیر P به طرف P برمی‌گردیم تا بتوانیم در طول مسیر دیگر P' پردازش را ادامه دهیم، و الی آخر. این الگوریتم مشابه پیمایش InOrder یک درخت دودویی است، همچنین این الگوریتم مشابه راهی است که شخص ممکن است هنگام عبور از راه پر پیچ و خم طی کند. الگوریتم خیلی شبیه جستجوی عرضی است با این تفاوت که اکنون ما به جای صف از یک پشته استفاده می‌کنیم. مجدداً، از فیلد STATUS استفاده می‌کنیم که به ما وضعیت جاری یک گره را اعلام می‌کند. الگوریتم به صورت زیر است :

الگوریتم B : این الگوریتم جستجوی عمقی را با شروع از گره آغازین A روی یک گراف G اجرا می‌کند.

۱- تمام گره‌هایی را که در حالت آماده $STATUS = 1$ هستند مقدار اولیه می‌دهد.

۲- گره آغازین A را در Push STACK کنید و وضعیت آن را به حالت انتظار $STATUS = 2$ تغییر دهید.

۳- مرحله‌های ۴ و ۵ را تا وقتی STACK خالی نشده تکرار کنید.

۴- N گره بالای STACK را pop کنید. N را پردازش کنید و وضعیت آن را به حالت پردازش

$STATUS = 3$ تغییر دهید.

۵- تمام همسایه‌های N را به داخل **Push STACK** کنید که همچنان در حالت آماده $1 = \text{STATUS}$ هستند.

و وضعیت آنها را به حالت انتظار $2 = \text{STATUS}$ تغییر دهید.

[پایان حلقه مرحله ۳]

۶- پایان **Exit**.

بار دیگر، الگوریتم بالا تنها آن دسته از گره‌ها را پردازش می‌کند که از گره آغازین A قابل دسترسی هستند. فرض کنید بخواهیم تمام گره‌های گراف G را ملاقات کنیم. آنگاه الگوریتم باید طوری اصلاح شود تا کار را مجدداً با گره دیگری شروع کند که ما آن را B می‌نامیم یعنی همچنان در حالت آماده است. این گره B را می‌توان با پیمایش لیست گره‌ها بدست آورد.

مثال ۸-۸

گراف G شکل ۸-۱۴ (الف) را در نظر بگیرید. فرض کنید بخواهیم تمام گره‌های قابل دسترسی از گره J (و خود J) را پیدا کرده چاپ کنیم. یک راه برای این منظور استفاده از جستجوی عمقی G و شروع از گره J است. مراحل جستجو به شرح زیر است:

(الف) در آغاز، J را به داخل پشته به صورت زیر **Push** کنید:

STACK: J

(ب) عنصر بالا J را **pop** کنید و چاپ کنید همچنین آنگاه تمام همسایه‌های J را که در حالت آماده هستند به داخل پشته به صورت زیر **Push** کنید:

Print J STACK: D, K

(ج) عنصر بالا K را **pop** کنید و چاپ کنید همچنین تمام همسایه‌های K را که در حالت آماده هستند به داخل پشته به صورت زیر **Push** کنید:

Print K STACK: D, E, G

(د) عنصر بالا G را **pop** کنید و چاپ کنید همچنین آنگاه تمام همسایه‌های G را که در حالت آماده هستند به داخل پشته به صورت زیر **Push** کنید:

Print G STACK: D, E, C

توجه دارید که تنها C به داخل پشته **Push** می‌شود چون همسایه دیگر، E ، در حالت آماده نیست زیرا E قبلاً به داخل پشته **Push** شده است.

(ه) عنصر بالا C را **pop** کنید و چاپ کنید همچنین آنگاه تمام همسایه‌های C را که در حالت آماده هستند

به داخل پشته به صورت زیر Push کنید :

Print C STACK: D, E, F

(و) عنصر بالا F را pop کنید و چاپ کنید و آنگاه تمام همسایه‌های F را که در حالت آماده هستند به داخل پشته به صورت زیر Push کنید :

Print F STACK: D, E

توجه دارید که D تنها همسایه F به داخل پشته Push نمی‌شود چون D در حالت آماده نیست. زیرا D قبلاً به داخل پشته Push شده است.

(ز) عنصر بالا E را pop کنید و چاپ کنید همچنین تمام همسایه‌های E را که در حالت آماده هستند به داخل پشته به صورت زیر Push کنید.

Print E STACK: D

توجه دارید که هیچیک از سه همسایه E در حالت آماده نیستند.

(ح) عنصر بالا D را pop کنید و چاپ کنید همچنین تمام همسایه‌های D را که در حالت آماده هستند به داخل پشته به صورت زیر Push کنید :

Print D STACK:

اکنون پشته خالی است، بنابراین جستجوی عمقی G که از J شروع شده است در همینجا به پایان می‌رسد. بدین ترتیب گره‌های چاپ شده

J, K, G, C, F, E, D

دقیقاً گره‌هایی هستند که از J قابل دسترسی می‌باشند.

۸- مجموعه‌های جزئاً مرتب، مرتب سازی موضعی

فرض کنید S یک گراف باشد به طوری که هر گره v_i از S نمایش یک کار (Task) و هر یال (u, v) به معنی پایان کار u باشد که پیشنیاز شروع کار v است. فرض کنید S چنین گرافی شامل یک دور یا حلقه نظیر

$$P = (u, v, w, u)$$

است معنی آن این است که تا وقتی u به پایان نرسیده است v نمی‌تواند شروع شود و تا وقتی v به پایان نرسیده است w نمی‌تواند شروع شود و تا وقتی w به پایان نرسیده است u نمی‌تواند شروع شود. بنابراین هر یک از کارهای داخل دور نمی‌تواند به پایان برسد. برطبق آن، S یک چنین گرافی که کارها را نشان می‌دهد و یک رابطه پیشنیازی است نمی‌تواند دور یا حلقه داشته باشد.

فرض کنید S یک گراف بدون دور یا بدون حلقه باشد. رابطه $<$ را روی S در نظر بگیرید که به صورت زیر تعریف می‌شود

$u < v$ اگر یک مسیر از u به v وجود داشته باشد.

این رابطه دارای سه خاصیت زیر است:

(۱) برای هر عنصر u در S ، داریم $u < u$ (ضد انعکاسی).

(۲) اگر $u < v$ آنگاه $v \nless u$ (ضد تقارنی).

(۳) اگر $u < v$ و $v < w$ آنگاه $u < w$ (تراگذری).

یک چنین رابطه‌ای $<$ روی S یک ترتیب جزئی S نامیده می‌شود همچنین به S با چنین ترتیبی مجموعه جزئاً مرتب یا Partially Ordered SET یا Poset می‌گویند. بنابراین گراف S بدون دور یا بدون حلقه را می‌توان به صورت یک مجموعه جزئاً مرتب مورد توجه قرار داد.

از طرف دیگر، فرض کنید S یک مجموعه جزئاً مرتب با ترتیب جزئی‌یی باشد که با $<$ نمایش داده می‌شود. آنگاه S را می‌توان به صورت گرافی در نظر گرفت که گره‌های آن عنصرهای S هستند و یال‌های آن به صورت زیر تعریف می‌شوند:

(u, v) یک یال در S است اگر $u < v$

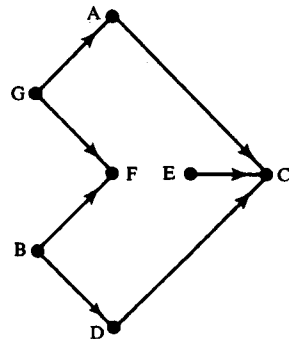
علاوه بر این می‌توان نشان داد که یک مجموعه جزئاً مرتب S با در نظر گرفتن آن به صورت یک گراف، هیچ دوری یا حلقه‌ای ندارد.

مثال ۸-۹

فرض کنید S گراف شکل ۸-۱۵ باشد.

Adjacency Lists	
A:	C
B:	D, F
C:	
D:	C
E:	C
F:	
G:	A, F

(ب)



(الف)

شکل ۸-۱۵

ملاحظه می‌کنید که S هیچ دوری یا حلقه‌ای ندارد. بنابراین S را می‌توان به صورت یک مجموعه

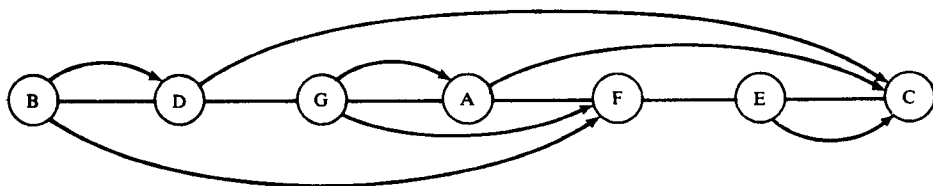
جزئاً مرتب در نظر گرفت. توجه دارید که $G < C$ ، چون از G به C یک مسیر وجود دارد. به همین ترتیب، $B < C$ و $B < F$ از طرف دیگر $B \nless A$ چون هیچ مسیری از B به A وجود ندارد. علاوه بر این $A \nless B$.

مرتب‌سازی موضعی Topological Sorting

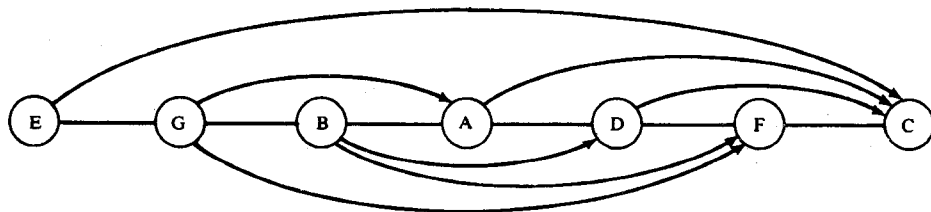
فرض کنید S یک گراف جهت‌دار بدون دور یا بدون حلقه (یا یک مجموعه جزئاً مرتب) باشد. یک مرتب‌سازی موضعی T گراف S یک ترتیب خطی از گره‌های S است که در آن ترتیب جزئی اولیه حفظ می‌شود. به بیان دیگر اگر $u < v$ در S باشند (یعنی اگر یک مسیر از u به v در S وجود داشته باشد)، آنگاه u قبل از v در ترتیب خطی T ظاهر می‌شود. شکل ۱۶-۸ دو مرتب‌سازی موضعی مختلف گراف S شکل ۱۵-۸ را نشان می‌دهد. یالها در شکل ۱۶-۸ به این خاطر گنجانده شده است تا بیان کند که با جهت ترتیب خطی مطابقت می‌کند.

نتیجه اصلی و نظری مطالب این بخش به صورت زیر است:

قضیه ۴-۸: فرض کنید S یک گراف جهت‌دار متناهی و بدون دور (بدون حلقه) یا یک مجموعه جزئاً مرتب متناهی باشد. آنگاه برای مجموعه S یک مرتب‌کردن موضعی T وجود دارد:



(الف)



(ب)

شکل ۱۶-۸ دو مرتب‌کردن موضعی

ترجیه دارید که این قضیه تنها وجود مرتب‌سازی موضعی را بیان می‌کند. اکنون الگوریتمی ارائه

می‌دهیم که یک چنین مرتب سازی موضعی را پیدا می‌کند.

ایده اصلی در پس این الگوریتم پیدا کردن یک مرتب سازی موضعی T گراف بدون حلقه S آن است که هر گره N با درجه ورودی صفر یعنی بدون هیچ گره قبلی می‌تواند به عنوان عنصر اول در مرتب کردن T انتخاب شود. بنابراین تا وقتی که گراف S خالی نیست الگوریتم ما دو مرحله زیر را تکرار می‌کند:

(۱) گره N با درجه ورودی صفر را پیدا می‌کند.

(۲) N و یال‌های آن را از گراف S حذف می‌کند.

تربیتی که در آن گره‌ها از گراف S حذف می‌شوند از آرایه کمکی QUEUE استفاده می‌کند که به طور موقت تمام گره‌ها با درجه ورودی صفر را نگه می‌دارد. علاوه بر این الگوریتم از فیلد INDEG به گونه‌ای استفاده می‌کند که INDEG(N) حاوی درجه ورودی جاری گره N است. الگوریتم به شرح زیر است:

الگوریتم C: این الگوریتم مرتب‌سازی موضعی T گراف بدون دور یا بدون حلقه S را پیدا می‌کند.

۱- INDEG(N) درجه ورودی هر گره N از گراف S را پیدا کنید. این عمل را می‌توان با پیمایش هر لیست مجاورتی مانند مسأله ۱۵-۸ انجام داد.

۲- تمام گره‌ها با درجه ورودی صفر را در داخل صف قرار دهید.

۳- مراحل ۴ و ۵ را تا وقتی صف خالی نیست تکرار کنید.

۴- گره ابتدای صف را با قراردادن $FRONT := FRONT + 1$ حذف کنید.

۵- برای M هر همسایه گره N مراحل زیر را تکرار کنید:

(الف) قرار دهید $INDEG(M) := INDEG(M) - 1$

[این دستور یال از N تا M را حذف می‌کند.]

(ب) اگر $INDEG(M) = 0$ آنگاه M را به انتهای صف اضافه کنید.

[پایان حلقه]

[پایان حلقه مرحله ۳]

۶- پایان Exit.

مثال ۱۰-۸

گراف S شکل ۱۵-۸ (الف) را در نظر بگیرید. الگوریتم C را برای پیدا کردن T مرتب‌شده موضع، گراف S بکار می‌بندیم. مراحل الگوریتم به شرح زیر است:

۱- INDEG(N) درجه ورودی هر گره N گراف S را پیدا کنید. نتیجه می‌شود:

$$INDEG(A) = 1 \quad INDEG(B) = 0 \quad INDEG(C) = 3 \quad INDEG(D) = 1$$

$$INDEG(E) = 0 \quad INDEG(F) = 2 \quad INDEG(G) = 0$$

این کار را می‌توان مانند مسأله ۱۵-۸ انجام داد.

۲- در آغاز به صف هر گره با درجه ورودی صفر را به صورت زیر اضافه کنید:

FRONT = 1, REAR = 3, QUEUE: B, E, G

۳ الف - عنصر ابتدا B را از صف با قراردادن $\text{FRONT} := \text{FRONT} + 1$ به صورت زیر حذف کنید:

FRONT = 2, REAR = 3 QUEUE: B, E, G

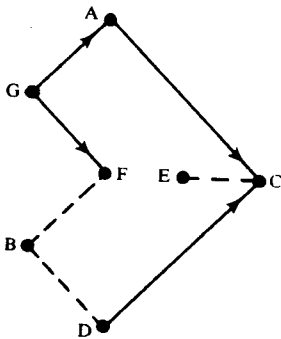
۳ ب - درجه ورودی هر همسایه B را به صورت زیر یک واحد کاهش دهید:

$\text{INDEG}(F) = 2 - 1 = 1$ و $\text{INDEG}(D) = 1 - 1 = 0$

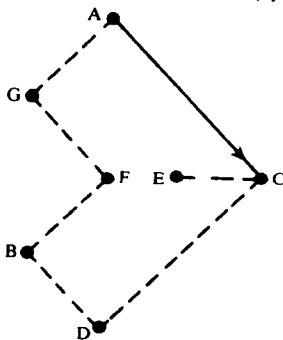
از لیست مجاورتی B در شکل ۸-۱۵ (ب) استفاده کردیم تا همسایه‌های گره B یعنی F و D را پیدا کنیم. همسایه D به انتهای صف اضافه می‌شود چون درجه ورودی آن اکنون صفر است.

FRONT = 2, REAR = 4 QUEUE: B, E, G, D

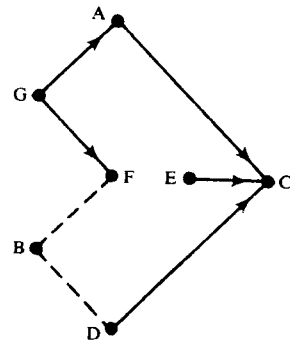
گراف S اکنون شبیه شکل ۸-۱۷ (الف) است که در آن گره B و یال‌های از B حذف شده‌اند که به صورت خط چین نشان داده شده است.



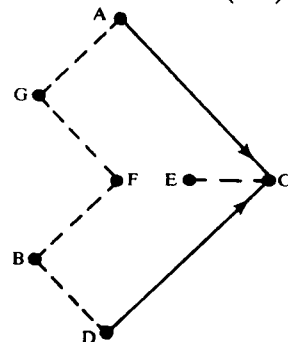
(ب) E حذف شده است.



(د) D حذف شده است.



(الف) B حذف شده است



(ج) G حذف شده است

۴ الف - عنصر ابتدا E را از صف با قراردادن $FRONT := FRONT + 1$ به صورت زیر حذف کنید:

$FRONT = 3, \quad REAR = 4 \quad \text{QUEUE: } B, E, G, D$

۴ ب - درجه ورودی هر همسایه E را به صورت زیر یک واحد کاهش دهید:

$$INDEG(C) = 3 - 1 = 2$$

چون درجه ورودی غیر صفر است، QUEUE تغییر نمی‌کند. اکنون گراف S شبیه شکل ۱۷-۸ (ب) است که در آن گره E و یال آن حذف شده است.

۵ الف - عنصر ابتدا G را از صف با قراردادن $FRONT := FRONT + 1$ به صورت زیر حذف کنید:

$FRONT = 4, \quad REAR = 4 \quad \text{QUEUE: } B, E, G, D$

۵ ب - درجه ورودی هر همسایه G را به صورت زیر یک واحد کاهش دهید:

$$INDEG(F) = 1 - 1 = 0 \quad \text{و} \quad INDEG(A) = 1 - 1 = 0$$

هم A و هم F به انتهای صف به صورت زیر اضافه می‌شوند. گراف S اکنون شبیه شکل ۱۷-۸ (ج) است که در آن G و دو یال آن حذف شده است.

$FRONT = 4, \quad REAR = 6 \quad \text{QUEUE: } B, E, G, D, A, F$

۶ الف - D عنصر ابتدای صف را با قراردادن $FRONT := FRONT + 1$ به صورت زیر حذف کنید.

$FRONT = 5, \quad REAR = 6 \quad \text{QUEUE: } B, E, G, D, A, F$

۶ ب - درجه ورودی هر همسایه D را به صورت زیر یک واحد کاهش دهید:

$$INDEG(C) = 2 - 1 = 1$$

چون درجه ورودی غیر صفر است، QUEUE تغییر نمی‌کند. گراف S اکنون شبیه شکل ۱۷-۸ (د) است که در آن D و یال آن حذف شده است.

۷ الف - A عنصر ابتدای صف را با قراردادن $FRONT := FRONT + 1$ به صورت زیر حذف کنید:

$FRONT = 6, \quad REAR = 6 \quad \text{QUEUE: } B, E, G, D, A, F$

۷ ب - درجه ورودی هر همسایه A را به صورت زیر یک واحد کاهش دهید.

$$INDEG(C) = 1 - 1 = 0$$

از آنجا که درجه ورودی C صفر است آن را به انتهای صف اضافه کنید.

$FRONT = 6, \quad REAR = 7 \quad \text{QUEUE: } B, E, G, D, A, F, C$

۸ الف - F عنصر ابتدای صف را با قراردادن $FRONT := FRONT + 1$ به صورت زیر حذف کنید.

$FRONT = 7, \quad REAR = 7 \quad \text{QUEUE: } B, E, G, D, A, F, C$

۸ ب - گره F همسایه‌ای ندارد، از این رو هیچ تغییری روی نمی‌دهد.

۹ الف - عنصر ابتدای صف را با قراردادن $FRONT := FRONT + 1$ به صورت زیر حذف کنید :

$FRONT = 8, \quad REAR = 7 \quad \text{QUEUE: } B, E, G, D, A, F, C$

۹ ب - گره C هیچ همسایه‌ای ندارد، بنابراین هیچ تغییر دیگری روی نمی‌دهد.

اکنون صف هیچ عنصر ابتدا ندارد، از این رو الگوریتم به پایان رسیده است. عنصرهای آرایه QUEUE

که مرتب‌کردن موضعی موردنظر T گراف S را به دست می‌دهد به صورت زیر است :

T: B, E, G, D, A, F, C

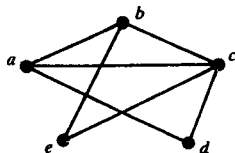
الگوریتم می‌توانست در مرحله ۷ ب متوقف شود که در آن REAR برابر تعداد گره‌های گراف S است.

مسئله‌های حل شده

چند اصطلاح نظریه گراف

مسئله ۱-۸ : گراف (بدون جهت) G شکل ۱۸-۸ (الف) را در نظر بگیرید. (الف) گراف G را برحسب

مجموعه گره‌های آن V و مجموعه یال‌های آن E بنویسید. (ب) درجه هر گره را پیدا کنید.



شکل ۱۸-۸

حل : (الف) ۵ گره a, b, c, d, e وجود دارد. از این رو $V = \{a, b, c, d, e\}$. هفت زوج $[x, y]$ از گره‌ها

وجود دارد به طوری که گره x با گره y متصل است. از این رو

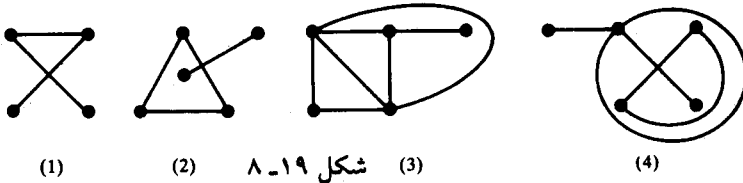
$$E = \{[a, b], [a, c], [a, d], [a, e], [b, c], [b, d], [c, d], [c, e], [d, e]\}$$

(ب) درجه یک گره برابر تعداد یال‌هایی است که به آن گره تعلق دارند. برای مثال $\deg(a) = 3$ ، چون a به سه یال

تعلق دارد $[a, b], [a, c], [a, d]$. به همین ترتیب $\deg(b) = 3, \deg(c) = 4, \deg(d) = 2$ و $\deg(e) = 2$.

مسئله ۲-۸ : گراف‌های چندگانه شکل ۱۹-۸ را در نظر بگیرید. کدامیک از آنها (الف) همبند (ب) بدون

حلقه یا بدون دو (ج) گراف هستند؟



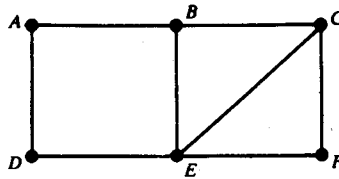
شکل ۸-۱۹

حل : (الف) تنها گرافهای چندگانه 1 و 3 همبند هستند.

(ب) تنها گراف چندگانه 4 یک حلقه (یعنی یک یال با یک نقطه ابتدا و انتها) دارد.

(ج) تنها گرافهای چندگانه 1 و 2 گراف هستند. گراف چندگانه 3 یالهای چندگانه و گراف چندگانه 4 یالهای چندگانه و یک حلقه دارد.

مسئله ۸-۳: گراف همبند G شکل ۸-۲۰ را در نظر بگیرید.



شکل ۸-۲۰

(الف) تمام مسیرهای ساده از گره A به گره F را پیدا کنید. (ب) فاصله بین A و F را به دست آورید. (ج) قطر گراف G را به دست آورید. (قطر گراف G حداکثر فاصله موجود بین هر دو گره آن است).

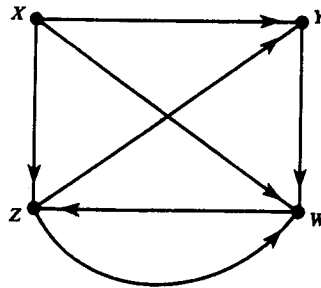
حل : (الف) یک مسیر ساده از A به F مسیری است که هیچ گره و از این رو هیچ یال تکراری ندارد. هفت مسیر ساده از این نوع وجود دارد :

$$\begin{array}{cccc} (A, B, C, F) & (A, B, E, F) & (A, D, E, F) & (A, D, E, C, F) \\ (A, B, C, E, F) & (A, B, E, C, F) & (A, D, E, B, C, F) & \end{array}$$

(ب) فاصله A تا F برابر 3 است، چون یک مسیر ساده (A, B, C, F) از A به F به طول 3 وجود دارد. و هیچ مسیر کوتاهی از A به F وجود ندارد.

(ج) فاصله بین A و F برابر 3 است. همچنین فاصله بین هر دو گره بزرگتر از 3 نیست. از این رو قطر گراف G برابر 3 است.

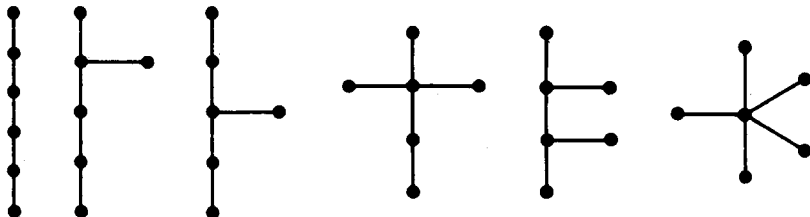
مسئله ۸-۴: گراف (جهت دار) G شکل ۸-۲۱ را در نظر بگیرید.



شکل ۸-۲۱

(الف) تمام مسیرهای ساده از X تا Z را بدست آورید. (ب) تمام مسیرهای ساده از Y تا Z را بدست آورید. (ج) $indeg(Y)$ و $outdeg(Y)$ را بدست آورید. (د) آیا گراف منبع یا چشمه دارد؟
 حل: (الف) سه مسیر ساده از X به Z وجود دارد که عبارتند از: (X, Z) ، (X, W, Z) ، (X, Y, W, Z) .
 (ب) تنها یک مسیر ساده از Y به Z وجود دارد که عبارت است از: (Y, W, X, Z) .
 (ج) چون دو یال به Y وارد می‌شوند (یعنی با Y به پایان می‌رسند). در نتیجه $indeg(Y) = 2$. از آنجا که تنها یک یال Y را ترک می‌کند (یعنی با Y شروع می‌شود) در نتیجه $outdeg(Y) = 1$.
 (د) X یک منبع است چون هیچ یالی وارد X نمی‌شود (یعنی $indeg(X) = 0$) اما چند یال X را ترک می‌کنند (یعنی $outdeg(X) > 0$). گراف چاه ندارد. چون هر گره یک درجه خروجی غیر صفر دارد (یعنی هر گره نقطه اولیه یک یال است).

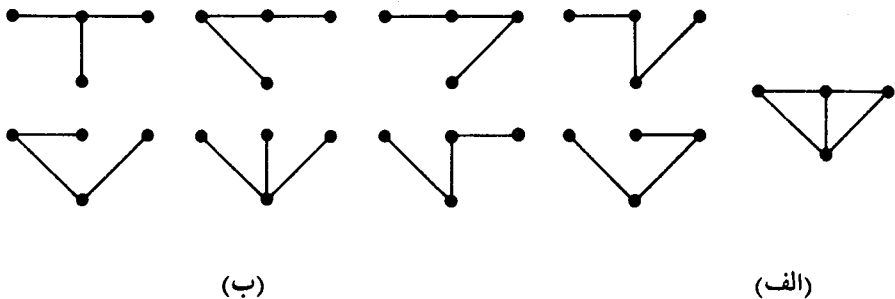
مسئله ۸-۵: تمام درختهایی را رسم کنید که دقیقاً ۶ گره دارند. (گراف G مشابه گراف G' است اگر یک تناظر یک به یک بین مجموعه گره‌ها V گراف G و مجموعه گره‌ها V' گراف G' وجود داشته باشد به طوری که (u, v) یک یال در G است اگر و فقط اگر زوج (u', v') متناظر با آن از گره‌ها یک یال در G' باشد).
 حل: شش درخت از این نوع وجود دارد که در شکل ۸-۲۲ نشان داده شده است.



شکل ۸-۲۲

قطر درخت اول 5، قطر دو درخت بعدی 4 و دو درخت بعد از آن 3 و قطر درخت آخر 2 است. هر درخت دیگر با 6 گره، مشابه یکی از این درختها است.

مسئله ۶-۸: تمام درختهای فراگیر گراف G را که در شکل ۲۳-۸ (الف) نشان داده شده است پیدا کنید. (یک درخت T یک درخت فراگیر گراف همبند G نامیده می شود اگر T دارای همان گره های گراف G باشد و تمام یال های T در بین یال های G باشد).



شکل ۲۳-۸

حل: هشت درخت فراگیر وجود دارد که در شکل ۲۳-۸ (ب) نشان داده شده است. از آنجا که G ، 4 گره دارد، هر درخت فراگیر T باید $3 = 4 - 1$ یال داشته باشد، بدین ترتیب هر درخت فراگیر را می توان با حذف 2 یال از 5 یال گراف G بدست آورد. این کار را می توان با 10 روش انجام داد بجز آنکه دو تا از آنها، منتهی به گراف ناهمبند می شود. از این رو هشت درخت فراگیر نشان داده شده همگی درخت فراگیر گراف G هستند.

نمایش ترتیبی Sequential گرافها

مسئله ۷-۸: گراف G شکل ۲۱-۸ را در نظر بگیرید. فرض کنید گره ها به صورت زیر در آرایه DATA در حافظه ذخیره شده اند:

DATA: X, Y, Z, W

(الف) ماتریس مجاورتی (همسایگی) گراف G را بدست آورید.

(ب) P ماتریس مسیر گراف G را با استفاده از توانهای مختلف ماتریس مجاورتی A بدست آورید.

(ج) آیا گراف G همبند قوی است؟

حل: (الف) معمولاً گره ها بر طبق روشی که در حافظه ظاهر می شوند مرتب می شوند، یعنی فرض می کنیم

$v_1 = X, v_2 = Y, v_3 = Z$ و $A \cdot v_4 = W$ ماتریس مجاورتی گراف G عبارت است از:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

از این رو $a_{ij} = 1$ اگر یک گره از v_i به v_j وجود داشته باشد در غیر اینصورت $a_{ij} = 0$.

(ب) چون G ، 4 گره دارد، A^2, A^3, A^4 و $B_4 = A + A^2 + A^3 + A^4$ را محاسبه کنید:

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad A^3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^4 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad B_4 = \begin{pmatrix} 0 & 5 & 6 & 8 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 3 & 5 \\ 0 & 2 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

اکنون با قراردادن $p_{ij} = 1$ به جای درایه غیر صفر ماتریس B_4 ، ماتریس مسیر P به دست می‌آید. بنابراین

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

(ج) ماتریس مسیر نشان می‌دهد که از v_2 به v_1 هیچ مسیری وجود ندارد. درواقع هیچ مسیری از هر گره به v_1 وجود ندارد. بنابراین گراف G همبند قوی نیست.

مسئله ۸-۸: گراف G شکل ۲۱-۸ و ماتریس مجاورتی آن A را که در مسئله ۷-۸ بدست آمد در نظر بگیرید. P ماتریس مسیر گراف G را با استفاده از الگوریتم وارشال بجای توانهای A پیدا کنید.

حل: ماتریسهای P_0, P_1, P_2, P_3 و P_4 را محاسبه کنید که در ابتدا $P_0 = A$ و

$$P_k[i, j] = P_{k-1}[i, j] \vee (P_{k-1}[i, k] \wedge P_{k-1}[k, j])$$

یعنی $P_k[i, j] = 1$ اگر $P_{k-1}[i, j] = 1$ یا $P_{k-1}[i, k] = 1$ و $P_{k-1}[k, j] = 1$ است.

در آن صورت:

$$P_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad P_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$P_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad P_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

ملاحظه می‌کنید که $P_0 = P_1 = P_2 = A$ تغییرات در P_3 به دلایل زیر صورت می‌گیرد:

$$P_2(3, 2) = 1 \text{ و } P_2(4, 3) = 1 \text{ چون } P_3(4, 2) = 1$$

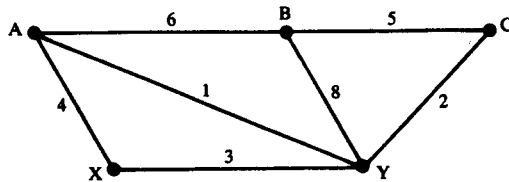
$$P_2(3, 4) = 1 \text{ و } P_2(4, 3) = 1 \text{ چون } P_3(4, 4) = 1$$

تغییرات در P_4 به‌طور مشابه صورت می‌گیرد. ماتریس آخر، P_4 ، ماتریس مسیر P موردنظر گراف G است.

مسئله ۸-۹: گراف وزن داده‌شده (بدون جهت) در شکل ۸-۲۴ را در نظر بگیرید. فرض کنید گره‌ها در آرایه DATA در حافظه به صورت زیر ذخیره شده‌اند.

DATA: A, B, C, X, Y

ماتریس وزن $W = (w_{ij})$ گراف G را پیدا کنید.



شکل ۸-۲۴

حل: فرض کنید $v_1 = A$, $v_2 = B$, $v_3 = C$, $v_4 = X$ و $v_5 = Y$ در نتیجه ماتریس وزن گراف G به صورت زیر است:

$$W = \begin{pmatrix} 0 & 6 & 0 & 4 & 1 \\ 6 & 0 & 5 & 0 & 8 \\ 0 & 5 & 0 & 0 & 2 \\ 4 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 1 & 8 & 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

در اینجا w_{ij} نمایش وزن یال از v_i به v_j است چون G بدون جهت است، W یک ماتریس متقارن است یعنی $w_{ij} = w_{ji}$.

مسئله ۸-۱۰: فرض کنید G یک گراف (بدون جهت) باشد که بدون دور یا بدون حلقه است. فرض کنید $P = (p_{ij})$ ماتریس مسیر G باشد.

(الف) چه وقت می‌توان یک یال $[v_i, v_j]$ به گراف G اضافه کرد طوری که G همچنان بدون دور یا بدون حلقه باقی بماند؟

(ب) هرگاه یک یال $[v_i, v_j]$ به G اضافه شود تغییرات ماتریس مسیر P چگونه است؟

حل : (الف) هرگاه یال $[v_i, v_j]$ به گراف G اضافه شود یک دور یا حلقه تشکیل می‌شود اگر و فقط اگر قبلاً یک مسیر بین v_i به v_j وجود داشته باشد. از این رو وقتی $p_{ij} = 0$ است می‌توان یال را به گراف G اضافه کرد.

(ب) نخست قرار دهید $p_{ij} = 1$ چون یال یک مسیر از v_i به v_j است. علاوه بر این قرار دهید $p_{si} = 1$ اگر $p_{si} = 1$ و $p_{jt} = 1$ به بیان دیگر اگر هم یک مسیر P_1 از v_s به v_i و هم یک مسیر P_2 از v_j به v_t وجود داشته باشد، آنگاه $P_1, [v_i, v_j], P_2$ یک مسیر از v_s به v_t تشکیل می‌دهد.

مسئله ۱۱-۸: یک درخت فراگیر حداقل T از یک گراف وزن داده شده G ، یک درخت فراگیر G (مسئله ۶-۸) است هرگاه در بین تمام درختهای فراگیر G حداقل وزن را داشته باشد.

(الف) یک الگوریتم برای پیدا کردن درخت فراگیر حداقل T از یک گراف وزن داده شده G ارائه دهید.

(ب) درخت فراگیر حداقل T گراف شکل ۲۴-۸ را پیدا کنید.

حل : (الف) **Algorithm P8.11:** This algorithm finds a minimum spanning tree T of a weighted graph G .

1. Order all the edges of G according to increasing weights.
2. Initialize T to be a graph consisting of the same nodes as G and no edges.
3. Repeat the following $M - 1$ times, where M is the number of nodes in G :
Add to T an edge E of G with minimum weight such that E does not form a cycle in T .
[End of loop.]
4. Exit.

این الگوریتم درخت فراگیر حداقل T گراف وزن داده شده G را پیدا می‌کند.

۱- تمام یال‌های G را بر طبق صعودی بودن وزن‌ها مرتب کنید.

۲- T را مقدار اولیه دهید تا یک گراف متشکل از همان گره‌های G و هیچ یال باشد.

۳- کارهای زیر را $M - 1$ مرتبه تکرار کنید که در آن M تعداد گره‌های G است: به T یک یال E از G با حداقل وزن را به گونه‌ای اضافه کنید که تشکیل یک دور یا حلقه در T را نمی‌دهند.

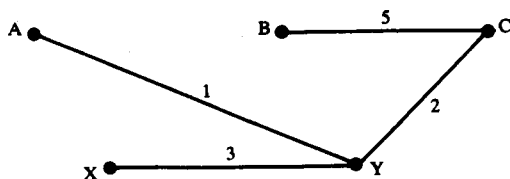
[پایان حلقه]

۴- پایان Exit.

مرحله ۳ را می‌توان با استفاده از نتیجه‌های مسئله ۱۰-۸ پیاده‌سازی کرد. مسئله ۱۰-۸ (الف) به ما می‌گوید که هر یال e را می‌توان طوری به T اضافه کرد که تشکیل هیچ دوری را ندهد یعنی طوری که T همچنان بدون دور باقی بماند. و مسئله ۱۰-۸ (ب) به ما می‌گوید که چگونه P ماتریس مسیر T را حفظ کنیم هنگامی که یال e به T اضافه می‌شود.

(ب) با استفاده از الگوریتم P8.11 درخت فراگیر حداقل T شکل ۲۵-۸ به دست می‌آید. هرچند $[A, X]$ وزن کمتری از $[B, C]$ دارد اما نمی‌توان $[A, X]$ را به T اضافه کرد چون با $[A, Y]$ و $[Y, X]$ یک دور

تشکیل خواهد شد.



شکل ۸-۲۵

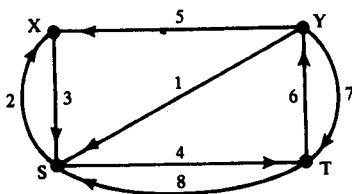
مسئله ۱۲-۸: فرض کنید گراف وزن داده شده G به وسیله آرایه گره‌ای $DATA$ و ماتریس وزن W به صورت زیر در حافظه نگهداری می‌شود:

$DATA: \quad X, Y, S, T$

$$W = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 & 0 \\ 5 & 0 & 1 & 7 \\ 2 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 6 & 8 & 0 \end{pmatrix}$$

تصویری از گراف G رسم کنید.

حل: تصویر این گراف در شکل ۸-۲۶ رسم شده است.



شکل ۸-۲۶

گره‌ها با درایه‌های $DATA$ برچسب‌گذاری شده‌اند. علاوه بر این اگر $w_{ij} \neq 0$ آنگاه یک یال از v_i به v_j با وزن w_{ij} وجود دارد. فرض کنید $S = v_3$, $Y = v_2$, $X = v_1$ و $T = v_4$ ، ترتیبی که در آن گره‌ها در آرایه $DATA$ ظاهر شده‌اند.

نمایش پیوندی گرافها

مسأله ۱۳-۸: گراف G به صورت زیر در حافظه ذخیره شده است:

NODE	A	B		E		D	C	
NEXT	7	4	0	6	8	0	2	3
ADJ	1	2		5		7	9	
	1	2	3	4	5	6	7	8

START = 1, AVAILN = 5

DEST	2	6	4		6	7	4		4	6
LINK	10	3	6	0	0	0	0	4	0	0
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

AVAIL = 8

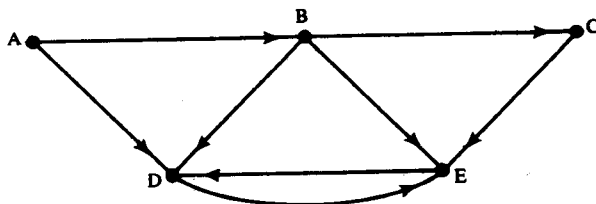
گراف G را رسم کنید.

حل: نخست همسایه‌های هر $NODE[K]$ را با پیمایش لیست مجاورتی آن پیدا می‌کنیم که اشاره‌گر $ADJ[K]$ دارد. نتیجه می‌شود:

E: 6(D) C: 4(E) A: 2(B) و 6(D)

D: 4(E) B: 6(D), 4(E) و 7(C)

آنگاه نمودار گراف را مانند شکل ۲۷-۸ رسم کنید.



شکل ۲۷-۸

مسأله ۱۴-۸: اگر عملیات زیر انجام شود تغییرات ایجاد شده در نمایش پیوندی گراف G مسأله ۱۳-۸ را تعیین کنید: (الف) گره F به G اضافه شود. (ب) یال (B,E) از G حذف شود، (ج) یال (A,F) به گراف G اضافه شود. گراف حاصل، G را رسم کنید.

حل: (الف) لیست گره مرتب شده نیست، بنابراین F با استفاده از نخستین گره آزاد موجود به صورت زیر به ابتدای لیست اضافه می شود:

START = 5	NODE	A	B		E	F	D	C	
AVAILN = 8	NEXT	7	4	0	6	1	0	2	3
	ADJ	1	2		5	0	7	9	
		1	2	3	4	5	6	7	8

ملاحظه می کنید که لیست یال تغییر نمی کند.

(ب) LOC = 4 گره E را از لیست مجاورتی گره B به صورت زیر حذف کنید:

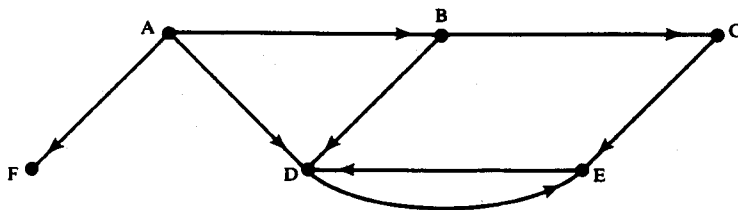
AVAIL = 3	DEST	2	6			6	7	4		4	6
	LINK	10	6		0	0	0	0	4	0	0
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

ملاحظه می کنید که لیست گره تغییر نمی کند.

(ج) با استفاده از نخستین یال آزاد موجود، مکان LOC = 5 گره F به ابتدای لیست مجاورتی گره A اضافه می شود. تغییرات به صورت زیر هستند:

ADJ[1] = 3	DEST	2	6	5		6	7	4		4	6
AVAILE = 8	LINK	10	6	1	0	0	0	0	4	0	0
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

تنها تغییر در لیست گره 3 = ADJ[1] است. ملاحظه می کنید که مناطق سایه زده شده تغییرات درون لیستها را بیان می کنند. گراف تازه شده G در شکل ۸-۲۸ نشان داده شده است.



شکل ۸-۲۸

مسأله ۱۵-۸: فرض کنید گراف G در حافظه به صورت

GRAPH(NODE, NEXT, ADJ, START, DEST, LINK)

نگهداری می‌شود. یک زیربرنامه **Procedure** بنویسید که درجه ورودی **INDEG** و درجه خروجی **OUTDEG** هر گره G را پیدا کند.

حل: نخست با استفاده از اشاره گر **PTR** به منظور مقدار اولیه صفر دادن به آرایه‌های **INDEG** و **OUTDEG** لیست گره را پیمایش می‌کنیم. آنگاه با استفاده از اشاره گر **PTRA** همچنین برای هر مقدار **PTRA** لیست گره را پیمایش می‌کنیم و با استفاده از اشاره گر **PTRB**، همسایه‌های **NODE[PTRA]** را پیمایش می‌کنیم. هر باری که یک یال ملاقات می‌شود **PTRA** مکان گره ابتدایی آن و **DEST[PTRB]** مکان گره انتهایی آن را به دست می‌دهد. برطبق آن هر یال آرایه‌های **INDEG** و **OUTDEG** را به صورت زیر تازه می‌کند:

OUTDEG[PTRA] := OUTDEG[PTRA] + 1

و

INDEG[DEST[PTRB]] := INDEG[DEST[PTRB]] + 1

بیان رسمی زیربرنامه **Procedure** به صورت زیر است:

Procedure P8.15: **DEGREE(NODE, NEXT, ADJ, START, DEST, LINK, INDEG, OUTDEG)**
This procedure finds the indegree **INDEG** and outdegree **OUTDEG** of each node in the graph G in memory.

1. [Initialize arrays **INDEG** and **OUTDEG**.]
 - (a) Set **PTR** := **START**.
 - (b) Repeat while **PTR** ≠ **NULL**: [Traverses node list.]
 - (i) Set **INDEG[PTR]** := 0 and **OUTDEG[PTR]** := 0.
 - (ii) Set **PTR** := **NEXT[PTR]**.
- [End of loop.]
2. Set **PTRA** := **START**.
3. Repeat Steps 4 to 6 while **PTRA** ≠ **NULL**: [Traverses node list.]
4. Set **PTRB** := **ADJ[PTRA]**.
5. Repeat while **PTRB** ≠ **NULL**: [Traverses list of neighbors.]
 - (a) Set **OUTDEG[PTRA]** := **OUTDEG[PTRA] + 1** and **INDEG[DEST[PTRB]]** := **INDEG[DEST[PTRB]] + 1**.
 - (b) Set **PTRB** := **LINK[PTRB]**.
- [End of inner loop using pointer **PTRB**.]
6. Set **PTRA** := **NEXT[PTRA]**.
- [End of Step 3 outer loop using the pointer **PTRA**.]
7. Return.

مسأله ۱۶-۸: فرض کنید G یک گراف بدون جهت متناهی باشد. آنگاه G متشکل از تعداد متناهی مؤلفه همبند جدا از هم است. الگوریتمی را بیان کنید که تعداد **NCOMP** مؤلفه‌های همبند گراف G را پیدا کند.

علاوه بر این الگوریتم باید یک تعداد مؤلفه $COMP(N)$ به هر گره N در یک مؤلفه همبند جایگزین کند طوری که تعداد مؤلفه‌ها از 1 تا $NCOMP$ تغییر کند.

حل: ایده اصلی الگوریتم آن است که برای پیدا کردن تمام گره‌های N که از گره آغازین A قابل دسترس است و در آنها تعداد مؤلفه یکسان را جایگزین می‌کند از جستجوی عرضی یا جستجوی عمقی استفاده کند، الگوریتم به صورت زیر است:

Algorithm P8.16: Finds the connected components of an undirected graph G .

1. Initially set $COMP(N) := 0$ for every node N in G , and initially set $L := 0$.
2. Find a node A such that $COMP(A) = 0$. If no such node A exists, then:
Set $NCOMP := L$, and Exit.
Else:
Set $L := L + 1$ and set $COMP(A) := L$.
3. Find all nodes N in G which are reachable from A (using a breadth-first search or a depth-first search) and set $COMP(N) = L$ for each such node N .
4. Return to Step 2.

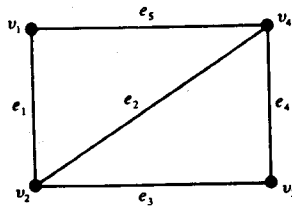
مسئله‌های گوناگون

مسئله ۱۷-۸: فرض کنید G یک گراف بدون جهت با m گره v_1, v_2, \dots, v_m و n یال e_1, e_2, \dots, e_n باشد.

آنگاه ماتریس برخورد گراف G ماتریس $m \times n$ ای مانند $M = (m_{ij})$ است که در آن

$$m_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{اگر گره } v_i \text{ به یال } e_j \text{ تعلق داشته باشد} \\ 0 & \text{در غیر اینصورت} \end{cases}$$

M ماتریس برخورد گراف G شکل ۸-۲۹ را بدست آورید.



شکل ۸-۲۹

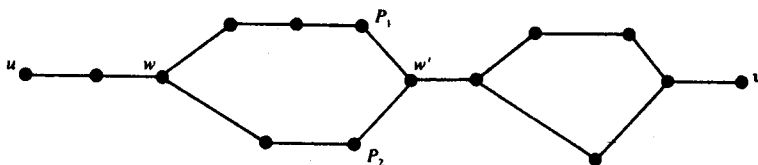
حل: چون G ، 4 گره و 5 یال دارد، M یک ماتریس 4×5 است. اگر v_i به e_j تعلق داشت قرار دهید $m_{ij} = 1$. این عمل ماتریس M زیر را نتیجه می‌دهد:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

مسئله ۱۸-۸: فرض کنید u و v گره‌هایی مجزا در یک گراف بدون جهت G باشند.

ثابت کنید:

- (الف) اگر یک مسیر از u به v وجود داشته باشد آنگاه یک مسیر ساده Q از u به v وجود دارد.
 (ب) اگر دو مسیر مجزا P_1 و P_2 از u به v وجود داشته باشد، آنگاه G شامل یک دور یا حلقه است.



شکل ۳۰-۸

(الف) فرض کنید $P = (v_0, v_1, \dots, v_n)$ باشد که در آن $u = v_0$ و $v = v_n$. اگر $v_1 = v_j$ آنگاه

$$P' = (v_0, \dots, v_j, v_{j+1}, \dots, v_n)$$

یک مسیر از u به v است که کوتاه‌تر از P است. با تکرار این عمل، نهایتاً مسیر Q از u به v بدست می‌آید که گره‌هایش متمایز هستند. بدین ترتیب Q یک مسیر ساده از u به v است.

(ب) فرض کنید w یک گره در P_1 و P_2 باشد به گونه‌ای که گره‌های بعدی در P_1 و P_2 متمایز هستند. فرض کنید w' نخستین گره بعد از w باشد که روی هر دو P_1 و P_2 قرار داشته باشد. (شکل ۳۰-۸ را ببینید). آنگاه زیرمسیرهای P_1 و P_2 بین w و w' هیچ گره مشترکی ندارند بجز w و w' . از این رو این دو زیرمسیر تشکیل یک دور یا حلقه را می‌دهند.

مسئله ۱۹-۸: قضیه ۲-۸ را ثابت کنید: فرض کنید A ماتریس مجاورت گراف G باشد. آنگاه $a_k(i, j)$ درایه ij ام در ماتریس A^k تعداد مسیرهایی از v_i به v_j را بدست می‌دهد که طول K دارند.

حل: با استقراء روی K قضیه را ثابت می‌کنیم. نخست توجه دارید که یک مسیر به طول ۱ از v_i به v_j دقیقاً یک یال (v_i, v_j) است. بنابه تعریف ماتریس مجاورت A ، $a_1(i, j) = a_{ij}$ ، تعداد یالهایی از v_i به v_j را نتیجه می‌دهد. از این رو قضیه برای $K = 1$ درست است. فرض کنید $K > 1$. (فرض می‌شود G ، m گره دارد). از آنجا که $A^k = A^{k-1} A$

$$a_k(i, j) = \sum_{s=1}^m a_{k-1}(i, s) a_1(s, j)$$

بنابه تعریف استقراء $a_{k-1}(i, s)$ تعداد مسیرهای به طول $K-1$ از v_i به v_s را بدست می‌دهد، $a_1(s, j)$ تعداد مسیرهای به طول ۱ از v_s به v_j را بدست می‌دهد. بنابراین $a_k(i, j)$ تعداد

مسیرهای به طول K از v_1 به v_j را به دست می‌دهد که در آن v_s گره مانده به آخرین گره است. بدین ترتیب تمام مسیرهای به طول K از v_1 به v_j را می‌توان با جمع $a_1(s, j) + a_k(l, s)$ به ازای تمام S به دست آورد. یعنی $a_k(l, j)$ تعداد مسیرهای به طول K از v_1 به v_j است. بدین ترتیب اثبات قضیه به پایان می‌رسد.

مسأله ۲۰-۸: فرض کنید G یک گراف بدون جهت متناهی بدون دور یا بدون حلقه باشد. هر یک از احکام زیر را ثابت کنید:

(الف) اگر G حداقل یک یال داشته باشد، آنگاه G یک گره v با درجه ۱ دارد.

(ب) اگر G همبند باشد طوری که G یک درخت باشد و اگر G ، m گره داشته باشد آنگاه G ، $m-1$ یال دارد.

(ج) اگر G ، m گره و $m-1$ یال داشته باشد آنگاه G یک درخت است.

حل: (الف) فرض کنید $P = (v_0, v_1, \dots, v_n)$ یک مسیر ساده با حداقل طول باشد. فرض کنید $\deg(v_0) \neq 1$ و فرض کنید $[u, v_0]$ یک یال و $u \neq v_1$ باشد. اگر $u = v_1$ به ازای $i > 1$ باشد آنگاه $C = (v_1, v_0, \dots, v_i)$ یک دور یا حلقه است. اگر $u \neq v_1$ ، آنگاه $P' = (u, v_0, \dots, v_n)$ یک مسیر ساده با طول بزرگتر از P است و هر حالت منتهی به یک تناقض می‌شود. از این رو $\deg(v_0) = 1$.

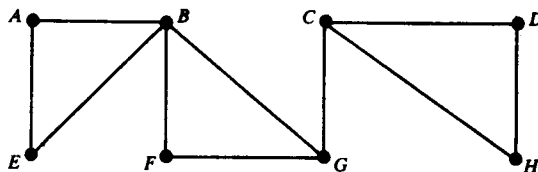
(ب) این حکم را با استقراء روی m ثابت می‌کنیم. فرض کنید $m = 1$ باشد. آنگاه G از یک گره منفرد تشکیل می‌شود و $0 = m-1$ یال دارد. بنابراین نتیجه برای $m = 1$ برقرار است، فرض کنید $m > 1$ ، آنگاه G یک گره v دارد به طوری که $\deg(v) = 1$ و تنها یال آن $[v, v']$ را از گراف G حذف کنید تا گراف G' بدست آید. آنگاه G همچنان همبند باقی می‌ماند و G یک درخت با $m-1$ گره است. بنابه استقراء G' ، $m-2$ یال دارد. از این رو G دارای $m-1$ یال است. بدین ترتیب نتیجه برقرار است.

(ج) فرض کنید T_1, T_2, \dots, T_m نمایش دهنده مؤلفه‌های همبند گراف G باشند. آنگاه هر T_i یک درخت است. از این رو هر T_i یک گره بیشتر از یالها دارد. از این رو G ، S گره بیشتر از یالها دارد. اما G تنها یک گره بیشتر از یالها دارد. از این رو $S = 1$ است و G یک درخت است.

مسأله‌های تکمیلی

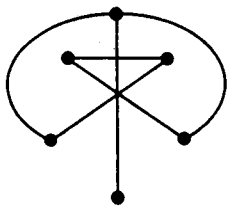
چند اصطلاح نظریه گراف

مسأله ۲۱-۸: گراف بدون جهت شکل ۳۱-۸ را در نظر بگیرید. مطلوب است تعیین (الف) تمام مسیرهای ساده از گره A به گره H (ب) قطر گراف G و (ج) درجه هر گره.

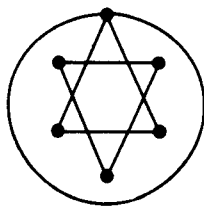


شکل ۸-۳۱

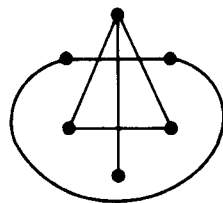
مسئله ۸-۲۲: کدامیک از گرافهای چندگانه شکل ۸-۳۲ (الف) همبند (ب) بدون حلقه (ج) گراف می‌باشند.



(iii)



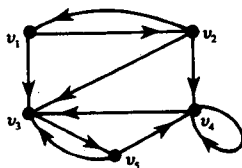
(ii)



(i)

شکل ۸-۳۲

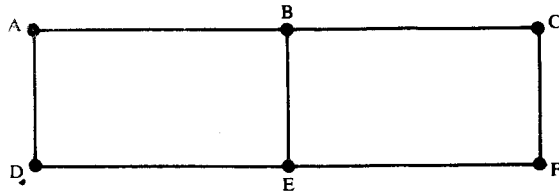
مسئله ۸-۲۳: گراف جهت دار G شکل ۸-۳۳ را در نظر بگیرید. (الف) درجه ورودی و درجه خروجی هر گره را پیدا کنید (ب) تعداد مسیرهای ساده از v_1 به v_4 را به دست آورید. (ج) آیا گراف منبع یا چشمه دارد؟



شکل ۸-۳۳

مسئله ۸-۲۴: تمام درختهای (غیر مشابه) با S یا تعداد کمتر گره را رسم کنید. (هشت درخت از این نوع وجود دارد.)

مسئله ۸-۲۵: تعداد درختهای فراگیر گراف G شکل ۸-۳۴ را پیدا کنید.



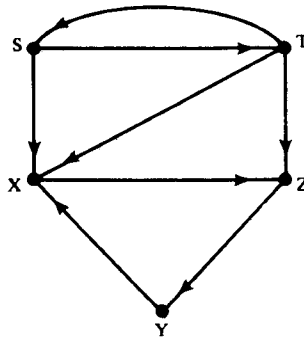
شکل ۸-۳۴

نمایش ترتیبی گرافها، گرافهای وزن داده شده

مسئله ۸-۲۶: گراف G شکل ۸-۳۵ را در نظر بگیرید. فرض کنید گره‌ها در آرایه $DATA$ به صورت زیر در حافظه ذخیره می‌شوند.

$DATA: \quad X, Y, Z, S, T$

(الف) A ماتریس مجاورت گراف G را به دست آورید. (ب) P ماتریس مسیر گراف G را بدست آورید. (ج) آیا گراف G همبند قوی است؟

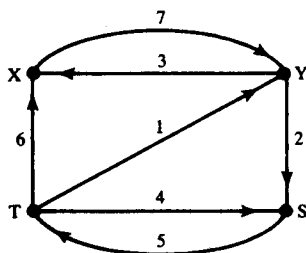


شکل ۸-۳۵

مسئله ۸-۲۷: گراف وزن داده شده G شکل ۸-۳۶ را در نظر بگیرید. فرض کنید گره‌ها در آرایه $DATA$ به صورت زیر در حافظه ذخیره می‌شوند.

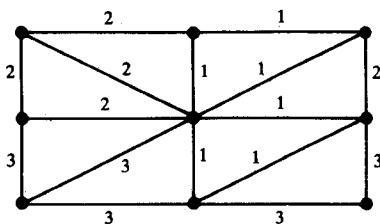
$DATA: \quad X, Y, S, T$

(الف) ماتریس وزن W گراف G را بدست آورید. (ب) Q کوتاهترین مسیر را با استفاده از الگوریتم 8.2 و ارشال بدست آورید.



شکل ۸-۳۶

مسئله ۸-۲۸: درخت فراگیر حداقلی گراف G شکل ۸-۳۷ را بدست آورید.



شکل ۸-۳۷

مسئله ۸-۲۹: ماتریس زیر ماتریس برخورد M گراف بدون جهت G است.

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

توجه دارید که G دارای ۵ گره و ۸ یال است. گراف G را رسم کنید و A ماتریس مجاورت آن را آورید.

مسئله ۸-۳۰: ماتریس زیر ماتریس مجاورت A گراف بدون جهت G است.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

توجه دارید که G ، ۵ گره دارد، گراف G را رسم کنید و ماتریس برخورد M آن را تعیین کنید.

نمایش پیوندی گرافها

مسئله ۳۱-۸: فرض کنید گراف G به صورت زیر در حافظه ذخیره شده است:

NODE	A		C	E		D		B
NEXT	4	0	8	0	7	3	2	1
ADJ	6		1	10		2		9

1 2 3 4 5 6 7 8

START = 6, AVAILN = 5

DEST	8	8		1	4	3	3		6	3
LINK	5	7	8	0	0	0	0	0	4	0

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10

AVAILE = 3

گراف G را رسم کنید.

مسئله ۳۲-۸: در مسئله ۳۱-۸ اگر یال (C,E) حذف شود و یال (D,E) اضافه شود تغییری، که در

نمایش پیوندی گراف G ایجاد می شود را تعیین کنید.

مسئله ۳۳-۸: در مسئله ۳۱-۸ اگر گره F و یال (E,F) و (F,D) به G اضافه شوند تغییری که در نمایش

پیوندی گراف G ایجاد می شود را تعیین کنید.

مسئله ۳۴-۸: در مسئله ۳۱-۸ اگر گره B از گراف G حذف شود تغییری را که در نمایش پیوندی گراف

G ایجاد می شود تعیین کنید.

مسئله های ۳۳-۸ تا ۳۸-۸ از ارتباط با گراف G هستند که به وسیله نمایش پیوندی در حافظه ذخیره می شود:

GRAPH[NODE, NEXT, ADJ, START, AVAILN, DEST, LINK, AVAILE]

مسئله ۳۵-۸: یک زیر برنامه Procedure برای انجام هر یک از عملیات زیر بنویسید:

(الف) لیست گره های بعدی گره معلوم ND را چاپ کند.

(ب) لیست گره های قبلی گره معلوم ND را چاپ کند.

مسئله ۳۶-۸: زیر برنامه ای بنویسید که معین کند آیا G گراف بدون جهت است یا خیر؟

مسئله ۳۷-۸: زیر برنامه ای بنویسید که M تعداد گره های گراف G را پیدا کند و بدنبال آن A ماتریس

مجاورت $M \times M$ گراف G را تعیین کند. گره ها با توجه به ترتیبشان در لیست گره G مرتب شده اند.

مسئله ۳۸-۸: زیر برنامه ای بنویسید که معین کند آیا در گراف G منبع یا چشمه ای وجود دارد یا خیر؟

مسئله‌های ۳۹-۸ تا ۴۰-۸ در ارتباط با گراف وزن داده شده G هستند که با استفاده از نمایش پیوندی به صورت زیر در حافظه ذخیره می‌شود:

GRAPH(NODE, NEXT, ADJ, START, AVAILN, WEIGHT, DEST, LINK, AVAIL)

مسئله ۳۹-۸: زیربرنامه‌ای بنویسید که کوتاهترین مسیر از گره NA معلوم را تا گره معلوم NB پیدا کند.

مسئله ۴۰-۸: زیربرنامه‌ای بنویسید که طولانی‌ترین مسیر ساده از گره معلوم NA تا گره معلوم NB را پیدا کند.

برای مسئله‌های زیر برنامه بنویسید

مسئله ۴۱-۸: فرض کنید گراف G به وسیله عدد صحیح M که نمایش گره‌های $1, 2, \dots, M$ است و یک لیست از N زوج مرتب از اعداد صحیح که نمایش یال‌های گراف G است به عنوان ورودی برنامه داده می‌شود. زیربرنامه‌ای برای هر یک از عملیات زیر بنویسید:

(الف) ماتریس مجاورت $M \times M$ گراف G را پیدا کند.

(ب) با استفاده از ماتریس مجاورت A و الگوریتم وارشال، P ماتریس مسیر گراف G را پیدا کنید.

زیربرنامه بالا را با استفاده از داده‌های زیر آزمایش کنید.

$$M = 5; N = 8; (3, 4), (5, 3), (2, 4), (1, 5), (3, 2), (4, 2), (3, 1), (5, 1), \quad (i)$$

$$M = 6; N = 10; (1, 6), (2, 1), (2, 3), (3, 5), (4, 5), (4, 2), (2, 6), (5, 3), (4, 3), (6, 4) \quad (ii)$$

مسئله ۴۲-۸: فرض کنید گراف وزن داده شده G به وسیله عدد صحیح M که نمایش گره‌های $1, 2, \dots, M$ است و یک لیست از N سه تایی مرتب (a_i, b_i, w_i) از اعداد صحیح به عنوان ورودی برنامه داده می‌شود به طوری که زوج (a_i, b_i) یک یال G و w_i وزن آن است، زیربرنامه‌ای برای هر یک از عملیات زیر بنویسید:

(الف) W ماتریس وزن $M \times M$ گراف G را پیدا کنید.

(ب) با استفاده از ماتریس وزن W و الگوریتم وارشال 8.2، Q ماتریس کوتاهترین مسیر بین گره‌ها را پیدا کنید.

زیربرنامه بالا را با استفاده از داده‌های زیر آزمایش کنید.

$$M = 4; N = 7; (1, 2, 5), (2, 4, 2), (3, 2, 3), (1, 1, 7), (4, 1, 4), (4, 3, 1). \quad (\text{Compare with Example 8.4}) \quad (i)$$

$$M = 5; N = 8; (3, 5, 3), (4, 1, 2), (5, 2, 2), (1, 5, 5), (1, 3, 1), (2, 4, 1), (3, 4, 4), (5, 4, 4). \quad (ii)$$

مسئله ۴۳-۸: فرض کنید گراف خالی G با استفاده از نمایش پیوندی زیر در حافظه ذخیره می‌شود:

GRAPH(NODE, NEXT, ADJ, START, AVAILN, DEST, LINK, AVAIL)

فرض کنید $NODE$ فضایی برای ۸ گره و $DEST$ فضایی برای ۱۲ یال در اختیار دارد. برنامه‌ای بنویسید که عملیات زیر را روی گراف G اجرا کند:

(الف) گره‌های A, B, C و D را از ورودی بگیرد.

(ب) یال‌های $(A, B), (A, C), (C, B), (D, A), (B, D)$ و (C, D) را از ورودی بگیرد.

(ج) گره‌های E, F را از ورودی بگیرد.

	CITY	LEFT	RIGHT	ADJ
1	Atlanta	0	2	12
2	Boston	0	0	1
3	Houston	0	0	14
4	New York	3	8	4
5		6		
6		0		
7	Washington	0	0	10
8	Philadelphia	0	7	6
9	Denver	10	4	8
10	Chicago	1	0	2

START = 9, AVAILN = 5

	NUMBER	PRICE	ORIG	DEST	LINK
1	201	80	2	10	3
2	202	80	10	2	0
3	301	50	2	4	0
4	302	50	4	2	5
5	303	40	4	8	7
6	304	40	8	4	9
7	305	120	4	9	0
8	306	120	9	4	13
9	401	40	8	7	0
10	402	40	7	8	11
11	403	80	7	1	0
12	404	80	1	7	16
13	501	80	9	3	15
14	502	80	3	9	0
15	503	140	9	1	0
16	504	140	1	9	0
17					18
18					19
19					20
20					0

(د) یال‌های (F, B), (D, F), (F, E), (B, E) و (F, B) را از ورودی بگیرد.

(ه) یال‌های (D, A) و (B, D) را حذف کند.

(و) گره A را حذف کند.

مسئله‌های ۴۴-۸ تا ۴۸-۸ در ارتباط با داده‌های شکل ۳۸-۸ هستند که در آن شهرها به صورت درخت جستجوی دودویی ذخیره می‌شوند.

مسئله ۴۴-۸: زیربرنامه‌ای با ورودی CITYA و CITYB بنویسید که با فرض وجود پرواز، شماره پرواز و هزینه پرواز از شهر A به شهر B را پیدا کند. زیربرنامه را با استفاده از (الف) CITYA = Chicago, CITYB = Boston؛ (ب) CITYA = Washington, CITYB = Denver؛ و (ج) CITYA = New York, CITYB = Philadelphia آزمایش کنید.

مسئله ۴۵-۸: زیربرنامه‌ای با ورودی CITYA و CITYB بنویسید که مسیر پرواز از شهر A به شهر B را با حداقل تعداد توقف پیدا کند همچنین هزینه آن را محاسبه کند. زیربرنامه را با استفاده از (الف) CITYA = Boston, CITYB = Houston؛ (ب) CITYA = Washington, CITYB = Denver؛ و (ج) CITYA = New York, CITYB = Atlanta آزمایش کنید.

مسئله ۴۶-۸: زیربرنامه‌ای با ورودی CITYA و CITYB بنویسید که ارزان‌ترین مسیر پرواز از شهر A به شهر B را پیدا کند علاوه بر این هزینه آن را محاسبه کند. زیربرنامه را با استفاده از داده‌های مسئله ۴۵-۸ آزمایش کنید. نتیجه‌ها را با هم مقایسه کنید.

مسئله ۴۷-۸: زیربرنامه‌ای بنویسید که یک رکورد را از فایلی که شماره پرواز NUMB را به دست می‌دهد حذف کند. برنامه را با استفاده از (الف) NUMB = 503 و NUMB = 504 و (ب) NUMB = 303 و NUMB = 304 آزمایش کنید.

مسئله ۴۸-۸: زیربرنامه‌ای بنویسید که به عنوان ورودی رکورد زیر

(NUMBNEW, PRICENEW, ORIGNEW, DESTNEW)

را دریافت کند. زیربرنامه را با استفاده از داده‌های زیر آزمایش کنید.

(الف) NUMBNEW = 505, PRICENEW = 80, ORIGNEW = Chicago, DESTNEW = Denver
NUMBNEW = 506, PRICENEW = 80, ORIGNEW = Denver, DESTNEW = Chicago

(ب) NUMBNEW = 601, PRICENEW = 70, ORIGNEW = Atlanta, DESTNEW = Miami
NUMBNEW = 602, PRICENEW = 70, ORIGNEW = Miami, DESTNEW = Atlanta

توجه دارید که یک شهر جدید ممکن است به درخت جستجوی دودویی شهرها اضافه شود.

مسئله ۴۹-۸: الگوریتم مرتب سازی موضعی را به یک برنامه تبدیل کنید طوری که یک گراف G را

مرتب کند. فرض کنید G از طریق مجموعه گره‌ها V و مجموعه یالها E به عنوان ورودی داده شده است.

برنامه را با استفاده از گره‌های A, B, C, D, X, Y, Z, S و یالهای

(الف) $(Z, B), (S, C), (Z, X), (Y, X), (C, B), (B, T), (X, D), (S, Z), (A, Z)$

(ب) $(X, T), (C, S), (B, A), (X, S), (C, T), (S, Y), (Y, B), (A, X), (D, Y), (A, Z)$

(ج) $(X, A), (T, Y), (Z, Y), (B, T), (A, S), (D, Z), (Z, X), (Y, A), (B, Z), (A, C)$

آزمایش کنید.

مسئله ۵۰-۸: برنامه‌ای بنویسید که تعداد مؤلفه‌های همبند گراف نامرتب G را پیدا کند و همچنین

شماره مؤلفه را در هر یک از گره‌های آن جایگزین کند. فرض می‌شود G به وسیله مجموعه گره‌های V

و مجموعه یالهای (بدون جهت) آن E وارد کامپیوتر شده است. برنامه را با استفاده از گره‌های

A, B, C, D, X, Y, Z, S و یالهای

(الف) $[X, S], [D, B], [Z, A], [A, S], [D, T], [S, Z], [Y, C], [B, T], [A, X]$

(ب) $[S, Z], [T, B], [Y, B], [X, S], [D, T], [S, C], [A, X], [D, B], [Z, C]$

اجرا کنید.

فصل ۹

مرتب کردن و جستجوی اطلاعات

۹-۱ مقدمه

مرتب کردن و جستجوی اطلاعات از عملیات اساسی و اصلی علم کامپیوتر است. مرتب کردن عبارت است از عمل تجدید آرایش داده‌ها با یک ترتیب مشخص، مثلاً برای داده‌های عددی، ترتیب صعودی یا نزولی اعداد یا برای داده‌های کاراکتری ترتیب الفبایی آنها. جستجو کردن عبارت است از عمل پیدا کردن مکان یک عنصر داده شده در بین مجموعه‌ای از عناصر.

برای مرتب کردن و جستجوی اطلاعات الگوریتم‌های متعددی وجود دارد. بعضی از آنها نظیر HeapSort و جستجوی دودویی قبلاً در طول کتاب مورد بحث و بررسی قرار گرفته است. الگوریتم خاصی که برای این منظور انتخاب می‌شود بستگی به خصوصیات داده‌ها و خصوصیات عملیاتی دارد که ممکن است روی داده‌ها انجام شود. بنابراین می‌خواهیم پیچیدگی هر الگوریتم را تعیین کنیم یعنی مایل هستیم زمان اجرا، $f(n)$ هر الگوریتم را به صورت تابعی از n تعداد داده‌های ورودی به دست آوریم. گاهی اوقات علاوه بر آن، حافظه مورد نیاز الگوریتم‌ها را مورد توجه و بررسی قرار می‌دهیم.

مرتب کردن و جستجوی اطلاعات، اغلب روی یک فایل از رکوردها بکار می‌رود، از این رو لازم است چند اصطلاح استاندارد را یادآوری کنیم. هر رکورد در یک فایل F می‌تواند شامل چند فیلد باشد اما فیلد ویژه‌ای وجود دارد که مقدارهای آن بطور منحصراً فردی، رکوردهای داخل فایل را معین می‌کنند. چنین

فیلدی K یک کلید اولیه یا اصلی و مقادیر k_1, k_2, \dots, k_m چنین فیلدی کلیدها یا مقادیر کلیدی نامیده می‌شود. مرتب‌کردن فایل F معمولاً به مرتب‌کردن F نسبت به کلید اولیه خاصی گفته می‌شود و جستجوی اطلاعات در F به جستجوی رکورد با مقدار کلیدی معین گفته می‌شود.

در این فصل نخست الگوریتم‌های مرتب‌کردن بررسی می‌شود و آنگاه الگوریتم‌های جستجوی اطلاعات مورد بحث قرار می‌گیرد. لازم به تذکر است که در بعضی از کتابها، جستجوی اطلاعات قبل از مرتب‌کردن آورده می‌شود.

۲-۹ مرتب‌کردن

فرض کنید A یک لیست n عنصری از A_1, A_2, \dots, A_n در حافظه باشد. منظور از مرتب‌کردن A ، عمل تجدید آرایش محتوای A است به طوری که با ترتیب صعودی (عددی یا فرهنگ لغتی) باشند یعنی طوری که

$$A_1 \leq A_2 \leq A_3 \leq \dots \leq A_n$$

چون A دارای n عنصر است با $n!$ طریق که محتویات A می‌تواند مقادیر مختلف بگیرد. این روشها دقیقاً متناظر با $n!$ جایگشت اعداد $1, 2, \dots, n$ است. بنابراین الگوریتم مرتب‌کردن باید این $n!$ حالت ممکن را در نظر بگیرد.

مثال ۱-۹

فرض کنید آرایه DATA شامل ۸ عنصر به شرح زیر است:

DATA: 77, 33, 44, 11, 88, 22, 66, 55

پس از مرتب‌کردن، DATA باید در حافظه به صورت زیر درآید:

DATA: 11, 22, 33, 44, 55, 66, 77, 88

از آنجا که DATA شامل ۸ عنصر است، به تعداد $8! = 40320$ طریق مختلف اعداد 11, 22, ..., 88 می‌توانند در DATA ظاهر شود.

پیچیدگی الگوریتم‌های مرتب‌کردن

پیچیدگی الگوریتم مرتب‌کردن، زمان اجرای الگوریتم را به صورت تابعی از n تعداد عنصرهایی که قرار است مرتب شود اندازه می‌گیرد. متذکر می‌شویم که هر الگوریتم مرتب‌کردن S از عملیات زیر تشکیل می‌شود که در آن A_1, A_2, \dots, A_n شامل عناصری است که قرار است مرتب شوند و B مکان کمکی است:

(الف) مقایسه‌ها، که آزمایش می‌کند آیا $A_i < A_j$ یا $A_i < B$ است یا خیر.

(ب) جابجایی‌ها، که محتوای A_i و A_j یا محتوای A_i و B را جابجا می‌کند.

(ج) جایگزینی‌ها، که قرار می‌دهد $A_i = B$ و آنگاه قرار می‌دهد $A_j = A_i$.

معمولاً، تابع پیچیدگی تنها تعداد مقایسه‌ها را اندازه می‌گیرد، چون تعداد عملیات دیگر تقریباً برابر ضرب ثابتی از تعداد مقایسه‌ها است.

دو حالت اصلی وجود دارد که پیچیدگی آن مورد توجه قرار می‌گیرد که عبارتند از بدترین حالت و حالت میانگین. در مطالعه حالت میانگین این فرض احتمالی را در نظر می‌گیریم که تمام n جایگشت دارای احتمال وقوع یکسان هستند. دانشجو می‌تواند برای بحث مشروح پیچیدگی به بخش ۵-۲ مراجعه کند.

قبل از این، مرتب‌کردن حبابی (بخش ۹-۴)، مرتب‌کردن QuickSort (بخش ۵-۶) و HeapSort (بخش ۱۰-۷) مورد مطالعه قرار گرفته است. تعداد تقریبی مقایسه‌ها و ترتیب پیچیدگی این الگوریتم‌ها به‌طور خلاصه در جدول زیر ارائه شده است:

Algorithm	Worst Case	Average Case
Bubble Sort	$\frac{n(n-1)}{2} = O(n^2)$	$\frac{n(n-1)}{2} = O(n^2)$
Quicksort	$\frac{n(n+3)}{2} = O(n^2)$	$1.4n \log n = O(n \log n)$
Heapsort	$3n \log n = O(n \log n)$	$3n \log n = O(n \log n)$

نخست توجه کنید که مرتب‌کردن حبابی روش بسیار کندی است. مزیت اصلی آن در سادگی الگوریتم آن است، ملاحظه کنید که پیچیدگی حالت میانگین $(n \log n)$ مرتب‌کردن HeapSort برابر پیچیدگی QuickSort است، اما پیچیدگی بدترین حالت آن $(n \log n)$ به نظر سریع‌تر از QuickSort، (n^2) می‌آید. با وجود این، بطور تجربی آشکار است که به جز در موارد نادر QuickSort بهتر و برتر از HeapSort است.

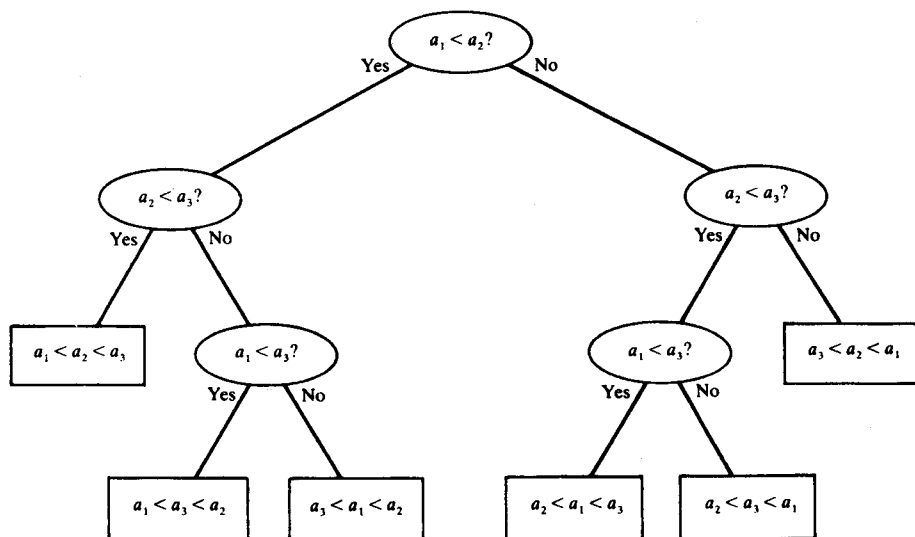
کرانه‌های پائین

دانشجو ممکن است سؤال کند آیا الگوریتمی وجود دارد که بتواند n عنصر را در زمانی کمتر از $O(n \log n)$ مرتب کند. جواب منفی است. دلیل آن در زیر ارائه شده است:

فرض کنید S الگوریتمی باشد که n عنصر a_1, a_2, \dots, a_n را مرتب می‌کند. فرض می‌کنیم یک درخت تصمیم‌گیری T متناظر با الگوریتم S وجود دارد به طوری که T یک درخت جستجوی دودویی

گسترش یافته است که در آن گره‌های خارجی متناظر با $n!$ طریقی است که n عنصر می‌توانند در حافظه ظاهر شوند و گره‌های داخلی در آن متناظر با مقایسه‌های مختلفی است که ممکن است هنگام اجرای الگوریتم S انجام شود. آنگاه تعداد مقایسه‌ها در بدترین حالت برای الگوریتم S برابر طول طولانی‌ترین مسیر در درخت تصمیم‌گیری T یا به بیان دیگر عمق D درخت T است. علاوه بر این میانگین تعداد مقایسه‌ها برای الگوریتم S برابر \bar{E} میانگین طول مسیر خارجی درخت T است.

شکل ۹-۱ درخت تصمیم‌گیری T را برای مرتب کردن $n = 3$ عنصر نشان می‌دهد.



شکل ۹-۱ درخت تصمیم‌گیری برای مرتب کردن $n = 3$ عنصر

ملاحظه می‌کنید که T دارای $3! = 6$ گره خارجی است. مقادیر D و \bar{E} برای این درخت عبارتند از:

$$\bar{E} = \frac{1}{6} (2 + 3 + 3 + 3 + 3 + 2) = 2.667 \quad \text{و} \quad D = 3$$

در نتیجه الگوریتم S متناظر با آن (در بدترین حالت) به حداکثر $D = 3$ مقایسه احتیاج دارد و در حالت میانگین به $\bar{E} = 2.667$ مقایسه جهت مرتب‌کردن $n = 3$ عنصر احتیاج دارد. بنابراین مطالعه پیچیدگی بدترین حالت و حالت میانگین یک الگوریتم مرتب‌کردن S، به مطالعه مقادیر D و \bar{E} در درخت تصمیم‌گیری متناظر با آن منتهی می‌شود. با وجود این، نخست چند واقعیت در زمینه درختهای دودویی گسترش یافته (بخش ۱۱-۷) را یادآور می‌شویم. فرض کنید T یک درخت دودویی گسترش یافته با N

گره خارجی، عمق D و طول مسیر خارجی $E(T)$ باشد. هیچیک از چنین درختی نمی تواند بیش از 2^D گره خارجی داشته باشد و از این رو

$$2^D \geq N \text{ یا به بیان دیگر } D \geq \log N.$$

علاوه بر این T در بین تمام چنین درختهایی با N گره هنگامی که T یک درخت کامل است. حداقل طول مسیر خارجی $E(L)$ خواهد داشت. در چنین حالتی:

$$E(L) = N \log N + O(N) \geq N \log N$$

$N \log N$ از این واقعیت به دست می آید که N مسیر با طول $\log N$ یا $\log N + 1$ وجود دارد همچنین $O(N)$ از این واقعیت ناشی می شود که حداکثر N گره در عمیق ترین سطح وجود دارد: با تقسیم $E(L)$ بر N تعداد مسیرهای خارجی میانگین طول مسیر خارجی \bar{E} به دست می آید. بدین ترتیب برای هر درخت دودویی گسترش یافته T با N گره خارجی داریم:

$$\bar{E} = \frac{E(L)}{N} \geq \frac{N \log N}{N} \approx \log N$$

اکنون فرض کنید T درخت تصمیم گیری متناظر با الگوریتم مرتب کردن S باشد که n عنصر را مرتب می کند. آنگاه T دارای $n!$ گره خارجی است. با جایگذاری $n!$ به جای N در فرمول بالا نتیجه می شود:

$$\bar{E} \geq \log n! \approx n \log n \quad \text{و} \quad D \geq \log n! \approx n \log n$$

شرط $\log n! \approx n \log n$ از فرمول استرلینگ به دست می آید که:

$$n! \approx \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n \left(1 + \frac{1}{12n} + \dots\right)$$

بدین ترتیب $n \log n$ یک کران پائین برای هم بدترین حالت و هم حالت میانگین است. به بیان دیگر بهترین حالت ممکن برای هر الگوریتمی است که n عنصر را مرتب می کند. $O(n \log n)$

مرتب کردن فایل ها، مرتب کردن اشاره گر ها

فرض کنید فایل F متشکل از رکوردهای R_1, R_2, \dots, R_n در حافظه ذخیره شده است. منظور از مرتب کردن F ، مرتب کردن F نسبت به یک فیلد K با مقادیر متناظر k_1, k_2, \dots, k_n است. به عبارت دیگر، رکوردها طوری مرتب می شوند که

$$k_1 \leq k_2 \leq \dots \leq k_n$$

فیلد K کلید مرتب کردن نامیده می شود. یادآور می شویم که K کلید اولیه یا اصلی نامیده می شود اگر مقادیر آن به طور منحصر بفردی رکوردهای داخل F را معین کند. مرتب کردن فایل نسبت به یک کلید

دیگر، رکوردها را به طریق دیگری مرتب خواهد کرد.

مثال ۲-۹

فرض کنید فایل پرسنلی یک شرکت برای هر کارمند از اطلاعات زیر تشکیل شده است :

Name	Social Security Number	Sex	Monthly Salary
------	------------------------	-----	----------------

با مرتب‌کردن این فایل نسبت به کلید **Name**، ترتیب دیگری از رکوردها نسبت به مرتب‌کردن این فایل برحسب کلید **Social Security Number** به دست می‌آید.

شرکت ممکن است بخواهد این فایل را براساس فیلد حقوق **Salary** مرتب کند حتی اگر این فیلد کارمندان را به طور منحصر بفردی تعیین نکند. مرتب‌کردن فایل نسبت به کلید جنسیت **Sex** احتمالاً استفاده‌ای نخواهد داشت. این عمل تنها کارمندان را به دو زیر فایل تجزیه می‌کند که در یکی از این زیرفایلها کارمندان مرد و در زیر فایل دیگر کارمندان زن هستند.

هنگامی که رکوردها خیلی طولانی هستند مرتب‌کردن فایل **F** با عوض کردن ترتیب رکوردها می‌تواند خیلی پرهزینه باشد. علاوه براین می‌توانند در حافظه فرعی یا ثانویه باشند که در این صورت برای انتقال رکوردها در مکانهای مختلف وقت زیادی صرف می‌شود. برطبق آن، بجای مرتب‌کردن خود رکوردها بهتر است یک آرایه کمکی **POINT** ایجاد کنیم که شامل اشاره‌گرهای رکوردهای داخل حافظه است و آنگاه آرایه **POINT** را نسبت به یک فیلد **KEY** مرتب کنیم. به بیان دیگر، **POINT** را مرتب می‌کنیم طوری که

$$KEY[POINT[1]] \leq KEY[POINT[2]] \leq \dots \leq KEY[POINT[N]]$$

توجه دارید که انتخاب فیلد دیگر **KEY** ترتیب دیگری از آرایه **POINT** را نتیجه می‌دهد.

مثال ۳-۹

شکل ۲-۹ (الف) فایل پرسنلی یک شرکت را در حافظه نشان می‌دهد. شکل ۲-۹ (ب) سه آرایه **POINT**، **PTRNAME** و **PTRSSN** را نشان می‌دهد. آرایه **POINT** شامل مکان رکوردها در حافظه است **PTRNAME** اشاره‌گر مرتب شده را براساس فیلد **NAME** نشان می‌دهد یعنی

$$NAME[PTRNAME[1]] < NAME[PTRNAME[2]] < \dots < NAME[PTRNAME[9]]$$

	POINT	PTRNAME	PTRSSN
1	2	6	10
2	3	9	3
3	4	2	12
4	6	12	4
5	7	4	9
6	9	14	6
7	10	3	7
8	12	7	2
9	14	10	14

	NAME	SSN	SEX	SALARY
1				
2	Davis	192-38-7282	Female	22 800
3	Kelly	165-64-3351	Male	19 000
4	Green	175-56-2251	Male	27 200
5				
6	Brown	178-52-1065	Female	14 700
7	Lewis	181-58-9939	Female	16 400
8				
9	Cohen	177-44-4557	Male	19 000
10	Rubin	135-46-6262	Female	15 500
11				
12	Evans	168-56-8113	Male	34 200
13				
14	Harris	208-56-1654	Female	22 800

(ب)

(الف)

شکل ۹-۲

و PTRSSN اشاره گر مرتب شده را براساس فیلد SSN نشان می دهد یعنی

$$SSN[PTRSSN[1]] < SSN[PTRSSN[2]] < \dots < SSN[PTRSSN[9]]$$

نام (EMP) یک کارمند داده شده است به سادگی می توان مکان NAME را در حافظه با استفاده از آرایه PTRNAME و الگوریتم جستجوی دودویی پیدا کرد. به همین ترتیب، اگر شماره تأمین اجتماعی NUMB یک کارمند داده شده باشد. به سادگی می توان با استفاده از آرایه PTRSSN و الگوریتم جستجوی دودویی مکان رکورد کارمند را در حافظه پیدا کرد. علاوه براین ملاحظه می کنید که حتی، لازم نیست رکوردها، در مکان های متوالی حافظه ظاهر شوند. به این ترتیب اضافه و حذف رکوردها به آسانی انجام می شود.

۹-۳ مرتب کردن درجی یا جای دادنی

فرض کنید آرایه A با n عنصر A[1], A[2], ..., A[n] در حافظه است. الگوریتم مرتب کردن درجی عمل جستجو و خواندن آرایه A را از A[1] تا A[n] انجام می دهد و هر عنصر A[K] را در مکان صحیحش

در زیر آرایه از قبل مرتب شده $A[1], A[2], \dots, A[K-1]$ درج می‌کند (جای می‌دهد) یعنی مرحله ۱. $A[1]$ خودش بطور بدیهی، مرتب است.

مرحله ۲. $A[2]$ را یا قبل از یا بعد از $A[1]$ درج کنید طوری که $A[1], A[2]$ مرتب شده باشد.

مرحله ۳. $A[3]$ را در مکان صحیحش در $A[1], A[2]$ درج کنید یعنی قبل از $A[1]$ بین $A[1]$ و $A[2]$ یا پس از $A[2]$ طوری که $A[1], A[2], A[3]$ مرتب شده باشند.

مرحله ۴. $A[4]$ را در مکان صحیحش در $A[1], A[2], A[3]$ درج کنید طوری که

$A[1], A[2], A[3], A[4]$ مرتب شده باشد

.....
مرحله N . $A[N]$ را در مکان صحیحش در $A[1], A[2], \dots, A[N-1]$ درج کنید طوری که $A[1], A[2], \dots, A[N]$ مرتب شده باشند.

وقتی n عدد کوچکی است اغلب این الگوریتم مرتب کردن مورد استفاده قرار می‌گیرد. برای مثال این الگوریتم نزد بازیکنان! بازی bridge وقتی که برای نخستین بار کارت‌ها را مرتب می‌کنند! بسیار معروف است.

تنها مسأله‌ای که باقی می‌ماند تصمیم‌گیری در مورد چگونگی درج کردن $A[K]$ در مکان صحیحش در زیر آرایه مرتب شده $A[1], A[2], \dots, A[K-1]$ است. این کار با مقایسه $A[K]$ با $A[K-1]$ ، مقایسه $A[K]$ با $A[K-2]$ ، مقایسه $A[K]$ با $A[K-3]$ ، و الی آخر، انجام می‌شود، تا با اولین عنصری مانند $A[J]$ روبرو شویم که $A[J] \leq A[K]$ است. آنگاه هر یک از عنصرهای $A[K-1], A[K-2], \dots, A[J+1]$ یک مکان به جلو برده می‌شود و آنگاه $A[K]$ در مکان $J+1$ ام آرایه درج می‌شود.

اگر همیشه یک عنصر $A[J]$ وجود داشته باشد طوری که $A[J] \leq A[K]$ الگوریتم ساده می‌شود. در غیر اینصورت باید دائماً تحقیق کنیم که آیا باید $A[K]$ با $A[1]$ مقایسه شود یا خیر. این شرط را می‌توان با معرفی یک عنصر نگهبان $A[0] = -\infty$ یا یک عدد بسیار کوچک انجام داد.

Pass	A[0]	A[1]	A[2]	A[3]	A[4]	A[5]	A[6]	A[7]	A[8]
K = 1:	$-\infty$	77	33	44	11	88	22	66	55
K = 2:	$-\infty$	77	33	44	11	88	22	66	55
K = 3:	$-\infty$	33	77	44	11	88	22	66	55
K = 4:	$-\infty$	33	44	77	11	88	22	66	55
K = 5:	$-\infty$	11	33	44	77	88	22	66	55
K = 6:	$-\infty$	11	33	44	77	88	22	66	55
K = 7:	$-\infty$	11	22	33	44	77	88	66	55
K = 8:	$-\infty$	11	22	33	44	66	77	88	55
Sorted:	$-\infty$	11	22	33	44	55	66	77	88

شکل ۳-۹ مرتب کردن درجی برای $n = 8$ عنصر

مثال ۴-۹

فرض کنید آرایه A با ۸ عنصر به صورت زیر داده شده است.

77, 33, 44, 11, 88, 22, 66, 55

شکل ۳-۹ الگوریتم مرتب کردن درجی را نشان می دهد. عنصرهای داخل دایره بیانگر A[K] در هر مرحله از الگوریتم است و پیکان، مکان صحیح درج شدن A[K] را نشان می دهد. بیان رسمی الگوریتم مرتب کردن درجی به شرح زیر است :

Algorithm 9.1: (Insertion Sort) INSERTION(A, N).

This algorithm sorts the array A with N elements.

1. Set $A[0] := -\infty$. [Initializes sentinel element.]
2. Repeat Steps 3 to 5 for $K = 2, 3, \dots, N$:
3. Set $TEMP := A[K]$ and $PTR := K - 1$.
4. Repeat while $TEMP < A[PTR]$:
 - (a) Set $A[PTR + 1] := A[PTR]$. [Moves element forward.]
 - (b) Set $PTR := PTR - 1$.
- [End of loop.]
5. Set $A[PTR + 1] := TEMP$. [Inserts element in proper place.]
- [End of Step 2 loop.]
6. Return.

ملاحظه می کنید که در الگوریتم یک حلقه داخلی وجود دارد که اساساً توسط متغیر PTR کنترل می شود. همچنین یک حلقه خارجی وجود دارد که از K به عنوان اندیس استفاده می کند.

پسچیدگی مرتب کردن درجی

$f(n)$ تعداد مقایسه های الگوریتم مرتب کردن درجی را می توان به سادگی محاسبه کرد. قبل از همه، خاطرنشان می کنیم که بدترین حالت وقتی اتفاق می افتد که آرایه A به ترتیب عکس باشد و حلقه خارجی بخواهد از حداکثر تعداد $K - 1$ مقایسه استفاده کند. از این رو :

$$f(n) = 1 + 2 + \dots + (n - 1) = \frac{n(n - 1)}{2} = O(n^2)$$

علاوه براین، می توان نشان داد که در حلقه داخلی به طور متوسط تقریباً $(K-1)/2$ مقایسه وجود دارد. بنابراین، برای حالت میانگین :

$$f(n) = \frac{1}{2} + \frac{2}{2} + \dots + \frac{(n - 1)}{2} = \frac{n(n - 1)}{4} = O(n^2)$$

بنابراین الگوریتم مرتب کردن، وقتی n خیلی بزرگ باشد، الگوریتم خیلی کندی است. نتیجه های بالا به طور خلاصه در جدول زیر ارائه شده است :

Algorithm	Worst Case	Average Case
Insertion Sort	$\frac{n(n - 1)}{2} = O(n^2)$	$\frac{n(n - 1)}{4} = O(n^2)$

توجه کنید: برای پیدا کردن مکانی که در آن $A[K]$ در زیر آرایه $A[1], A[2], \dots, A[K-1]$ درج می‌شود به جای یک جستجوی خطی با انجام جستجوی دودویی می‌توان در زمان اجرا صرفه‌جویی کرد. این کار به‌طور متوسط مستلزم $\log K$ مقایسه، به جای $(K-1)/2$ مقایسه است. علاوه براین هنوز هم نیازمند جلو بردن $(K-1)/2$ عنصر هستیم. بدین ترتیب مرتبه پیچیدگی هیچ تغییری نمی‌کند. علاوه براین معمولاً مرتب کردن درجی تنها وقتی بکار گرفته می‌شود که n کوچک باشد، در چنین مواردی، جستجوی خطی تقریباً همان کارایی جستجوی دودویی را دارد.

۴-۹ مرتب کردن انتخابی

فرض کنید آرایه A با n عنصر $A[1], A[2], \dots, A[N]$ در حافظه است. الگوریتم مرتب کردن انتخابی برای مرتب کردن آرایه A به صورت زیر عمل می‌کند. نخست کوچکترین عنصر داخل لیست را پیدا می‌کند و آن را در مکان اول لیست قرار می‌دهد. آنگاه کوچکترین عنصر دوم داخل لیست را پیدا می‌کند و آن را در مکان دوم لیست قرار می‌دهد و الی آخر. به بیان دقیقتر:

مرحله ۱. مکان کوچکترین عنصر لیست N عنصری $A[1], A[2], \dots, A[N]$ را پیدا کنید، همچنین جای $A[LOC]$ و $A[1]$ را عوض کنید. آنگاه $A[1]$ مرتب شده است.

مرحله ۲. مکان کوچکترین عنصر زیر لیست $N-1$ عنصری $A[2], A[3], \dots, A[N]$ را پیدا کنید، همچنین جای $A[LOC]$ و $A[2]$ را عوض کنید. آنگاه $A[2], A[1]$ مرتب شده است. چون $A[2] \leq A[1]$.

مرحله ۳. مکان کوچکترین عنصر زیر لیست $N-2$ عنصری $A[3], A[4], \dots, A[N]$ را پیدا کنید. همچنین جای $A[LOC]$ و $A[3]$ را عوض کنید. آنگاه $A[3], A[2], A[1]$ مرتب شده است، چون $A[3] \leq A[2]$.

.....

مرحله $N-1$: مکان کوچکترین عنصر از میان دو عنصر $A[N-1], A[N]$ را پیدا کنید. همچنین جای $A[LOC]$ و $A[N-1]$ را عوض کنید. آنگاه $A[N], A[2], A[1]$ مرتب شده است، چون $A[N-1] \leq A[N]$.

بدین ترتیب A پس از $N-1$ مرحله مرتب می‌شود.

مثال ۵-۹

فرض کنید آرایه A با ۸ عنصر به صورت زیر داده شده است:

77, 33, 44, 11, 88, 22, 66, 55

با اعمال الگوریتم مرتب کردن انتخابی بر A داده‌های شکل ۴-۹ نتیجه می‌شود.

Pass	A[1]	A[2]	A[3]	A[4]	A[5]	A[6]	A[7]	A[8]
K = 1, LOC = 4	(77)	33	44	(11)	88	22	66	55
K = 2, LOC = 6	11	(33)	44	77	88	(22)	66	55
K = 3, LOC = 6	11	22	(44)	77	88	(33)	66	55
K = 4, LOC = 6	11	22	33	(77)	88	(44)	66	55
K = 5, LOC = 8	11	22	33	44	(88)	77	66	(55)
K = 6, LOC = 7	11	22	33	44	55	(77)	(66)	88
K = 7, LOC = 7	11	22	33	44	55	66	(77)	88
Sorted:	11	22	33	44	55	66	77	88

شکل ۹-۴ مرتب کردن انتخابی برای $n = 8$ عنصر

ملاحظه می کنید که LOC مکان کوچکترین عنصر را در بین $A[N], \dots, A[K+1], A[K]$ در مرحله K ام به دست می دهد. عناصر داخل دایره نشان دهنده عناصری هستند که باید جایشان با هم عوض شود. تنها مسأله ای که در مرحله K ام باقی می ماند تعیین LOC مکان کوچکترین عنصر در بین عنصرهای $A[N], \dots, A[K+1], A[K]$ است. این کار را می توان با استفاده از متغیر MIN انجام داد که مقدار جاری کوچکترین عنصر را هنگام خواندن زیرآرایه از $A[K]$ تا $A[N]$ نگه می دارد. به طور مشخص، نخست قرار دهید $MIN := A[K]$ و $LOC := K$ همچنین به دنبال آن لیست را پیمایش کنید و MIN را با هر عنصر دیگر $A[J]$ به صورت زیر مقایسه کنید:

(الف) اگر $MIN \leq A[J]$ ، آنگاه تنها به عنصر بعدی بروید.

(ب) اگر $MIN > A[J]$ ، آنگاه MIN و LOC را با دستورهای جایگزینی $MIN := A[J]$ و $LOC := J$ تازه کنید.

پس از مقایسه MIN با آخرین عنصر $A[N]$ ، MIN حاوی کوچکترین عنصر در میان عنصرهای $A[N], \dots, A[K+1], A[K]$ است و LOC حاوی مکان کوچکترین عنصر است.

فرایند بالا را می توان به طور مستقل به صورت یک زیربرنامه Procedure بیان کرد:

Procedure 9.2: MIN(A, K, N, LOC)

An array A is in memory. This procedure finds the location LOC of the smallest element among $A[K], A[K+1], \dots, A[N]$.

1. Set $MIN := A[K]$ and $LOC := K$. [Initializes pointers.]
2. Repeat for $J = K+1, K+2, \dots, N$:
If $MIN > A[J]$, then: Set $MIN := A[J]$ and $LOC := J$ and $LOC := J$.
[End of loop.]
3. Return.

به سادگی می‌توان الگوریتم مرتب‌کردن انتخابی را به صورت زیر بیان کرد:

Algorithm 9.3: (Selection Sort) SELECTION(A, N)

This algorithm sorts the array A with N elements.

1. Repeat Steps 2 and 3 for $K = 1, 2, \dots, N - 1$:
2. Call MIN(A, K, N, LOC).
3. [Interchange $A[K]$ and $A[LOC]$.]
Set $TEMP := A[K]$, $A[K] := A[LOC]$ and $A[LOC] := TEMP$.
[End of Step 1 loop.]
4. Exit.

پیچیدگی الگوریتم مرتب‌کردن انتخابی

نخست توجه کنید که $f(n)$ تعداد مقایسه‌ها در الگوریتم مرتب‌کردن انتخابی مستقل از ترتیب اولیه عناصر است. ملاحظه می‌کنید که $MIN(A, K, N, LOC)$ به $n - K$ مقایسه احتیاج دارد. به بیان دیگر در مرحله ۱، $n - 1$ مقایسه انجام می‌شود تا کوچکترین عنصر پیدا شود در مرحله ۲، $n - 2$ مقایسه انجام می‌شود تا دومین عنصر کوچک پیدا شود و الی آخر. بنابراین:

$$f(n) = (n - 1) + (n - 2) + \dots + 2 + 1 = \frac{n(n - 1)}{2} = O(n^2)$$

نتیجه بالا به طور خلاصه در جدول زیر ارائه شده است:

Algorithm	Worst Case	Average Case
Selection Sort	$\frac{n(n - 1)}{2} = O(n^2)$	$\frac{n(n - 1)}{2} = O(n^2)$

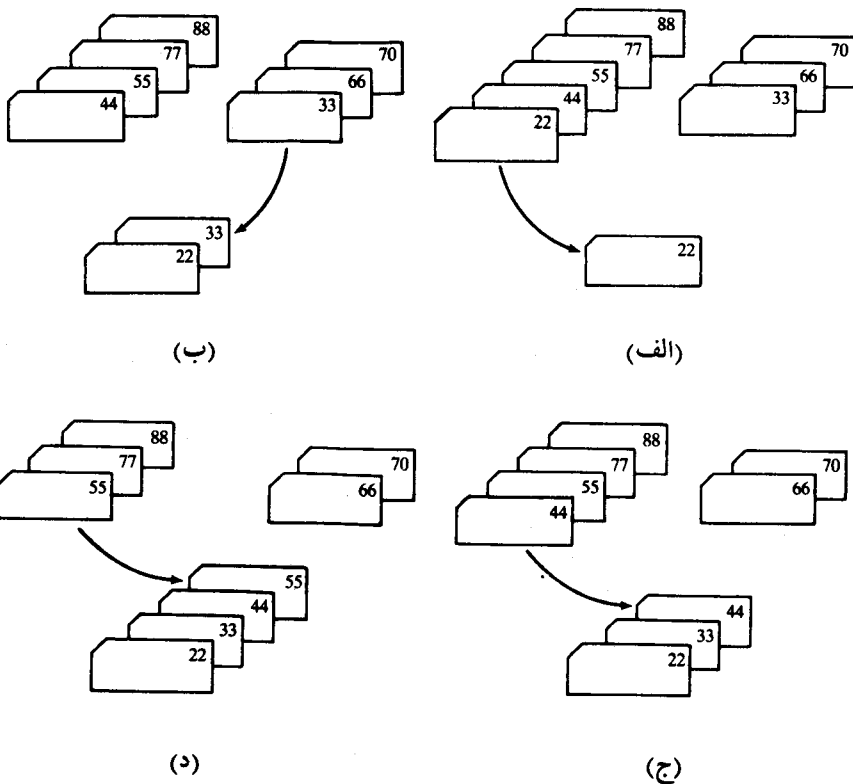
توجه کنید: تعداد جابجایی‌ها و جایگزینی‌ها به ترتیب اولیه عناصر در آرایه A بستگی دارد اما مجموع این عملیات بزرگتر از ضربی از n^2 نیست.

۵-۹ ادغام کردن

فرض کنید A یک لیست مرتب‌شده با r عنصر و B یک لیست مرتب شده با s عنصر باشد. عمل ترکیب عناصر آرایه A و B در یک لیست مرتب‌شده C با $n = r + s$ عنصر، ادغام کردن نام دارد. یک راه ساده برای ادغام دو آرایه فوق آن است که عناصر B را پس از عناصر A قرار دهیم و آنگاه از یک الگوریتم مرتب‌کردن برای تمام لیست استفاده کنیم. این روش از این واقعیت که A و B به صورت انفرادی مرتب شده هستند استفاده نمی‌کند. الگوریتم 9.4 این بخش، الگوریتمی با کارایی به مراتب بیشتر است. با وجود این، نخست ایده اصلی این الگوریتم را با ذکر دو مثال بیان می‌کنیم.

فرض کنید دو دسته کارت مرتب شده در اختیار دارید. دسته کارتها مانند شکل ۵-۹ در هم ادغام می‌شوند یعنی در هر مرحله دو کارت جلویی با هم مقایسه می‌شوند و کارت با شماره کوچکتر در دسته

ترکیب شده قرار می‌گیرد. هرگاه یکی از دسته‌ها خالی شود، تمام کارتهای باقیمانده در دسته دیگر در انتهای دسته کارت ترکیب شده قرار داده می‌شوند. به همین ترتیب فرض کنید دو صف از دانشجویان داریم که به ترتیب بزرگی قدشان مرتب شده‌اند و فرض کنید بخواهیم آنها را در یک صف مرتب شده، در هم ادغام کنیم. صف جدید در هر مرحله با انتخاب کوتاه‌ترین دانشجو از دو دانشجویی که در جلوی صف خودشان هستند تشکیل می‌شود. هرگاه یکی از صف‌ها، دانشجویی نداشت، صف دانشجویان باقیمانده در انتهای صف ترکیب شده قرار می‌گیرند.



شکل ۵-۹

بحث بالا را اکنون به یک الگوریتم رسمی تبدیل می‌کنیم که آرایه r عنصری مرتب شده A و آرایه s عنصری مرتب شده B را در آرایه مرتب شده C با $r+s$ عنصر ادغام می‌کند. قبل از هرچیز باید توجه داشت باشید که، همواره باید مکان‌های کوچکترین عنصر A و کوچکترین عنصر B را که هنوز در C قرار نگرفته است، نگه داریم. فرض کنید NA و NB به ترتیب نمایش این مکان‌ها باشند. علاوه بر این فرض کنید PTR

نمایش مکانی در C باشد که قرار است پر شود. بنابراین در آغاز قرار می‌دهیم $NA := 1$ ، $NB := 1$ و $PTR := 1$. در هر مرحله از الگوریتم دو عنصر

$$B[NB] \text{ و } A[NA]$$

را مقایسه کنید و عنصر کوچکتر را در $C[PTR]$ قرار دهید. آنگاه با دستور $PTR := PTR + 1$ ، PTR را یک واحد افزایش می‌دهیم همچنین یا $NA := NA + 1$ را با دستور $NA := NA + 1$ یا $NB := NB + 1$ را با دستور $NB := NB + 1$ یک واحد افزایش می‌دهیم و این بسته به آن است که آیا عنصر جدید در C از A گرفته شده است یا از B. علاوه بر این، اگر $NA > r$ ، آنگاه عنصرهای باقیمانده B در C جایگزین می‌شوند یا اگر $NB > s$ ، آنگاه عنصرهای باقیمانده A در C جایگزین می‌شوند. بیان رسمی این الگوریتم به صورت زیر است:

Algorithm 9.4: MERGING(A, R, B, S, C)

Let A and B be sorted arrays with R and S elements, respectively. This algorithm merges A and B into an array C with $N = R + S$ elements.

1. [Initialize.] Set $NA := 1$, $NB := 1$ and $PTR := 1$.
2. [Compare.] Repeat while $NA \leq R$ and $NB \leq S$:
 - If $A[NA] < B[NB]$, then:
 - (a) [Assign element from A to C.] Set $C[PTR] := A[NA]$.
 - (b) [Update pointers.] Set $PTR := PTR + 1$ and $NA := NA + 1$.
 - Else:
 - (a) [Assign element from B to C.] Set $C[PTR] := B[NB]$.
 - (b) [Update pointers.] Set $PTR := PTR + 1$ and $NB := NB + 1$.

[End of If structure.]
- [End of loop.]
3. [Assign remaining elements to C.]
 - If $NA > R$, then:
 - Repeat for $K = 0, 1, 2, \dots, S - NB$:
 - Set $C[PTR + K] := B[NB + K]$.

[End of loop.]
 - Else:
 - Repeat for $K = 0, 1, 2, \dots, R - NA$:
 - Set $C[PTR + K] := A[NA + K]$.

[End of loop.]

[End of If structure.]
4. Exit.

پیچیدگی الگوریتم ادغام کردن

ورودی الگوریتم ادغام کردن را تعداد کل عنصرهای A و B یعنی $n = r + s$ عنصر تشکیل می‌دهد. هر مقایسه یک عنصر را در آرایه C جایگزین می‌کند که در نهایت n عنصر دارد. بنابراین $f(n)$ تعداد مقایسه‌ها نمی‌تواند بیشتر از n باشد:

$$f(n) \leq n = O(n)$$

به بیان دیگر، الگوریتم ادغام کردن زمان اجرای خطی دارد.

ماتریسهای غیر منفرد یا وارون پذیر

فرض کنید A ، B و C سه ماتریس باشند، که الزاماً منفرد نیستند. فرض کنید A با r عنصر و کران پائین LBA مرتب شده باشد و B با s عنصر و کران پائین LBB مرتب شده باشد و C کران پائین LBC داشته باشد. آنگاه $UBA = LBA + r - 1$ و $UBB = LBB + s - 1$ به ترتیب کرانهای بالای A و B باشند. عمل ادغام A و B اکنون با تغییر در الگوریتم بالا به صورت زیر انجام می شود:

Procedure 9.5: MERGE($A, R, LBA, S, LBB, C, LBC$)

This procedure merges the sorted arrays A and B into the array C .

1. Set $NA := LBA$, $NB := LBB$, $PTR := LBC$, $UBA := LBA + R - 1$, $UBB := LBB + S - 1$.
2. Same as Algorithm 9.4 except R is replaced by UBA and S by UBB .
3. Same as Algorithm 9.4 except R is replaced by UBA and S by UBB .
4. Return.

ملاحظه می کنید که این زیربرنامه MERGE نامیده شده حال آن که الگوریتم 9.4، MERGING نامیده شده است. دلیل بیان این حالت خاص آن است که این زیربرنامه در بخش بعد در مبحث ادغام و مرتب کردن مورد استفاده قرار می گیرد.

جستجوی دودویی و الگوریتم درج کردن

فرض کنید r تعداد عناصر آرایه مرتب شده A خیلی کوچکتر از s تعداد عناصر آرایه مرتب شده B است. عمل ادغام آرایه A و B را می توان به صورت زیر انجام داد. برای هر عنصر $A[K]$ از آرایه A ، برای پیدا کردن مکان صحیح جهت درج کردن $A[K]$ در B ، از یک جستجوی دودویی روی B استفاده می کند. هر جستجوی به حداکثر $\log s$ مقایسه احتیاج دارد. از این رو این جستجوی دودویی و الگوریتم درج کردن جهت ادغام دو آرایه A و B به حداکثر $r \log s$ مقایسه احتیاج دارد. تأکید می کنیم که تنها وقتی که $s \ll r$ یعنی وقتی r خیلی کوچکتر از s باشد، این الگوریتم بسیار کاراتر از الگوریتم 9.4 الگوریتم ادغام کردن متداول است.

مثال ۹-۶

فرض کنید A دارای 5 عنصر و B دارای 100 عنصر است. آنگاه ادغام A و B با الگوریتم 9.4 تقریباً از 100 مقایسه استفاده می کند. از طرف دیگر، تنها به تقریباً $\log 100 = 7$ مقایسه احتیاج دارد تا با استفاده از

جستجوی دودویی مکان صحیح یک عنصر A جهت درج‌شدن در B تعیین شود. از این‌رو تنها به تقریباً $35 = 5.7$ مقایسه احتیاج است تا عمل ادغام A و B با استفاده از جستجوی دودویی و الگوریتم درج‌کردن صورت گیرد.

جستجوی دودویی و الگوریتم درج‌کردن این واقعیت را که A مرتب شده است در نظر نمی‌گیرد. بنابراین، این الگوریتم را می‌توان به دو طریق و به صورت زیر اصلاح کرد. در اینجا فرض می‌شود که A دارای 5 عنصر و B دارای 100 عنصر است.

(۱) کوچک‌کردن مجموعه هدف. فرض کنید پس از جستجوی اول متوجه می‌شویم که $A[1]$ باید پس از $B[16]$ درج شود. آنگاه تنها به استفاده از جستجوی دودویی روی $B[17], \dots, B[100]$ احتیاج است تا مکان صحیح جهت درج $A[2]$ پیدا شود. و الی آخر.

(۲) پریدن. مکان موردانتظار برای درج $A[1]$ در B نزدیکی $B[20]$ است (یعنی $B[s/r]$ نه در نزدیکی $B[50]$). از این‌رو نخست از یک جستجوی خطی روی $B[20], B[40], B[60], B[80]$ و $B[100]$ استفاده می‌کنیم تا $B[K]$ به گونه‌ای تعیین شود که $A[1] \leq B[K]$ و آنگاه از یک جستجوی دودویی روی $B[K - 20], \dots, B[K]$ استفاده می‌کنیم. این کار مشابه استفاده از حالت‌های پرش یا انگشتی در یک فرهنگ لغت است که مکان تمام کلماتی را که حرف اولشان یکی است نشان می‌دهد. جزئیات الگوریتم اصلاح شده به عنوان تمرین به دانشجو واگذار می‌شود.

۹-۶ ادغام و مرتب‌کردن

فرض کنید آرایه A با n عنصر $A[1], \dots, A[2], \dots, A[N]$ در حافظه است. الگوریتم ادغام و مرتب‌کردن که A را مرتب می‌کند نخست با یک مثال مشخص و ساده توضیح داده می‌شود:

مثال ۷-۹

فرض کنید آرایه A حاوی 14 عنصر زیر است:

66, 33, 40, 22, 55, 88, 60, 11, 80, 20, 50, 44, 77, 30

هر مرحله از الگوریتم ادغام و مرتب‌کردن، از ابتدای آرایه A شروع می‌کند و جفت زیرآرایه‌های مرتب شده را به صورت زیر درهم ادغام می‌کند:

مرحله ۱. هر جفت عناصر داده شده را درهم ادغام کنید تا لیست اعداد دوتایی مرتب‌شده زیر به دست آید:

33, 66 22, 40 55, 88 11, 60 20, 80 44, 50 30, 77

مرحله ۲. هر جفت اعداد دوتایی بالا را درهم ادغام کنید تا لیست اعداد چهارتایی مرتب‌شده زیر به دست آید:

22, 33, 40, 66 11, 55, 60, 88 20, 44, 50, 80 30, 77

مرحله ۳. هر جفت اعداد چهارتایی مرتب‌شده بالا را درهم ادغام کنید تا دو زیرآرایه مرتب‌شده زیر بدست آید:

11, 22, 33, 40, 55, 60, 66, 88 20, 30, 44, 50, 77, 80

مرحله ۴. دو زیرآرایه مرتب‌شده بالا را درهم ادغام کنید تا یک آرایه مرتب‌شده بدست آید.

11, 20, 22, 30, 33, 40, 44, 50, 55, 60, 66, 77, 80, 88

اکنون آرایه اولیه A مرتب شده، است.

الگوریتم ادغام و مرتب‌کردن بالا برای مرتب‌کردن آرایه A دارای خاصیت مهم زیر است. پس از مرحله K، آرایه A به دو زیرآرایه مرتب‌شده تجزیه می‌شود که در آن هر زیرآرایه بجز احتمالاً زیرآرایه آخری، حاوی دقیقاً $L = 2^K$ عنصر است. از این رو این الگوریتم به حداکثر $\log n$ مرحله جهت مرتب‌کردن آرایه n عنصری A احتیاج دارد.

توصیف غیررسمی بالا از ادغام و مرتب‌کردن، اکنون به یک الگوریتم رسمی تبدیل می‌شود که دو قسمت تقسیم می‌شود. قسمت اول یک زیربرنامه Procedure به نام MERGEPASS است که از زیربرنامه Procedure 9.5 برای اجرای یک مرحله از الگوریتم استفاده می‌کند و قسمت دوم به‌طور مکرر از MERGEPASS استفاده می‌کند تا وقتی که A مرتب شود.

زیربرنامه MERGEPASS روی آرایه n عنصری A بکار گرفته می‌شود که از یک دنباله از زیرآرایه‌های مرتب شده تشکیل می‌شود. علاوه بر این، هر زیرآرایه از L عنصر تشکیل شده است به‌استثنای زیرآرایه آخر، که ممکن است کمتر از L عنصر داشته باشد. با تقسیم n بر $L * 2$ ، Q خارج قسمت به دست می‌آید که تعداد زوج زیرآرایه مرتب شده L عنصری را به ما می‌گوید یعنی:

$$Q = \text{INT}(N / (2 * L))$$

از $\text{INT}(X)$ برای نمایش مقدار صحیح X استفاده کرده‌ایم. قرار دهید $S = 2 * L * Q$ تعداد کل عناصر در زوج زیرآرایه Q را بدست می‌آوریم. از این رو $R = N - S$ تعداد عناصر باقیمانده را نمایش می‌دهد. این زیربرنامه نخست جفت Q تایی اولیه زیرآرایه‌های L عنصری را در هم ادغام می‌کند. آنگاه زیربرنامه حالتی را در نظر می‌گیرد که در آن تعداد فردی از زیرآرایه وجود دارد (وقتی $R \leq L$) یا در آن زیرآرایه آخری کمتر از L عنصر دارد.

بیان رسمی زیربرنامه MERGEPASS و الگوریتم ادغام و مرتب‌کردن به صورت زیر است:

Procedure 9.6: MERGEPASS(A, N, L, B)

The N-element array A is composed of sorted subarrays where each subarray has L elements except possibly the last subarray, which may have fewer than L elements. The procedure merges the pairs of subarrays of A and assigns them to the array B.

1. Set $Q := \text{INT}(N/(2*L))$, $S := 2*L*Q$ and $R := N - S$.
2. [Use Procedure 9.5 to merge the Q pairs of subarrays.]
 Repeat for $J = 1, 2, \dots, Q$:
 - (a) Set $LB := 1 + (2*J - 2)*L$. [Finds lower bound of first array.]
 - (b) Call MERGE(A, L, LB, A, L, LB + L, B, LB).
 [End of loop.]
3. [Only one subarray left?]
 If $R \leq L$, then:
 - Repeat for $J = 1, 2, \dots, R$:
 - Set $B(S + J) := A(S + J)$.
 [End of loop.]
 Else:
 - Call MERGE(A, L, S + 1, A, R, L + S + 1, B, S + 1).
 [End of If structure.]
4. Return.

Algorithm 9.7: MERGESORT(A, N)

This algorithm sorts the N-element array A using an auxiliary array B.

1. Set $L := 1$. [Initializes the number of elements in the subarrays.]
2. Repeat Steps 3 to 6 while $L < N$:
3. Call MERGEPASS(A, N, L, B).
4. Call MERGEPASS(B, N, 2 * L, A).
5. Set $L := 4 * L$.
- [End of Step 2 loop.]
6. Exit.

از آنجا که می‌خواهیم آرایه مرتب‌شده نهایتاً در حافظه اولیه A قرار گیرد، باید زیربرنامه MERGEPASS را با تعداد دفعات زوجی اجرا کنیم.

پیچیدگی الگوریتم ادغام و مرتب‌کردن

فرض کنید $f(n)$ تعداد مقایسه‌هایی باشد که برای مرتب‌کردن آرایه n عنصری A با استفاده از الگوریتم ادغام و مرتب‌کردن مورد نیاز است. یادآور می‌شویم که این الگوریتم به حداکثر $\log n$ مرحله نیاز دارد. علاوه بر این هر مرحله مجموعاً n عنصر را درهم ادغام می‌کند. همچنین با بررسی پیچیدگی ادغام‌کردن، هر مرحله مستلزم حداکثر n مقایسه است. بنابراین برای هر دوی بدترین حالت و حالت میانگین داریم:

$$f(n) \leq n \log n$$

ملاحظه می‌کنید که این الگوریتم همان مرتبه HeapSort و همان مرتبه میانگین QuickSort را دارد. اشکال اصلی که بر ادغام و مرتب‌کردن گرفته می‌شود، آن است که نیازمند یک آرایه کمکی با n عنصر است. هر یک از الگوریتم‌های مرتب‌کردن دیگری که مورد مطالعه قرار گرفت، تنها به تعداد محدودی از خانه اضافی احتیاج دارد که مستقل از n است.

نتیجه‌های بالا به طور خلاصه در جدول زیر ارائه شده است :

Algorithm	Worst Case	Average Case	Extra Memory
Merge-Sort	$n \log n = O(n \log n)$	$n \log n = O(n \log n)$	$O(n)$

۷-۹ مرتب‌کردن مبنایی RADIX

مرتب‌کردن مبنایی روشی است که افراد بسیاری به طور شهودی از آن استفاده می‌کنند یا هنگامی که لیست بزرگی از اسامی را به صورت الفبای مرتب می‌کنیم از آن استفاده می‌کنیم. در اینجا مبنا 26 است، علت آن 26 حرف الفبای زبان انگلیسی است. بطور مشخص لیست اسامی نخست براساس حرف اول هر اسم مرتب می‌شود. به بیان دیگر اسامی به 26 دسته مرتب می‌شوند که در آن دسته اول، از اسامی‌ای تشکیل می‌شود که حرف اول آنها با A شروع می‌شود، دسته دوم از اسامی‌ای تشکیل می‌شود که حرف اول آنها با B شروع می‌شود و الی آخر. در طی مرحله دوم، هر دسته براساس حرف دوم اسم به صورت الفبایی مرتب می‌شود و الی آخر. اگر هیچ اسمی برای مثال، بیشتر از 12 حرف نداشته باشد، اسامی حداکثر در 12 مرحله به صورت الفبایی مرتب می‌شوند.

مرتب‌کردن مبنایی روشی است که در کارت مرتب‌کن مورد استفاده قرار می‌گیرد، یک کارت مرتب‌کن از 13 صندوق دریافت تشکیل می‌شود که به صورت زیر برچسب‌گذاری شده است :

(R , 12 , 11 , 0 , 1 , 2 , 3 , 4 , 5 , 6 , 7 , 8 , 9 , 10 , 11 , 12 , R)

هر صندوق به غیر از R متناظر با ردیفی روی یک کارت است که در آن یک سوراخ می‌تواند منگنه شود. اعداد دهدهی که در آن مبنا 10 است به صورت ساده و بدیهی منگنه می‌شوند و از این رو تنها از 10 صندوق اول کارت مرتب‌کن استفاده می‌کند. کارت مرتب‌کن در اعداد مبنا از مرتب‌کردن رقم به ترتیب عکس استفاده می‌کند. به بیان دیگر فرض کنید به یک کارت مرتب‌کن یک مجموعه از کارت‌ها داده شده است که در آن هر کارت شامل یک عدد 3 رقمی است که در ستون‌های 1 تا 3 منگنه شده‌اند. کارت‌ها نخست براساس ارقام یکان مرتب می‌شوند. در مرحله دوم، کارت‌ها براساس رقم دهگان مرتب می‌شوند. در مرحله سوم و آخر، کارت‌ها براساس رقم صدگان مرتب می‌شوند. برای روشن شدن مطلب یک مثال می‌زنیم.

مثال ۸-۹

فرض کنید ۹ کارت به صورت زیر منگنه شده‌اند:

348, 143, 361, 423, 538, 128, 321, 543, 366

با دادن آنها به یک کارت مرتب‌کن، اعداد طی سه مرحله مرتب می‌شوند که مراحل آن در شکل ۹-۶ نشان داده شده است.

Input	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
348									348	
143				143						
361		361								
423				423						
538									538	
128									128	
321		321								
543				543						
366							366			

شکل ۹-۶ (الف) مرحله اول

در مرحله اول، ارقام یگان داخل صندوق مرتب می‌شوند. صندوقها وارونه رسم شده‌اند، از این رو 348 در پائین صندوق شماره 8 است. کارتها صندوق به صندوق، از صندوق شماره 9 تا صندوق شماره 0 جمع می‌شوند. توجه دارید که 361 اکنون پائین این گروه اعداد و 128 در بالای گروه اعداد است. کارتها اکنون مجدداً به کارت مرتب‌کن داده می‌شوند.

Input	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
361							361			
321			321							
143					143					
423			423							
543					543					
366					543					
366							366			
348					348					
538				538						
128			128							

شکل ۹-۷ (ب) مرحله دوم

در مرحله دوم، ارقام دهگان داخل صندوق مرتب می شوند. مجدداً کارت‌ها صندوق به صندوق جمع می شوند و دوباره به عنوان ورودی به کارت مرتب‌کن داده می شوند.

Input	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
321				321						
423					423					
128		128								
538						538				
143		143								
543						543				
348				348						
361				361						
366				366						

شکل ۷-۹ (ج) مرحله سوم

در مرحله سوم و آخر، ارقام صدگان داخل صندوق مرتب می شوند.

هنگامی که کارت‌ها پس از مرحله سوم جمع‌آوری می شوند، اعداد به ترتیب زیر هستند:

128, 143, 321, 348, 361, 366, 423, 538, 543

به این ترتیب کارت‌ها اکنون مرتب هستند.

C تعداد مقایسه‌های موردنیاز برای مرتب‌کردن n عدد 3 رقمی از این نوع، به صورت زیر محدود است:

$$C \leq 9 * 3 * 10$$

عدد 9 از تعداد نه کارت، 3 از سه رقمی بودن هر عدد و 10 از مبنای $d = 10$ رقم، گرفته شده است.

پیچیدگی مرتب‌کردن مبنایی

فرض کنید A لیست n عنصری A_1, A_2, \dots, A_n داده شده است. فرض کنید d نمایش مبنای باشد مثلاً برای

ارقام دهدهی $d = 10$ ، برای حروفها $d = 26$ و برای بیتها $d = 2$ است، همچنین فرض کنید هر عنصر A_i با s رقم زیر نمایش داده می شود:

$$A_i = d_{i1} d_{i2} \dots d_{is}$$

الگوریتم مرتب‌کردن مبنایی نیازمند s مرحله، یعنی تعداد ارقام هر عنصر است. در مرحله K هر رقم

d_{ik} با هر یک از d رقم مقایسه می شود. از این رو $C(n)$ تعداد مقایسه‌ها برای الگوریتم به صورت محدود است:

$$C(n) \leq d * s * n$$

اگرچه d مستقل از n است اما s به n بستگی دارد. در بدترین حالت، $s = n$ ، از این رو $C(n) = O(n^2)$. در بهترین حالت، $s = \log_d n$ ، از این رو $C(n) = O(n \log n)$. به بیان دیگر، مرتب‌کردن مبنایی تنها وقتی خوب اجرا می‌شود که s تعداد ارقام در این نمایش A_i ها کوچک باشد.

عیب دیگر مرتب‌کردن مبنایی آن است که ممکن است به $n * d$ خانه حافظه احتیاج داشته باشد. این مطلب از این واقعیت ناشی می‌شود که تمام عناصر را می‌توان در طی یک مرحله داده شده به یک صندوق فرستاد. این عیب را می‌توان با استفاده از لیستهای پیوندی به عوض آرایه، به حداقل رساند که عناصر را در مرحله داده شده ذخیره می‌کند. با وجود این همچنان به $n * 2$ خانه حافظه نیازمندیم.

۸-۹ جستجوی اطلاعات و اصلاح داده‌ها

فرض کنید S یک مجموعه از داده‌ها باشد که به وسیله یک جدول، با استفاده از یک نوع ساختمان داده در حافظه ذخیره می‌شود. جستجو کردن عملی است که LOC مکان یکی از اطلاعات داده شده $ITEM$ را در حافظه پیدا می‌کند یا پیغامی می‌دهد که آیا $ITEM$ در S وجود دارد یا خیر. هرگاه $ITEM$ در S وجود داشته باشد جستجو را موفق، در غیر این صورت ناموفق گویند. الگوریتم جستجویی که مورد استفاده قرار می‌گیرد اساساً به نوع ساختمان داده‌ای بستگی دارد که برای ذخیره S در حافظه بکار گرفته می‌شود.

اصلاح داده‌ها: عبارت است از عملیات اضافه کردن، حذف کردن و تازه کردن داده‌ها. در اینجا منظور از اصلاح داده‌ها اساساً اضافه کردن و حذف داده‌ها است. این عملیات ارتباط نزدیکی با جستجو کردن دارند زیرا معمولاً برای حذف باید به جستجوی مکان $ITEM$ پرداخت و برای اضافه کردن $ITEM$ در جدول باید مکان صحیح آن را برای این منظور جستجو کرد. عملیات اضافه کردن یا حذف نیز به مقدار معینی زمان برای اجرا احتیاج دارد که اساساً به نوع ساختمان داده مورد استفاده بستگی دارد.

به بیان کلی‌تر، یک توازن بین ساختمان داده‌ای که دارای الگوریتم‌های جستجوی سریع است و ساختمان داده‌ای که دارای الگوریتم‌های اصلاح سریع است وجود دارد. این وضعیت در زیر با مثال توضیح داده شده است که در آن بطور خلاصه جستجو کردن و اصلاح داده‌های سه نوع ساختمان داده، که قبلاً در این کتاب مورد مطالعه قرار گرفت ارائه شده است.

(۱) آرایه مرتب‌شده: در اینجا می‌توان از جستجوی دودویی استفاده کرد که مکان LOC یکی از اطلاعات داده شده $ITEM$ را با زمان $O(\log n)$ پیدا می‌کند. از طرف دیگر عملیات جستجو کردن و حذف خیلی کند هستند زیرا بطور متوسط باید $n/2 = O(n)$ عنصر برای اضافه شدن یا حذف معینی جابجا شوند. بدین ترتیب از یک آرایه مرتب‌شده بهتر است هنگامی استفاده شود که تعداد زیادی عمل جستجو

وجود داشته باشد اما خواسته شود تنها تعداد اندکی داده اصلاح شوند.

(۲) لیست پیوندی: در اینجا می توان تنها جستجوی خطی را انجام داد که مکان LOC یکی از اطلاعات داده شده ITEM را پیدا می کند. این جستجو می تواند خیلی خیلی کند باشد و به زمان $O(n)$ احتیاج دارد. از طرف دیگر، در عملیات اضافه و حذف کردن تنها لازم است تعداد کمی از اشاره گر ها تغییر کنند، بدین ترتیب یک لیست پیوندی هنگامی مورد استفاده قرار می گیرد که تعداد زیادی از داده ها اصلاح می شوند مثلاً در پردازش رشته ها.

(۳) درخت جستجوی دودویی: این ساختمان داده مجموعاً مزایای آرایه مرتب شده و لیست پیوندی را دارا است. به عبارت دیگر، عمل جستجو تنها به جستجو یک مسیر معین P در درخت T تقلیل می یابد که به طور متوسط نیازمند تنها $O(\log n)$ مقایسه است. علاوه بر این، درخت T در حافظه بوسیله یک نمایش پیوندی ذخیره می شود، بنابراین پس از پیداشدن مکان عنصر اضافه شونده و حذف شونده، تنها لازم است چند اشاره گر تغییر کنند. اشکال عمده درخت جستجوی دودویی آن است که درخت ممکن است خیلی نامتوازن Unbalanced باشد، در نتیجه طول مسیر P به عوض $O(\log n)$ ممکن است $O(n)$ باشد، این مطلب جستجو را تقریباً به یک جستجوی خطی تبدیل می کند.

توجه کنید: با استفاده از درخت جستجوی دودویی با ارتفاع متوازن سناریوی بدترین حالت بالا را می توان حذف کرد که پس از هر عمل اضافه و حذف، از نو متوازن می شود. الگوریتم های این گونه تجدید توازن نسبتاً پیچیده است و در محدوده درس ساختمان داده ها قرار ندارد.

جستجو در فایل ها، جستجوی اشاره گر ها

فرض کنید فایل F متشکل از رکوردهای R_1, R_2, \dots, R_n در حافظه ذخیره شده است. معمولاً منظور از جستجو در فایل F پیدا کردن مکان LOC رکورد در حافظه با مقدار کلیدی معلوم نسبت به فیلد کلیدی اولیه یا اصلی K است. یک راه ساده برای انجام جستجو استفاده از آرایه مرتب شده ای از اشاره گر های کمکی است که در بخش ۲-۹ توضیح داده شده است. آنگاه با استفاده از جستجوی دودویی به سرعت می توان LOC مکان رکورد با کلید داده شده را پیدا کرد. درحالتی که تعداد زیادی عمل حذف و اضافه در فایل انجام می شود، به عوض یک آرایه مرتب شده کمکی می توان از یک درخت جستجوی دودویی کمکی استفاده کرد. در هر حال، جستجو در فایل F به جستجوی مجموعه ای از عناصر S منتهی می شود که در بالا مورد بحث و بررسی قرار گرفت.

۹-۹ درهم سازی HASHING

زمان جستجوی تمام الگوریتم هایی که تاکنون مورد بررسی قرار گرفت بستگی به n یعنی تعداد

عنصر مجموعه داده‌ها، S دارد. این بخش یک روش جستجو موسوم به درهم‌سازی یا آدرس‌دهی درهم‌ساز را توضیح می‌دهد که اساساً مستقل از عدد n است.

اصطلاحی که در ارائه درهم‌سازی بکار می‌رود در ارتباط با مدیریت فایل‌ها است و قبل از همه، فرض می‌کنیم فایل F از n رکورد تشکیل شده با مجموعه‌ای از کلیدها K وجود دارد که به‌طور منحصر بفرد رکورد فایل F را مشخص می‌کنند. در وهله دوم، فرض می‌کنیم که F به وسیله یک جدول T با m خانه حافظه ذخیره می‌شود و فرض می‌کنیم که L مجموعه آدرس خانه‌های حافظه در T است. جهت سهولت در نمادگذاری فرض می‌کنیم که کلیدها در K و آدرسها در L اعداد صحیح (دهدهی) هستند. روشهای مشابهی وجود دارد که با اعداد صحیح دودویی یا با کلیدهایی کار می‌کند که، رشته‌های کاراکتری هستند نظیر اسامی، زیرا در روش استاندارد رشته‌ها را با اعداد صحیح نمایش می‌دهند. به کمک مثال زیر موضوع درهم‌سازی را توضیح می‌دهیم.

مثال ۹-۹

شرکتی را در نظر بگیرید که 68 کارمند دارد و هر کارمند یک شماره کارمندی 4 رقمی دارد که به عنوان کلید اولیه یا اصلی در فایل کارمندان شرکت استفاده می‌شود. درواقع می‌توانیم از شماره کارمندی به عنوان آدرس رکورد در حافظه استفاده کنیم. برای جستجو به هیچ مقایسه‌ای احتیاج نیست. متأسفانه، این روش نیازمند فضایی به اندازه 10000 خانه حافظه است حال آن که در عمل، از فضایی کمتر از 30 خانه حافظه از این نوع استفاده می‌شود. واضح است که این توازن حافظه برای زمان مقرون به صرفه نیست. ایده کلی استفاده از کلید در تعیین آدرس یک رکورد ایده بسیار جالبی است اما باید طوری اصلاح شود تا فضای زیادی از حافظه به هدر نرود. این اصلاح، شکل یک تابع H از K مجموعه کلیدها، به L مجموعه آدرسهای حافظه را به خود می‌گیرد. چنین تابعی

$$H: K \rightarrow L$$

یک تابع درهم‌ساز یا یک تابع درهم‌سازی نامیده می‌شود. متأسفانه باید گفت که تابع H مقادیر متمایز و مختلف را نتیجه نمی‌دهد، یعنی ممکن است از دو مقدار کلیدی مختلف K_1 و K_2 یک آدرس درهم‌ساز به دست آید. به این وضعیت تصادم یا برخورد COLLISION می‌گویند همچنین باید از روشهایی برای حل مسأله برخورد استفاده کرد. بنابراین، مبحث درهم‌سازی به دو قسمت تقسیم می‌شود: (۱) تابع‌های درهم‌ساز و (۲) حل مسأله برخورد. ما این دو قسمت را مستقلاً بررسی می‌کنیم.

تابع‌های درهم‌ساز

دو معیار اصلی که در انتخاب تابع درهم‌ساز $H: K \rightarrow L$ مورد استفاده قرار می‌گیرد به شرح زیر است.

اول از همه، تابع H باید بسیار ساده و هنگام انجام محاسبات، سریع باشد. ثانیاً تابع H باید تاحد ممکن، آدرسهای درهم سازی همه عناصر مجموعه L را بطور یکنواخت توزیع کند طوری که تعداد برخوردها، حداقل باشد. طبیعی است که هیچ تضمینی وجود ندارد که شرط دوم بدون آن که از قبل راجع به کلیدها و آدرسها اطلاعی داشته باشیم بتواند بطور کامل محقق شود. با وجود این، روشهای کلی معینی وجود دارد که در حل مسأله برخورد به ماکمم می کنند. یکی از این روشها روش "تجزیه" یک کلید k به قطعه های مختلف و ترکیب قطعات به صورتی است که تشکیل آدرس درهم ساز $H(K)$ را بدهند. اصطلاح "درهم سازی" از این روش "تجزیه" یک کلید به قطعات مختلف گرفته شده است.

و اما بعد! چند تابع درهم ساز معروف را معرفی می کنیم. تأکید می کنیم که هر یک از این تابع های درهم ساز می توانند به سادگی و با سرعت زیاد در کامپیوتر ارزیابی شوند.

(الف) روش تقسیم. در K عدد m را که بزرگتر از n تعداد کلیدها است انتخاب کنید. m معمولاً طوری انتخاب می شود که یک عدد اول یا عددی بدون مقسوم علیه های کوچک باشد، زیرا این کار غالباً تعداد برخوردها را به حداقل می رساند. تابع درهم ساز H به صورت زیر تعریف می شود:

$$H(k) = k \pmod{m} \quad \text{یا} \quad H(k) = k \pmod{m} + 1$$

در اینجا $k \pmod{m}$ نمایش باقیمانده تقسیم k بر m است. فرمول دوم هنگامی مورد استفاده قرار می گیرد که بخواهیم آدرسهای درهم سازی بجای تغییر از 0 تا $m-1$ ، از 1 تا m تغییر کنند.

(ب) روش میان مربع عدد. کلید k به توان دو می رسد. آنگاه تابع درهم ساز H به وسیله

$$H(k) = I$$

تعریف می شود که در آن I با حذف ارقام اول و آخر k^2 به دست می آید. تأکید می کنیم که برای تمام کلیدها باید از مکان های یکسان در k^2 استفاده شود.

(ج) روش تا کردن. کلید k به k_1, k_2, \dots, k_r قسمت تجزیه می شود که در آن هر قسمت بجز احتمالاً قسمت آخر، تعداد ارقام مساوی دارند که برای آدرس مورد نظر مورد استفاده قرار می گیرند. آنگاه این قسمت ها با هم جمع شده در حاصل جمع از آخرین رقم انتقالی چشم پوشی می شود. به بیان دیگر:

$$H(k) = k_1 + k_2 + \dots + k_r$$

که در آن از سمت چپ ترین رقم انتقالی در صورت وجود، چشم پوشی می شود. گاهی اوقات قبل از عمل جمع، برای انجام عملیات بیشتر، ارقام هر یک از قسمت های k_2, k_4, \dots که دارای شماره زوج هستند مقلوب می شوند.

مثال ۹-۱۰

شرکت مثال ۹-۹ را در نظر بگیرید که به هر یک از 68 کارمندش، یک عدد 4 رقمی منحصر بفرد به

عنوان شماره کارمندی نسبت می‌دهد. فرض کنید L از 100 آدرس دورقمی 00,01,02,...,99 تشکیل شده است. تابع درهم‌ساز بالا را بر هر یک شماره‌های کارمندی زیر اعمال می‌کنیم:

$$3205, \quad 7148, \quad 2345$$

(الف) روش تقسیم. یک عدد اول m که نزدیک به 99 است مانند $m = 97$ را انتخاب کنید. آنگاه

$$H(3205) = 4, \quad H(7148) = 67, \quad H(2345) = 17$$

یعنی باقیمانده تقسیم عدد 3205 بر 97 برابر 4، باقیمانده تقسیم 7148 بر 97 برابر 67 و باقیمانده تقسیم عدد 2345 بر 97 برابر 17 است. درحالی‌که آدرسهای حافظه به جای 00 با 01 شروع می‌شود، تابع درهم‌ساز $H(k) = k(\text{mod } m) + 1$ را طوری انتخاب می‌کنیم تا

$$H(3205) = 4 + 1 = 5, \quad H(7148) = 67 + 1 = 68, \quad H(2345) = 17 + 1 = 18$$

به دست آید.

(ب) روش میان مربع عدد. محاسبات زیر انجام می‌شود:

k :	3205	7148	2345
k^2 :	10 272 025	51 093 904	5 499 025
$H(k)$:	72	93	99

ملاحظه می‌کنید که، برای آدرسهای درهم‌سازی رقم‌های چهارم و پنجم با شمارش از طرف راست انتخاب شده است.

(ج) روش تا کردن. کلید k را به دو قسمت تجزیه کنید، با جمع این دو قسمت، آدرسهای درهم‌سازی زیر حاصل می‌شود:

$$H(3205) = 32 + 05 = 37, \quad H(7148) = 71 + 48 = 19, \quad H(2345) = 23 + 45 = 68$$

در $H(7148)$ ملاحظه می‌کنید که از رقم اصلی 1 چشم‌پوشی کرده‌ایم. به بیان دیگر، می‌توان قبل از عمل جمع، قسمت دوم تجزیه عدد را به صورت مقلوب نوشت، به این ترتیب، آدرسهای درهم‌سازی زیر تولید می‌شود:

$$H(3205) = 32 + 50 = 82, \quad H(7148) = 71 + 84 = 55, \quad H(2345) = 23 + 54 = 77$$

حل مسأله برخورد

فرض کنید بخواهیم رکورد جدید R با کلید k را به فایل F اضافه کنیم، اما فرض کنید آدرس خانه حافظه $H(k)$ قبلاً اشغال شده است. به این وضعیت برخورد یا تصادم می‌گویند. این بخش دو روش کلی حل مسأله برخورد را توضیح می‌دهد. روش خاصی که دانشجو انتخاب می‌کند بستگی به چند عامل دارد. یک عامل مهم، نسبت n تعداد کلیدها در K (یعنی تعداد رکوردها در F) به m تعداد آدرسهای درهم‌ساز در L است. این نسبت، $\lambda = n/m$ ، ضریب باردهی نامیده می‌شود.

قبل از هر چیز، نشان می‌دهیم که اجتناب از برخورد تقریباً غیرممکن است. به طور مشخص فرض کنید یک کلاس دارای 24 دانشجو است و فرض کنید جدول، فضایی برای 365 رکورد در اختیار دارد قرار است یک تابع تصادفی درهم‌ساز روز تولد دانشجو را به صورت آدرس درهم‌ساز اختیار کند. هرچند ضریب باردهی $7\% \approx 24/365 = \lambda$ بسیار کوچک است اما می‌توان نشان داد احتمال این که بیش از دو دانشجو دارای یک روز تولد باشند پنجاه - پنجاه است.

کارایی یک تابع درهم‌ساز برای حل مسأله برخورد، به وسیله میانگین تعداد جستجوها $probes$ (مقایسه‌های کلیدی) اندازه‌گیری می‌شود که لازم‌اش تعیین مکان رکورد با کلید k ی داده شده است. اساساً کارایی تابع درهم‌ساز به ضریب باردهی بستگی دارد. به ویژه این‌که، ما اغلب به دو کمیت زیر علاقمندیم:

$$S(\lambda) = \text{میانگین تعداد جستجوها برای جستجوی موفق}$$

$$U(\lambda) = \text{میانگین تعداد جستجوها برای جستجوی ناموفق}$$

این کمیتها برای روشهای حل مسأله برخورد مورد بررسی قرار خواهند گرفت.

آدرس‌دهی باز، جستجوی خطی و اصلاح آن

فرض کنید یک رکورد جدید R با کلید k را می‌خواهیم به جدول حافظه T اضافه کنیم اما خانه حافظه با آدرس درهم‌سازی $h(k) = H(k)$ قبلاً پر شده است. روش طبیعی برای حل مسأله برخورد آن است که اولین فضای حافظه موجود بعد از $T[h]$ را در R ، جایگزین کنیم. فرض می‌کنیم که جدول T با m خانه حافظه به صورت چرخشی یا حلقوی است، طوری که $T[1]$ بعد از $T[m]$ می‌آید. بنابراین با این روش برخورد، برای رکورد R در جدول T از طریق جستجوی خطی مکانهای $T[h], T[h+1], T[h+2], \dots$ عمل جستجو را انجام می‌دهیم تا رکورد R پیدا شود یا به خانه حافظه خالی برخورد کنیم که بیانگر ناموفق بودن جستجو است.

حل مسأله برخورد به شکل بالا، جستجوی خطی نامیده می‌شود. ثابت می‌شود که میانگین تعداد جستجوها برای یک جستجوی موفق و برای یک جستجوی ناموفق کمیتهای مربوطه زیرند:

$$U(\lambda) = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{(1-\lambda)^2} \right) \quad \text{و} \quad S(\lambda) = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{1-\lambda} \right)$$

که در اینجا $n/m = \lambda$ ضریب باردهی است.

مثال ۱۱-۹

فرض کنید جدول T دارای 11 خانه حافظه $T[1], T[2], \dots, T[11]$ است و فرض کنید فایل F از 8 رکورد

A, B, C, D, E, X, Y, Z با آدرسهای درهم‌سازی زیر تشکیل شده است:

Record: A, B, C, D, E, X, Y, Z

H(k): 4, 8, 2, 11, 4, 11, 5, 1

فرض کنید 8 رکورد با ترتیب بالا وارد جدول T شده‌اند. آنگاه فایل F به صورت زیر در حافظه ظاهر

خواهد شد: Table T: X, C, Z, A, E, Y, __, B, __, __, D

Address: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11

اگرچه Y تنها رکورد با آدرس درهم‌ساز $H(k) = 5$ است اما این رکورد در T[5] جایگزین نمی‌شود چون T[5] قبلاً توسط E اشغال شده است زیرا قبل از آن در T[4] برخورد وجود داشته است. به همین ترتیب، Z در T[1] ظاهر نمی‌شود.

S میانگین تعداد جستجوها، در جستجوی موفق به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$S = \frac{1+1+1+1+2+2+2+3}{8} = \frac{13}{8} \approx 1.6$$

U میانگین تعداد جستجوها، در جستجوی ناموفق به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$U = \frac{7+6+5+4+3+2+1+2+1+1+8}{11} = \frac{40}{11} \approx 3.6$$

در حاصل جمع اول تعداد جستجوهای با هم جمع می‌شوند که هر یک از 8 رکورد را پیدا می‌کند و در حاصل جمع دوم تعداد جستجوهای با هم جمع می‌شوند که هر خانه خالی مربوط به 11 خانه را پیدا می‌کند.

یکی از عیبهای اصلی جستجوی خطی آن است که وقتی ضریب باردهی بزرگتر از 50 درصد است رکورد تمایل به جمع شدن در یک جا یا تمایل به خوشه شدن Cluster دارند، یعنی رکوردها، در نزدیکی هم ظاهر می‌شوند. این‌گونه خوشه شدن رکوردها ذاتاً زمان جستجوی میانگین برای یک رکورد را افزایش می‌دهد. دو روش به حداقل رساندن جمع شدن رکوردها در یک جا یا خوشه شدن رکوردها به شرح زیر است:

(۱) جستجوی درجه دوم. فرض کنید رکورد R با کلید k دارای آدرس درهم‌سازی $H(k) = h$ است. آنگاه به جای جستجوی مکانهایی با آدرس‌های $h, h+1, h+2, \dots$ مکانهایی با آدرس

$$h, h+1, h+4, h+9, h+16, \dots, h+i^2, \dots$$

را جستجوی خطی می‌کنیم. اگر m تعداد خانه‌های حافظه در جدول T، یک عدد اول باشد، آنگاه دنباله آدرسهای بالا به نصف خانه حافظه در T دسترسی پیدا خواهد کرد.

(۲) درهم‌سازی مضاعف. در اینجا برای حل مسئله برخورد، از تابع درهم‌ساز دوم H' به شرح زیر استفاده می‌شود. فرض کنید رکورد R با کلید k دارای آدرسهای درهم‌سازی $H(k) = h$ و $H'(k) = h' \neq m$ است.

ما مکانهایی با آدرسهای

$$h, h + h', h + 2h', h + 3h', \dots$$

را جستجوی خطی می‌کنیم. اگر m یک عدد اول باشد، آنگاه دنباله آدرسهای بالا به تمام خانه‌های حافظه در T دسترسی پیدا خواهد کرد.

توجه کنید: پیاده‌سازی عمل حذف، یکی از عیبهای اصلی هر یک از انواع روشهای آدرس‌دهی باز است. به طور مشخص، فرض کنید رکورد R از مکان $T[R]$ حذف شده است. پس از آن فرض کنید هنگام جستجوی رکورد دیگر R' ، $T[R]$ را ملاقات کنیم. این کار الزاماً به معنی ناموفق بودن جستجو نیست. بنابراین، هنگام حذف رکورد R ، باید خانه $T[R]$ را برچسب‌گذاری کنیم تا مشخص شود که این خانه حاوی یک رکورد بوده است. بنابراین، هنگامی که فایل F دائماً دستخوش تغییر است، بندرت آدرس‌دهی باز می‌تواند مورد استفاده قرار گیرد.

زنجیری کردن

زنجیری کردن شامل ذخیره دو جدول در حافظه است. مانند گذشته، قبل از همه فرض می‌کنیم جدول T در حافظه وجود دارد که شامل رکوردهای F است با این تفاوت که T اکنون فیلد اضافی $LINK$ دارد که برای این منظور بکار گرفته می‌شود تا تمام رکوردهای داخل T با یک آدرس‌دهی درهم‌ساز h را بتوان به هم پیوند داد تا تشکیل یک لیست پیوندی بدهند. در مرحله دوم، یک جدول آدرس‌دهی درهم‌ساز $LIST$ وجود دارد که شامل اشاره‌گرها به لیستهای پیوندی داخل T است.

فرض کنید رکورد جدید R با کلید k به فایل F اضافه شده است. R را در اولین مکان حافظه موجود در جدول T قرار می‌دهیم و آنگاه R را با اشاره‌گر $LIST[H(k)]$ به لیست پیوندی اضافه می‌کنیم. اگر لیستهای پیوندی رکوردها مرتب‌شده نباشند، آنگاه R به‌سادگی به ابتدای لیست پیوندی اضافه می‌شود. جستجو برای یک رکورد یا حذف یک رکورد چیزی جز جستجو یک گره یا حذف یک گره از یک لیست پیوندی نیست که به تفصیل در فصل ۵ مورد بحث و بررسی قرار گرفت. ثابت می‌شود که میانگین تعداد جستجوها، با استفاده از زنجیری کردن، برای یک جستجوی موفق یا برای یک جستجوی ناموفق برابر مقادیر تقریبی زیر است:

$$I(\lambda) \approx e^{-\lambda} + \lambda \quad \text{و} \quad S(\lambda) \approx 1 + \frac{1}{2} \lambda$$

در اینجا ضریب باردهی $\lambda = n/m$ می‌تواند بزرگتر از ۱ باشد، چون m تعداد آدرسهای درهم‌ساز، L (نه تعداد خانه‌ها در T) ممکن است کوچکتر از n تعداد رکوردها در F باشد.

مثال ۹-۱۲

بار دیگر اطلاعات مثال ۱۱-۹ را در نظر بگیرید که در آن ۸ رکورد با آدرسهای درهم‌سازی زیر داده

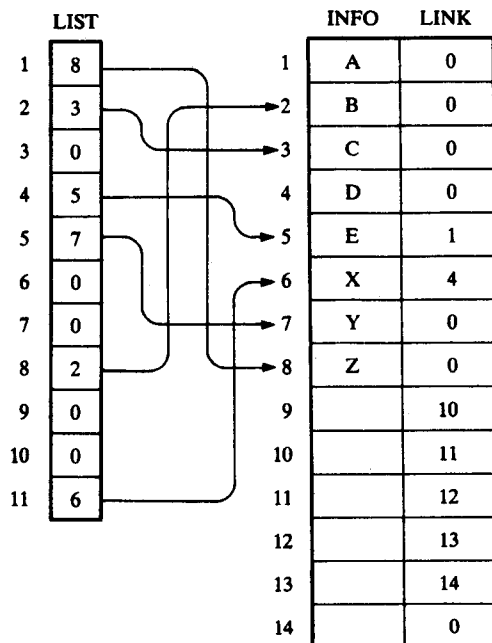
شده است:

Record: A, B, C, D, E, X, Y, Z

$H(k)$: 4, 8, 2, 11, 4, 11, 5, 1

با استفاده از زنجیری کردن، رکوردها مطابق شکل ۷-۹ در حافظه ظاهر می‌شوند.

Table T



AVAIL = 9

شکل ۷-۹

ملاحظه می‌کنید که مکان رکورد R در جدول T به آدرس درهم‌سازی اش وابسته نیست. به سادگی رکورد در اولین گره لیست AVAIL جدول T قرار می‌گیرد. درحقیقت، جدول T نیازمند داشتن تعداد عنصرهای یکسان مانند جدول آدرس‌دهی درهم‌ساز نیست.

عیب عمده زنجیری کردن آن است که لازم است $3m$ خانه حافظه برای اطلاعات در نظر گرفته شود. بطور مشخص، m خانه حافظه برای فیلد اطلاعات INFO، m خانه برای فیلد پیوندی LINK و m خانه برای آرایه اشاره گر LIST وجود دارد. فرض کنید هر رکورد تنها به یک کلمه Word برای تولید اطلاعات

احتیاج داشته باشد. آنگاه پسندیده تر آن است که به منظور حل مسأله برخورد برای جدولی با $3m$ خانه حافظه که ضریب بازدهی $1/3 \leq \lambda$ دارد به جای استفاده از روش زنجیری کردن از روش آدرس دهی باز استفاده شود.

مسأله های تکمیلی

مسأله ۱-۹: یک زیربرنامه $\text{RANDOM}(\text{DATA}, N, K)$ بنویسید تا در آرایه DATA ، N عدد صحیح تصادفی بین ۱ تا K را جایگزین کند.

مسأله ۲-۹: مرتب کردن درجی را به یک زیربرنامه $\text{INSERTSORT}(A, N)$ تبدیل کنید تا آرایه A با N عنصر را مرتب کند. برنامه را با استفاده از داده های زیر اجرا کنید:

(الف) 44, 33, 11, 55, 77, 90, 40, 60, 99, 22, 88, 66

(ب) D, A, T, A, S, T, R, U, C, T, U, R, E, S

مسأله ۳-۹: مرتب کردن درجی را به یک زیربرنامه $\text{INSERTCOUNT}(A, N, \text{NUMB})$ تبدیل کنید تا آرایه A با N عنصر را مرتب کند و NUMB تعداد مقایسه ها را محاسبه کنید.

مسأله ۴-۹: یک برنامه $\text{TESTINSERT}(N, \text{AVE})$ بنویسید که 500 بار زیربرنامه $\text{INSERTCOUNT}(A, N, \text{NUMB})$ را تکرار کند و AVE میانگین 500 مقدار NUMB را به دست آورد. از نظر تئوری، $\text{AVE} \approx N^2/4$ به عنوان هر ورودی از $\text{RANDOM}(A, N, 5 * N)$ از مسأله ۱-۹ استفاده کنید. برنامه را با استفاده از $N = 100$ اجرا کنید. در نتیجه از نظر تئوری $\text{AVE} \approx N^2/4 = 2500$ است.

مسأله ۵-۹: مرتب کردن QuickSort را به صورت زیربرنامه $\text{QUICKCOUNT}(A, N, \text{NUMB})$ بنویسید که آرایه A با N عنصر را مرتب کند و علاوه بر این NUMB تعداد مقایسه را بشمارد. (به بخش ۵-۶ رجوع کنید).

مسأله ۶-۹: یک برنامه $\text{TESTQUICKSORT}(N, \text{AVE})$ بنویسید که 500 بار $\text{QUICKCOUNT}(A, N, \text{NUMB})$ را تکرار کند و AVE میانگین 500 مقدار NUMB را بدست آورد. از نظر تئوری، $\text{AVE} \approx N \log_2 N$ به عنوان هر ورودی از $\text{RANDOM}(A, N, 5 * N)$ از مسأله ۱-۹ استفاده کنید. برنامه را با استفاده از $N = 100$ آزمایش کنید. در نتیجه از نظر تئوری $\text{AVE} \approx 700$ است.

مسأله ۷-۹: زیربرنامه 9.2 را به یک زیربرنامه $\text{MIN}(A, \text{LB}, \text{UB}, \text{LOC})$ تبدیل کنید که LOC مکان کوچکترین عنصر در بین عناصر $A[\text{LB}], \dots, A[\text{UB}]$ را پیدا کند.

مسئله ۸-۹: مرتب‌کردن درجی را به صورت یک زیربرنامه $SELECTSORT(A, N)$ بنویسید که یک آرایه N عنصری را مرتب کند. برنامه را با استفاده از داده‌های زیر آزمایش کنید.

(الف) 44, 33, 11, 55, 77, 90, 40, 60, 99, 22, 88, 66

(ب) D, A, T, A, S, T, R, U, C, T, U, R, E, S

جستجوکردن، درهم‌سازی

مسئله ۹-۹: فرض کنید لیست پیوندی مرتب نشده‌ای در حافظه داده شده است. یک زیربرنامه **Procedure** بنویسید:

SEARCH(INFO, LINK, START, ITEM, LOC)

که (الف) **LOC** مکان عنصر **ITEM** را در لیست پیدا کند یا با هر جستجوی ناموفق قرار دهد $LOC = NULL$ (ب) در صورت موفق‌بودن جستجو، جای عنصر **ITEM** را با عنصر ابتدای لیست عوض کند. به چنین لیستی یک لیست خود سازماندهی شده می‌گویند. این لیست دارای این خاصیت است عناصری که اکثر اوقات مورد دسترسی قرار می‌گیرند به طرف ابتدای لیست منتقل می‌شوند.

مسئله ۹-۱۰: شماره کارمندی 4 رقمی زیر (مثال ۹-۱۰ را ببینید). در نظر بگیرید:

9614, 5882, 6713, 4409, 1825

با استفاده از (الف) روش تقسیم با $m = 97$ (ب) روش میان مربع عدد (ج) روش تا کردن بدون مقلوب کردن عدد و (د) روش تا کردن با مقلوب کردن عدد، آدرس دهی درهم‌ساز 2 رقمی هر شماره کارمندی را بدست آورید.

مسئله ۹-۱۱: داده‌های مثال ۹-۱۱ را در نظر بگیرید. فرض کنید 8 رکورد A, B, C, D, E, X, Y, Z به ترتیب عکس، به داخل جدول T وارد می‌شوند. (الف) نشان دهید که چگونه فایل F در حافظه ذخیره می‌شود. (ب) S میانگین تعداد جستجوها برای یک جستجوی موفق و U میانگین تعداد جستجوها برای یک جستجوی ناموفق را پیدا کنید. این نتیجه را با نتیجه مثال ۹-۱۱ مقایسه کنید.

مسئله ۹-۱۲: داده‌های مثال ۹-۱۲ و شکل ۹-۷ را در نظر بگیرید. فرض کنید رکوردهای اضافی زیر به فایل اضافه شده‌اند:

(P, 2), (Q, 7), (R, 4), (S, 9)

در اینجا عنصر سمت چپ زوج مرتب بالا رکورد، و عنصر سمت راست آدرس درهم‌سازی است. (الف) جدول تازه‌شده T و LIST را به دست آورید. (ب) S میانگین تعداد جستجوها برای یک جستجوی

موفق و U تعداد میانگین جستجوها برای یک جستجوی ناموفق را محاسبه کنید.

مسأله ۹-۱۳: یک زیربرنامه $MID(KEY, HASH)$ بنویسید که با استفاده از روش میان مربع عدد، آدرس درهم سازی ۲ رقمی $HASH$ یک کلید با شماره کارمندی ۴ رقمی را پیدا کنید.

مسأله ۹-۱۴: یک زیربرنامه $FOLD(KEY, HASH)$ بنویسید که با استفاده از روش تا کردن با مقلوب کردن عدد، آدرس درهم سازی ۲ رقمی $HASH$ یک کلید با شماره کارمندی ۴ رقمی را پیدا کند.

واژه‌نامه ریاضی و کامپیوتر

A

Absolute value	قدر مطلق
Ackermann function	تابع آکرمان
Adjacency matrix	ماتریس مجاورت - ماتریس همسایگی
Adjacent nodes	گره‌های مجاور
Algebraic expression	عبارت جبری
Algorithm	الگوریتم
Algorithmic notation	نمایش الگوریتمی
Ancestor	جد
Arithmetic expression	عبارت محاسباتی
Array	آرایه
circular	حلقوی
jagged	پله‌ای - دندان‌های
multidimensional	چند بعدی
parallel	موازی
Assignment statement	دستور جایگزینی
Attribute	خصوصیه - مشخصه
Average case	حالت میانگین

B

Base address	آدرس پایه - آدرس مبنا
Base criteria	معیار پایه‌ای

Base value	مقدار پایه
Big O notation	نماد O ی بزرگ
Binary search	جستجوی دودویی
complexity of	پیچیدگی
Binary search tree	درخت جستجوی دودویی
searching in	جستجو در
Binary tree	درخت دودویی
complete	کامل
depth of	عمق
extended	گسترش یافته
height of	ارتفاع
traversing	پیمایش

Bit matrix	ماتریس بیتی - ماتریس بولین
Boolean matrix	ماتریس بولین
Branch	شاخه
Breadth - first search	جستجوی عرضی - جستجوی ردیفی
Bubble sort	مرتب کردن حبابی
complexity of	پیچیدگی

C

Ceiling function	تابع سقف
Chaining	زنجیری کردن
Character set	مجموعه کاراکترها

Character type	نوع کاراکتری
Child	بچه
Circular array	آرایه حلقوی
Circular list	لیست حلقوی
Coding	کدگذاری کردن

Collision resolution	حل مسأله برخورد
Column	ستون

Column - major order	روش ستونی
----------------------	-----------

Complete binary tree	درخت دودویی کامل
----------------------	------------------

Complete graph	گراف کامل
----------------	-----------

Complexity of algorithm	پیچیدگی الگوریتم
-------------------------	------------------

Concatenation	اتصال - پیوند
---------------	---------------

Conditional flow	جریان شرطی
------------------	------------

Connected graph	گراف همبند - گراف متصل
strongly	قوی

Control, flow of	جریان کنترلی
------------------	--------------

Copying	کپی کردن
---------	----------

Cycle	دور - حلقه
-------	------------

D

Data	داده‌ها - اطلاعات
------	-------------------

Data base management	مدیریت بانک اطلاعاتی
----------------------	----------------------

Data modification	اصلاح داده‌ها - تغییر داده‌ها
-------------------	-------------------------------

Data structure	ساختمان داده‌ها
----------------	-----------------

Decision tree	درخت تصمیم‌گیری
---------------	-----------------

Degree of a node	درجه یک گره
------------------	-------------

Deleting	حذف
----------	-----

Dense list	لیست متراکم - لیست فشرده
------------	--------------------------

Depth	عمق
-------	-----

Depth - first search

Depth - first search	جستجوی عمقی
----------------------	-------------

Deque	صف دوسره
-------	----------

Descendent	نسل
------------	-----

Diagonal	قطر
----------	-----

Digraph	دایگراف
---------	---------

Directed graph	گراف جهت‌دار
----------------	--------------

Divide - and - conquer	تقسیم کردن و پیروز شدن
------------------------	------------------------

Division method	روش تقسیم
-----------------	-----------

Double hashing	درهم سازی مضاعف
----------------	-----------------

E

Edge	یال
------	-----

Elementary item	عنصر ابتدایی
-----------------	--------------

Empty	خالی
-------	------

Empty string	رشته پوچ
--------------	----------

Entity	موجودیت
--------	---------

Exit	خروج از الگوریتم - خروج
------	-------------------------

Exponent	نما
----------	-----

Extended binary tree	درخت دودویی گسترش یافته
----------------------	-------------------------

External	خارجی
----------	-------

External node	گره خارجی
---------------	-----------

External path length	طول مسیر خارجی
----------------------	----------------

F

Factorial function	تابع فاکتوریل
--------------------	---------------

Father	پدر
--------	-----

Fibonacci sequence	دنباله فیبوناچی
--------------------	-----------------

Field	میدان - فیلد
-------	--------------

File	فایل - پرونده
------	---------------

File management	مدیریت فایل
-----------------	-------------

File searching	جستجو در فایل
----------------	---------------

File sorting	مرتب کردن فایل
--------------	----------------

Finite graph	گراف متناهی
--------------	-------------

Fixed - length records

رکوردهای با طول ثابت

Fixed - length storage

حافظه با طول ثابت

Floor function

تابع کف

Folding method

روش تا کردن

Free - storage list

لیست حافظه آزاد

Function subalgorithm

زیرالگوریتم تابعی

G**Garbage collection**

جمع‌آوری حافظه بلااستفاده

General tree

درخت عمومی

representation of

نمایش

Generation

نسل

Global variables

متغیرهای سراسری

Graph

گراف

complete

کامل

labeled

برچسب‌دار - شمار دار

linked representation of

نمایش پیوندی

sequential representation of

نمایش ترتیبی

simple

ساده

weighted

وزن داده شده - وزن دار

H**Hanoi, Towers of**

برج‌های هانوی

Hash addressing

آدرس‌دهی درهم‌ساز

Hash function

تابع درهم‌ساز

Hashing

درهم‌سازی

Header linked list

لیست پیوندی دارای سرلیست

Header list, two - way

لیست پیوندی دو طرفه دارای سرلیست

Header node

سرگره - سرلیست

Height of a tree

ارتفاع یک درخت

Horner's method

روش هورنر

Huffman's algorithm

الگوریتم هافمن

I**Identifier**

شناسه

Identifying number

شماره شناسایی

Incedence matrix

ماتریس برخورد

Indegree

درجه ورودی

Index

شاخص

Indexing

شاخص‌گذاری کردن

Infix notation

نمایش میان‌وندی

Initial point

نقطه اولیه - نقطه ابتدایی

Inorder threading

نخ‌کشی میان ترتیبی (Inorder)

Insertion sort

مرتب کردن جای دانی

Integer value

مقدار صحیح

Internal node

گره داخلی

Internal path length

طول مسیر داخلی

Isolated node

گره منفرد

Item

عنصر

Iteration logic

منطق تکرار

J**Jagged array**

آرایه پله‌ای

- آرایه‌ای دندان‌های

K**Key**

کلید

Key value

مقدار کلیدی

L**Labeled graph**

گراف برچسب‌دار

- گراف شماره‌دار

Leaf

برگ

Left child	بچه چپ
Left subtree	زیردرخت چپ
Left successor	ریشه بعدی چپ - گره
	بعدی چپ
Length	طول
of path	مسیر
of string	رشته
Level	سطح
level number	عدد سطح
Linear array	آرایه خطی
deleting from	حذف از
Linear probing	جستجوی خطی
Linear search	جستجوی خطی
Link field	فیلد پیوند - فیلد اتصال
Linked list	لیست پیوندی
circular	چرخشی - خلقوی
copying	کپی کردن
header	دارای سرلیست
traversing	پیمایش
two - way	دوطرفه
Linked storage	حافظه پیوندی
free - storage	حافظه آزاد
Load factor	ضریب باردهی
Local variables	متغیرهای محلی
Logic	منطق
Logical	منطقی
Loop	حلقه - حلقه تکرار
Lower bound	کران پائین

M

Matrix	ماتریس
adjacency	مجاورتی - همسایگی
bit	بیت
Boolean	بولین
incedence	برخورد
path	مسیر

reachability	قابل دسترس
sparse	خلوت - نئک
triangular	مثلثی
tridiagonal	سه قطری
weight	وزن
Matrix multiplication	ضرب ماتریسها
Mean	میانگین
Memory	حافظه
Memory allocation	تخصیص حافظه - حافظه گرفتن
Merge - sort	ادغام و مرتب کردن
Merging	ادغام کردن
Midsquare method	روش میان مربع عدد
Module	باقیمانده - قطعه برنامه
Modulus arithmetic	حساب باقیمانده‌ای
Multidimensional arrays	آرایه‌های چند بعدی
Multigraph	گراف چندگانه - چند گراف
Multiple edges	یالهای چندگانه

N

Neighbor	همسایه
Nextpointer field	فیلد اشاره گر بعدی
Node	گره
external	خارجی
header	سرلیست
internal	داخلی
isolated	منفرد - تنها
terminal	انتهاایی
Nonlocal variables	متغیرهای غیر محلی
NULL	پوچ
Null pointer	اشاره گر پوچ

Null string	رشته تهی - رشته پوچ
Null tree	درخت خالی
Number, prority	عدد اولویت

O

O notation	نماد O
One - dimensional array	

One - way list	آرایه یک بعدی
Open addressing	لیست یکطرفه
	آدرس دهی باز
	- آدرس دهی آزاد

Operations	عملیات
Outdegree	درجه خروجی
Overflow	سرریزی
stack	پشته

P

Page	صفحه
Parallel arrays	آرایه‌های موازی
Parent node	گره پدر
Partial ordering	مرتب کردن جزئی
Pass	گذر - مرحله
Path length	طول مسیر
Path matrix	ماتریس مسیر
Pattern matching	تطبیق الگو
Permutation	جایگشت
Pointer	اشاره گر
Polish notation	نمادگذاری لهستانی
Polynomial	چند جمله‌ای
Poset	مجموعه جزئاً مرتب
Postfix notation	نمادگذاری پسوندی
Postorder traversal	پیمایش postorder
Primary key	کلید اولیه - کلید اصلی
Prime number	عدد اول
Priority number	عدد اولویت

Priority queue	صف اولویت
Probe	جستجو
quadratic	درجه دوم
Procedure	زیربرنامه procedure

Q

Quadratic probing	جستجوی درجه دوم
Queue	صف
priority	اولویت

R

Radix sort	مرتب کردن مبنایی
Reachable in a graph	دسترسی در یک گراف
Reachability matrix	ماتریس قابل دسترسی
Real type	نوع اعشاری
Rear	انتهای صف
Record	رکورد
fixed - length	با طول ثابت
variable - length	با طول متغیر
Record structure	ساختار رکوردی
Recursion	بازگشتی
Recursive procedure	زیربرنامه بازگشتی

Recursively defined

	تعریف شده به صورت بازگشتی
Regular array	آرایه منظم
ReHeap	Heap سازی مجدد
Remainder function	تابع باقیمانده
Repetitive flow	جریان تکراری
Replacement	جانشینی
Right son	بچه راست
Right subtree	زیردرخت راست
Right successor	گره بعدی راست

Root	ریشه	Spanning Tree	پیمیدگی کران پائین
Rooted tree	درخت ریشه‌دار	radix	درخت فراگیر
Row	سطر	topological	مبنایی
Row - major order	روش سطری	Sparse matrix	موضعی
S		Square matrix	ماتریس خلوت
Scalar	اسکالر	Stack	ماتریس مربعی
Search	جستجو کردن	Status	پشته
binary	دودویی	String	وضعیت - حالت
linear	خطی	Strongly connected graph	رشته
sequential	ترتیبی		
Searching	جستجو	Subscript	گراف همبندی قوی
binary search tree	درخت جستجوی دودویی	Substring	اندیس - زیرنویس
files	فایلها	Subtree	زیررشته
graph	گراف	Successor	زیردرخت
linked list	لیست پیوندی	Summation symbol	گره بعدی
pointer	اشاره‌گر	Symmetric matrix	نماد جمع
two - way list	لیست دوطرفه		ماتریس متقارن
selection logic	منطق انتخاب	T	
Selection sort	مرتب کردن انتخابی	Table	جدول
Sequence logic	منطق توالی دستورات	Terminal node	گره انتهایی
Sequential sort	مرتب کردن ترتیبی	Terminal point	نقطه انتهایی
Shortest - path algorithm	الگوریتم کوتاهترین مسیر	Thread	نخ‌کشی
Sibling	همردیف - برادر	Threaded tree	درخت نخ‌کشی شده
Side effect	اثر جانبی	Time - space tradeoff	توازن بین زمان و حافظه
Similar graph	گراف متشابه - گراف مشابه	Top	بالا
Similar tree	درخت متشابه	Top of a stack	بالای پشته
Simple path	مسیر ساده	Topological sorting	مرتب کردن موضعی
Son	بچه - پسر	Towers of Hanoi	برج‌های هانوی
Sorting	مرتب کردن	Transitive closure	بستگی تراگذری
bubble	حبابی	Traversing	پیمایش
insertion	درجی - جای‌دانی	binary tree	درخت دودویی
lower bound complexity		graph	گراف
		linear array	آرایه خطی

linked list	لیست پیوندی
Two - way list	لیست دوطرفه
Tree	درخت
binary	دودویی
decision	تصمیم‌گیری
depth of	عمق
general	عمومی
height of	ارتفاع
threaded	نخ کشی شده
Triangular matrix	ماتریس مثلثی
Tridiagonal matrix	ماتریس سه قطری
Two - dimensional array	آرایه دوبعدی
Two - way header list	لیست دو طرفه دارای سرلیست
Two - way list	لیست دوطرفه
Type	نوع

U

Underflow	زیرریزی
Unilaterally connected	همبند یکطرفه
Upper bound	کران بالا

V

Variable	متغیر
global	سراسری
local	محلی
subscripted	اندیس‌دار
Variable length	طول متغیر
Variable	متغیر

Variable - length records

رکوردهایی با طول متغیر

Variable - length storage

حافظه با طول متغیر

Vertex رأس

Vertices رأسها

Visiting ملاقات - بررسی کردن

W

Warshall's algorithm

الگوریتم وارشال

Weight وزن

Weight matrix ماتریس وزن

Weighted graph گراف وزن‌دار

- گراف وزن داده شده

Weighted path length

طول مسیر وزن داده شده

Word processing پردازش رشته

Worst case ترین حالت

X

X - axis محور X ها

Y

Yield نتیجه دادن

Z

Zone ناحیه - منطقه

لیست کتب منتشر شده توسط دانشگاه هرمرگان

- ۱- هنری نیومن
- ۲- مقاومت شانوارها
- ۳- تعادل و پایداری شانوارها
- ۴- Chemical Reaction Engineering
- ۵- Process Systems Analysis and Control
- ۶- رنگرزی الیاف مصنوعی و اسات سلولز
- ۷- مبانی ماشینهای الکتریکی
- ۸- Unit-Operations of Chemical Engineering
- ۹- عملیات واحد (چاپ پنجم)
- ۱۰- Heat Transfer
- ۱۱-۱۳ * استودیوی سه بعدی ۲ (دوره سه جلدی) (چاپ دوم)
- ۱۲-۱۵ * خودآموز استودیوی سه بعدی ۲ (دوره دو جلدی) (چاپ چهارم)
- ۱۶- اصول ساختمان دادهها (چاپ هفتم)
- ۱۷- فارسی و تاجیک زبانی
- ۱۸- ریاضیات پیش دانشگاهی لایپلد (جلد اول)
- ۱۹- MS DOS
- ۲۰-۲۱ * اتوکد ۱۳ در محیط ویندوز (دوره دو جلدی)
- ۲۲- فلو تاسیون
- ۲۳- TTL جلد سوم (چاپ سوم)
- ۲۴- HCMOS (چاپ دوم)
- ۲۵- ماشینهای الکتریکی (چاپین)
- ۲۶- نوپاس کارلایل
- ۲۷-۳۱ * 3D Studio ترسیم دوبعدی و حجم سازی
- ۳۲- 2000 Solved problems In Electronics
- ۳۳- 2000 Solved problems In Electromagnetics
- ۳۴- مبانی کامپیوتر و فلوچارت (چاپ دوم)
- ۳۵- طراحی اجزاء ماشین (جلد سوم)
- ۳۶- تنش در روبهها و پوستهها
- ۳۷- اتوکد در محیط 3D
- ۳۸- TTL 1 (چاپ سوم)
- ۳۹- TTL 2 (چاپ دوم)
- ۴۰- CMOS 1 (چاپ سوم)
- ۴۱- CMOS 2 (چاپ دوم)
- ۴۲- مکانیک سیالات
- ۴۳- راهنمای سریع دلفی
- ۴۴- دینامیک کشتی
- ۴۵- سازهای دوبایی
- ۴۶- اینترنت برای همه (چاپ دوم)
- ۴۷- The Master IC Cookbook (چاپ دوم)
- ۴۸- C آسان بیاموزید
- ۴۹- راهنمای کاربردی 3D Studio MAX (دوره دو جلدی) (چاپ دوم)
- ۴۹-۵۰ * راهنمای کاربردی 3D Studio MAX (دوره دو جلدی) (چاپ دوم)
- ۵۱- کلیه مهندسی عمران (سازه - خاک و پی) (چاپ سوم)
- ۵۲- شبکه اینترنت در ایران و جهان (چاپ دوم)
- ۵۳- عملیات انتقال جرم
- ۵۴- زئونیسم اکتشافی
- ۵۵- مثنوی معنوی - دفتر اول
- ۵۶- فاکس پرو
- ۵۷- حسابان ۱
- ۵۸- حسابان ۲
- ۵۹- کاربرد آمار در مدیریت و اقتصاد (چهار گزیده ای)
- ۶۰- کاربرد ریاضیات در مدیریت و اقتصاد (چهار گزیده ای)
- ۶۱- Biomechanical Of Modeling Systems
- ۶۲-۶۳ * خودآموز کامل استودیوی سه بعدی MAX (دوره دو جلدی)
- ۶۴- هدایت و مراقبت از کودکان و نوزادان (چاپ دوم)
- ۶۵- آزمایشات مکانیکی
- ۶۶- دستور زبان انگلیسی
- ۶۷- ریاضیات و کاربرد آن در مدیریت
- ۶۸- راهنمای حل ریاضیات و کاربرد آن در مدیریت
- ۶۹- راهنمای سیستمهای مختاراتی
- ۷۰- کامپیوترها چگونه کار می کنند
- ۷۱- پیدل شناسی
- ۷۲- راهنمای سریع ++C (چاپ سوم)
- ۷۳- راهنمای CorelDRAW
- ۷۴- تحلیل و ترکیب بندی مکانیزمها
- ۷۵- مبانی نقشه کشی صنعتی (۱) (چاپ دوم)
- ۷۶- آشنایی با احتمال
- ۷۷- زغال سنگ و بیوتکنولوژی
- ۷۸- پرتولوژی سنگهای رسوبی
- ۷۹- اتوکد ۱۴ تحت ویندوز (چاپ ششم)
- ۸۰- مثنوی معنوی - دفتر دوم
- ۸۱- مثنوی معنوی - دفتر سوم
- ۸۲- آکوپیناس
- ۸۳- فراوری مواد معدنی
- ۸۴- اصول نامه نگاری در زبان انگلیسی (چاپ دوم)
- ۸۵- آزمایشگاه مکانیک خاک
- ۸۶- نرم افزار Mathematica (چاپ سوم)
- ۸۷- تجزیه و تحلیل و طراحی سیستمها
- ۸۸- تئوری انتقال انرژی و طرح خطوط مدرن
- ۸۹- تصاویر استریوگرافی و کاربرد آن در مکانیک سنگ
- ۹۰- تصاویر استریوگرافی در زمین شناسی ساختمانی
- ۹۱- مسائل کاربردی کانه آراتی و فلوتاسیون
- ۹۲-۹۳ * استودیوی سه بعدی 2.5 Max (دوره دو جلدی) (چاپ دوم)
- ۹۴- تعادل فازها در محیط حلال آب
- ۹۵- آنالیز تاپسی
- ۹۶- مثنوی معنوی - دفتر چهارم
- ۹۷- راهنمای نگارش و ارائه نوشتارهای علمی و فنی
- ۹۸- مجموعه مقالات دومین همایش تاریخ ریاضی
- ۹۹- مجموعه مقالات چهارمین همایش زبان و ادبیات فارسی
- ۱۰۰- کتاب شناسی توصیفی امام خمینی (س)
- ۱۰۱- شیعی تجزیه
- ۱۰۲- مجموعه مقالات پنجمین همایش زبان و ادبیات فارسی
- ۱۰۳- مجموعه مقالات سمینار منابع و ذخایر معدنی دریایی
- ۱۰۴- مجموعه مقالات ششمین همایش زبان و ادبیات فارسی
- ۱۰۵- جان میل
- ۱۰۶- راهنمای دایرانی پزشکی برای خانوادهها (چاپ سوم)
- ۱۰۷- بناهای آبی
- ۱۰۸-۱۰۹ * خودآموز کامل AutoCAD 2000 (دوره دو جلدی)
- ۱۱۰-۱۱۱ * خودآموز کامل 3D Studio MAX 3.1 (دوره دو جلدی)
- ۱۱۲- تمرین مدل سازی 3D Studio MAX (جلد اول)
- ۱۱۳- تئوری مهندسی مازاد سازمان
- ۱۱۴- فرهنگ موضوعی غزل های سعدی
- ۱۱۵- زمین شناسی مهندسی
- ۱۱۶- حفاظت شبکه های توزیع انرژی الکتریکی
- ۱۱۷- سیستم های انتقال امپال پذیر FACTS (جلد اول)
- ۱۱۸- مهندسی سازه های خاکی
- ۱۱۹- خودآموز 2.35 Character Studio
- ۱۲۰- پنجمین همایش علوم و فنون دریایی و جوی ایران
- ۱۲۱- نقش عوامل هیدرولیکی در طراحی پلها
- ۱۲۲- اقتصاد مهندسی
- ۱۲۳- زمین شناسی تاریخی (جلد اول)
- ۱۲۴- مدیریت مؤثر پروژه
- ۱۲۵- موازنه جرم در سیستمهای فرآوری مواد
- ۱۲۶- شیمی ترکیبات هتروسیکل آروماتیک
- ۱۲۷- مثنوی معنوی دفتر پنجم
- ۱۲۸- حکمتها و حکایتها
- ۱۲۹- روش تحقیق و مرجع شناسی
- ۱۳۰- مثنوی معنوی دفتر ششم
- ۱۳۱، ۱۳۲ * مجموعه ای از خلاصه دروس مهندسی عمران به اهتمام آزمونهای کارشناسی ارشد (دوره دو جلدی)
- ۱۳۳- مجموعه مقالات سومین همایش تاریخ ریاضی
- ۱۳۴- مجموعه مقالات هفتمین همایش زبان و ادبیات فارسی
- ۱۳۵- تاریخ ریاضیات
- ۱۳۶- فرهنگ بسامدی اوزان و محور فلزهای سمدی و حافظ
- ۱۳۷- تحلیل و طراحی سیمدای سازه های ساختمانی، مربع جامع نرم افزار ETAB 2000 (چاپ دوم)
- ۱۳۸- طراحی راکتورهای شیمیایی
- ۱۳۹- نرم دینامیک مهندسی شیمی
- ۱۴۰- انتقال جرم و عملیات واحد
- ۱۴۱- مهندسی سیستمهای توزیع
- ۱۴۲- طراحی، محاسبات و ستره: راه، کانال، زهک
- ۱۴۳- انجام خاکی و تهیه نقشه های توپوگرافی
- ۱۴۴- طراحی سازه های بتنی با استفاده از نرم افزار ETAB 2000
- ۱۴۵- طراحی سازه ها ETABS, SAFE, ETAS, ۱۰ م
- ۱۴۶- سیستم های انتقال انعطاف پذیر ACM
- ۱۴۷- کلبه مقاومت مصالح
- ۱۴۸- شبیه سازی مدارهای الکترونیکی
- ۱۴۹- طراحی سیستمهای حرارت مرگ
- ۱۵۰- استفاده از نرم افزار Carrier
- ۱۵۱- مبرج نرم افزار DER
- ۱۵۲- کتاب شناسی توصیفی امام خمینی (س)
- ۱۵۳- شیعی تجزیه
- ۱۵۴- مجموعه مقالات پنجمین همایش زبان و ادبیات فارسی
- ۱۵۵- مجموعه مقالات سمینار منابع و ذخایر معدنی دریایی
- ۱۵۶- مجموعه مقالات ششمین همایش زبان و ادبیات فارسی
- ۱۵۷- جان میل
- ۱۵۸- راهنمای دایرانی پزشکی برای خانوادهها (چاپ سوم)
- ۱۵۹- بناهای آبی
- ۱۶۰-۱۶۱ * خودآموز کامل AutoCAD 2000 (دوره دو جلدی)
- ۱۶۲- تمرین مدل سازی 3D Studio MAX (جلد اول)
- ۱۶۳- تئوری مهندسی مازاد سازمان
- ۱۶۴- فرهنگ موضوعی غزل های سعدی
- ۱۶۵- زمین شناسی مهندسی

DATA STRUCTURES

حای مطالبی در زمینه

- نمادهای ریاضی و تابعهای کامپیوتری
- پیچیدگی الگوریتمها
- پردازش رشتهها
- آرایهها، رکوردها و اشارهگرها
- لیستهای پیوندی
- لیستهای پیوندی دارای سرلیست
- لیستهای دو پیوندی
- پشتهها، صفها، زیربرنامههای بازگشتی
- درختها
- پیمایش درختهای دودویی
- درختهای جستجوی دودویی
- درخت HEAPSORT، HEAP
- الگوریتم هافمن
- گرافها و کاربردهای آن
- نمایش گرافها در حافظه کامپیوتر
- الگوریتم و ارشال، کوتاهترین مسیر
- مرتب کردن اطلاعات و جستجوی آنها
- انواع روشهای مرتب سازی
- روشهای HASHING
- ادغام و مرتب کردن اطلاعات

